

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את
חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית
ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר
העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים,
תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.
אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.
ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר
מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים
בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

תדירות סף (W_0 - פונקצית העבודה של המתכת): $hf_0 = W_0$
אנרגיה קינטית מקסי של האלקטרונים: $E_k = hf - W_0$
מתח עצירה: $eV_0 = E_{kmax}$

השוואה לתורה הגלית:
לפי התורה הפוטונית
 1. עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא אנרגיה של כל אחד מהם. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלטים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם.
 2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.
 3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.
לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית
 1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.
 2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:
אנרגיה של פוטון יחיד: $E = hf$
תנע של פוטון: $p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$
מסת מנוחה של פוטון: $m = 0$
אפקט קומפטון:
הסתת קומפטון: $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$
 λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.
 $\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:
תנאים ביצירת זוגות:
 1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מסען
 2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .
 3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף ב"כ"י (גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.
 4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.
דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:
 אורך גל דה ברוילי של חלקיק: $\lambda = \frac{h}{p}$
 $p = mv$ לא יחסותי, $p = m\gamma v$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום:
אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן: $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$
קבוע Rydberg: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$

בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:
 1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.
 2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

מודל האטום של בוהר:
הנחות המודל:
 1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.
 2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.
אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:
 $hf = E_U - E_L$
הנחה על התנע הזוויתי ($n=1,2,3...$): $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$
הרדיוסים האפשריים (Z - מספר הפרוטונים): $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$
 $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$
אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n: $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 eV}{n^2}$

קבוע: $FT[1] = \delta(k)$
נוסחת הכפל באקספוננט, קוסינוס או סינוס (מודולציה):
 $FT[f(x)e^{iCx}] = F(k - C)$
 $FT[f(x) \cos(Cx)] = \frac{F(k - C) + F(k + C)}{2}$
 $FT[f(x) \sin(Cx)] = \frac{F(k - C) - F(k + C)}{2i}$
נוסחת הכינון והזזה: $FT[f(ax + b)] = \frac{1}{|a|} e^{i \frac{kb}{a}} F\left(\frac{k}{a}\right)$
נוסחת הנגזרת: אם $f(x) \in G$ ו- $f'(x) \in G$ אז: $FT[f'(x)] = ikF(k)$
אז:
נוסחת המומנט: אם $xf(x) \in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו- $FT[xf(x)] = i \frac{d}{dk} F(k)$

מבוא לגלים
גלים רוחביים: ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות (מיתר)
גלים אורכיים: ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות (קול)
תווך: החומר בו מתקדמת ההפרעה
פונקציית הגל: $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.
אנרגיה של גל: $E, A