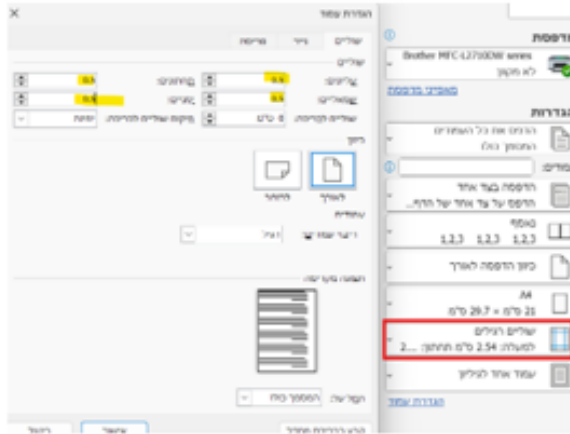


הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

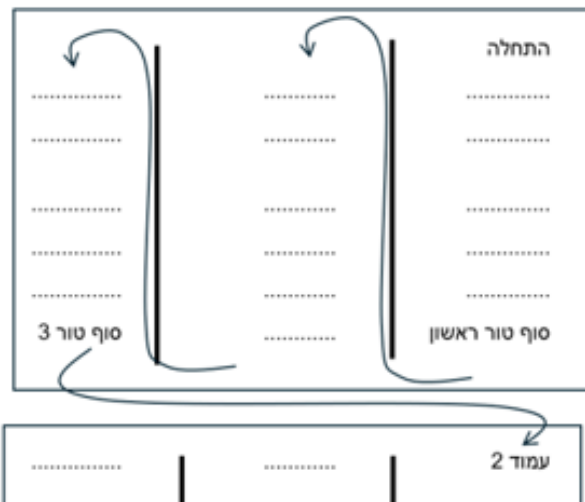
עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

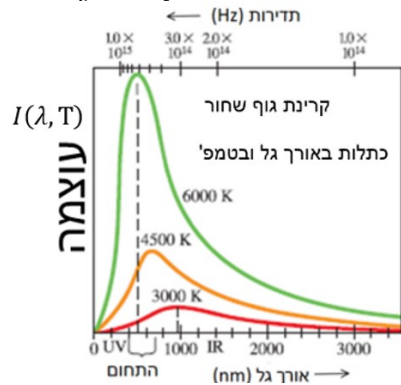
הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:

חוק וויין: $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$

λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$



קבוע בולצמן: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$

קבוע פלאנק: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

התנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום היא $E_{min} = hf$

- אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי: $E = nhf$

כאשר n הוא המספר הקוונטי $n = 1, 2, 3, \dots$

התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי:

אנרגיה של פוטון יחיד (f- תדירות האור): $E = hf$

הניסוי הפוטואלקטרי:

תדירות סף (W_0 - פונקציית העבודה של המתכת): $hf_0 = W_0$

אנרגיה קינטית מקסי של האלקטרונים: $E_k = hf - W_0$

מתח עצירה: $eV = E_{kmax}$

השוואה לתורה הגלית:

- לפי התורה הפוטונית

1. עוצמת האור קשורה

למספר הפוטונים ולא

אנרגיה של כל אחד מהם.

הגדלת העוצמה תגדיל את

מספר האלק' הנפלט אבל

לא את האנרגיה הקינטית שלהם.

2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.

3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

- לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

אנרגיה של פוטון יחיד: $E = hf$

תנע של פוטון: $p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$

מסת מנוחה של פוטון: $m = 0$

אפקט קומפטון:

הסתת קומפטון: $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

$\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען

2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיה הזוג, יש להוסיף אנרגיה מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2

3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.

4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

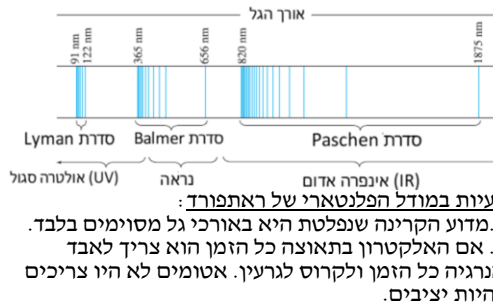
אורך גל דה ברויל של חלקיק: $\lambda = \frac{h}{p}$

$p = mv$ לא יחסותי, $p = \gamma mv$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום:

אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן: $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$

קבוע Rydberg: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$



מודל האטום של בוהר:

הנחות המודל:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.

2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.

אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

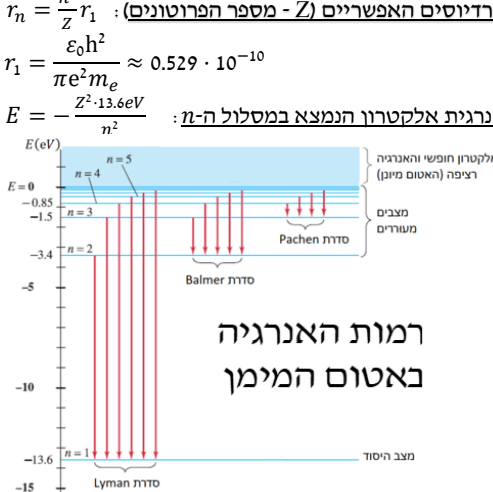
$hf = E_U - E_L$

הנחה על התנע הזוויתי ($n=1, 2, 3, \dots$): $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$

הרדיוסים האפשריים (Z- מספר הפרוטונים): $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$

$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n: $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 eV}{n^2}$



בעיית שני הגופים ומסה מצומצמת:

מעבר למשתנים החדשים והמעבר ההפוך:

$\vec{r}_{rel} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$; $\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_{c.m.} + \frac{m_1 \vec{r}_{rel}}{m_1 + m_2}$; $\vec{r}_1 = \vec{r}_{c.m.} - \frac{m_2 \vec{r}_{rel}}{m_1 + m_2}$

האנרגיה במשתנים החדשים:

$E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2 + U(r_{rel})$

מסה מצומצמת: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

בהנחה שאין כוחות חיצוניים אז החלק הראשון קבוע והאנרגיה תלויה רק ב- r_{rel} והנגזרת שלו כמו במימד אחד.

תנ"צ:

$\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$; $\vec{L}_{c.m.} = \mu \vec{r}_{rel} \times \vec{v}_{rel}$

פונקציית הגל של החומר:

ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:

$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$

נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$

כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.

מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$

המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המסיימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).

שונות: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

כאשר - $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$

עקרון אי הוודאות של הייזנברג:

אי ודאות מיקום תנע: $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.

2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה: $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.

2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות. הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסיות.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי: $\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$

משוואת שרדינגר:

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t)$$

תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$

כאשר: $\Psi(x, t) = \psi(x) e^{\frac{iEt}{\hbar}}$

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי:

פונקציית הגל, חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$

חבילת גלים: $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$

בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות לציון פונקציית גל:

1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.

2. עבור המצב ה-n ציירו גל עם $n - 1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).

3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולהיפך).

4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.

5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מנהור (tunneling):

מקדם ההעברה עבור $T \ll 1$ (ההסתברות לעבור):

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$$

$U_0 > E$, אורך המחסום, $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$ גובה הפוטנציאל במחסום.

מקדם החזרה: $R = 1 - T$

אוסילטור הרמוני:

$$\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \quad b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{2} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_3(x) = 8\sqrt{3} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ-1: $E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

או שאפשר להתחיל את n מאפס ואז $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה

מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים):

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

מהירות החבורה:

יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל- k

פיזור

מקדם העברה (ההסתברות לעבור):

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

$$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$$

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

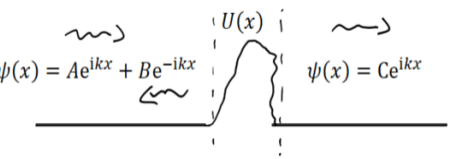
מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:



$$P_1^1 = \sin \theta \ ; \ P_3^1 = \frac{3}{2} \sin \theta \ (5 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_2^0 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3^1 = \frac{3}{2} \sin \theta \ (5 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_2^1 = 3 \sin \theta \cos \theta \ ; \ P_3^1 = \frac{3}{2} \sin \theta \ (5 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_2^2 = 3 \sin^2 \theta \quad ; \quad P_3^3 = 15 \sin \theta \ (1 - \cos^2 \theta)$$

אורתוגונליות:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* [Y_l^m(\theta, \varphi)] \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

המשוואה לחלק הרדיאלי:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) = l(l+1)$$

$$R(r) = \frac{u(r)}{r}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = Eu(r)$$

פתרון עבור אטום המימן

V
(
r
)
=

k

e

2

r

{\displaystyle V(r)={\frac {ke^{2}}{r}}}

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} = \frac{-13.6eV}{n^2}$$

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$

$$a = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} m$$

רדיוס בוהר:

$$L_{q-p}^p(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$

$$L_q(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$$

$$R_{10} = 2a^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-\frac{3}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{40} = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192} \left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

n ו-*l* שלמים, *l* ו-*n* 1,2,3... ו-*n* -1 ≤ *l* ≤ *n* -1
m שלם ומקיים: -*l* ≤ *m* ≤ *l*

אורתוגונליות:

$$\int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות

למצא את האלקטרון במרחק *r* מהגרעין):

$$P_{nl}(r) = |R_{nl}|^2 r^2$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z)$$

התנע הזוויתי:

$$\hat{L}^2 Y_l^m = l(l+1) \hbar^2 Y_l^m$$

$$|L| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

גודל התנ"י יכול להיות אפס בניגוד לגודל של בוהר.

את הכיוון נגזר באמצעות הגודל של *L*_z, משם אפשר

$$\cos \theta = \frac{L_z}{|L|}$$

$$\hat{L}_z Y_l^m = m \hbar Y_l^m$$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!

צפיפות המצבים: *g*(*n*) = 2*n*² (ה-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר: *n*_f > *n*_i. ב. *Δl* = *l*_f - *l*_i = ±1

$$\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$$

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

מומנט כוח על דיפול מגנטי *μ̂*:

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\Psi(x,t) = \sum \alpha_n \phi_n$$

*|α_n|*² זה ההסתברות להיות במצב *φ_n* או ההסתברות למדוד את הערך *λ_n*. הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^* \Psi(x,t) \, dx$$

במקרה הרציף:

$$|\alpha_n|^2 \rightarrow |\alpha(k,t)|^2 dk; \lambda_n \rightarrow \lambda(k); \phi_n \rightarrow \phi(k)$$

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k,t) \phi(k) dk$$

$$\alpha(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) \Psi(x,t) dx$$

GOOL

יחס החילוף

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.

אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).

יחס החילוף של המיקום עם התנע:

⟨
x
,

p

x

⟩
=
i
ℏ

{\displaystyle \langle {\hat {x}},{{\hat {p}}_{x}}\rangle =i\hbar }

אם"ם האופרטורים *Â* ו-*B̂* מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.

אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.

אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות

Δ
A
Δ
B
≥

1
2

|
⟨
[
A
,
B
]
⟩
|

{\displaystyle \Delta A\Delta B\geq {\tfrac {1}{2}}|\langle [A,B]\rangle |}

 בניהם לפי:

GOOL

משפט ארנפס

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

GOOL

זרם ההסתברות:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

- זרם ההסתברות מתאפס כשפונקציות גל ממשיות.

- קבוע עבור מצבים יציבים.

אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: GOOL

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-*r*:

ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקציית הגל:

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\theta(\theta)\phi(\varphi)$$

המשוואה ל-*θ*(*θ*):

$$\frac{1}{\theta(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 \phi(\varphi)$$

משוואה ל-*φ*(*φ*):

פתרון ל- *θ*(*θ*) ו-*φ*(*φ*):

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \theta(\theta)\phi(\varphi) =$$

$$= \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m & m > 0 \\ 1 & m \leq 0 \end{cases} \quad l \geq 0$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_l(x)$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l$$

$$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta; \quad Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta e^{\pm i\varphi};$$

$$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$$

$$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$Y_3^{\pm 1} = \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1) e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\theta \cos\theta e^{\pm 2i\varphi}$$

$$Y_3^{\pm 3} = \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^3\theta e^{\pm 3i\varphi}$$

$$P_1^0 = \cos\theta; \quad P_3^0 = \frac{1}{2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

E

U(*x*)↑

*U*₀

0

E > *U*₀

T =

4

k

1

k

2

(

k

1

+

k

2

)

2

{\displaystyle T={\frac {4k_{1}k_{2}}{(k_{1}+k_{2})^{2}}}

R =

(

k

1

−

k

2

)

2

(

k

1

+

k

2

)

{\displaystyle R={\frac {(k_{1}-k_{2})^{2}}{(k_{1}+k_{2})}}

- כאשר *E* < *U*(±∞) נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.

- כאשר *E* > *U*(±∞) נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

GOOL

פונקציית דלתא של דיראק

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

הגדרות הפונקציה:

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} \quad \text{או} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

כאשר a הולך לאפס.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא:

$$\text{עבור } E < 0 \quad V(x) = -a\delta(x)$$

$$\text{נקבל } E = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2} \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$$

מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב-*a* (גודל הבור).

$$\text{אם } E > 0: \quad R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \frac{1}{1+\beta^2}, \quad \beta = \frac{am}{\hbar^2 k}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

עבור: *V*(*x*) = +*aδ*(*x*) *E*, חייב להיות גודל מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר *E* > 0.

GOOL

פוטנציאלים תלת מימדים

תיבה תלת מימדית בגודל *a × b × c*:

$$\psi(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x,y,z) = \frac{1}{2} k_y x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

$$E = \left(n_x - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_z$$

ניוו: כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא מתרחש במימד אחד).

דרגת הניוו מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

GOOL

פונקציית הגל כתלות בזמן

$$\Psi(x,t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

כאשר *ψ_n*(*x*) הן פתרונות המצבים העמידים ו- *E_n* היא האנרגיה של כל מצב.

*|α_n|*² הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x,0) dx$$

- אם *Ψ*(*x*, 0) מנורמלת אז *Ψ*(*x*, *t*) מנורמלת לכל *t*.

GOOL

אופרטורים

אם *ψ̂* = *λψ* אז *ψ̂* היא פ"ע ו-*λ* הוא ע"ע.

פ"ע של אופרטור התנע:

ψ
(
x
)
=
A

e

i
k
x

{\displaystyle \psi (x)=Ae^{ikx}}

ה"ע של אופרטור התנע:

ℏ
k

{\displaystyle \hbar k}

פ"ע של אופרטור המיקום:

ψ
(
x
)
=
δ
(
x
−
a
)

{\displaystyle \psi (x)=\delta (x-a)}

ו"ע" *a*: (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מוודד את האנרגיה):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

GOOL

אופרטורים הרמיטיים

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי.

כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה: *Â*^{*} = *Ψ*^{*} (*ÂΨ*) לכל הפונקציות במרחב,

$$\text{או } \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \hat{A} \Psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \Psi_1)^* \Psi_2 dx$$

תכונות של אופרטור הרמיטי:

- ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.
- הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

GOOL

הפירוש הסטטיסטי המוכלל

אם *φ_n* ו-*λ_n* הן הפ"ע וה"ע של האופרטור *Â*

אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

שימו לב שפונקציית הגל הכללית צריכה לקיים את תנאי הסימטריה וצריך להתחשב גם בספין.

כוח ההחלפה – Exchange Forces

ריבוע המרחק הממוצע של שני חלקיקים שונים

$$\langle \Delta x^2 \rangle_a = \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2 \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

$$\langle x \rangle_a = \int x |\psi_a(x)|^2 dx$$

ריבוע המרחק הממוצע של חלקיקים עם פונקציה מרחבית

סימטרית / אנטי סימטרית

$$\langle \Delta x^2 \rangle_{\pm} = \langle \Delta x^2 \rangle_a \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

$$\langle x \rangle_{ab} = \int \psi_a(x) \psi_b(x) dx$$

קשר קוולנטי נוצר כאשר יש אלקטרונים במצב ספין אנטי-סימטרי (עבור שני אלקטרונים זהו מצב הסינגלט). מצב הספין האנטי-סימטרי מאלץ את פונקציית הגל המרחבית של האלקטרונים להיות סימטרית ולקרב בין האלקטרונים. המטען העודף של האלקטרונים כשהם מתקרבים מושך את הגרעינים של האטומים ויוצר את הקשר.

GOOL

אינטרפרומטר מאך זנדר:

פונקציית הגל ביציאה:

$$\psi = \begin{pmatrix} r^2 - t^2 e^{i\theta} \\ rt(1 + e^{i\theta}) \end{pmatrix}$$

המטריצות של מפצלי הקרניים:

$$BS2 = \begin{pmatrix} r & t \\ t & -r \end{pmatrix} ; \quad BS1 = \begin{pmatrix} -r & t \\ t & r \end{pmatrix}$$

תורת ההפרעות ללא תלות בזמן וללא ניוון:

עבור המילטוניאן מהצורה $H = H_0 + H'$,

כאשר $H' \ll H_0$.

$E_n^{(0)}$ ו- $\psi_n^{(0)}$ הן האנרגיות ופונקציות הגל של H_0 .

$$E_n^{(1)} = \left\langle \psi_n^{(0)} \left| H' \right| \psi_n^{(0)} \right\rangle$$

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\left\langle \psi_m^{(0)} \left| H' \right| \psi_n^{(0)} \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{\left| \left\langle \psi_m^{(0)} \left| H' \right| \psi_n^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$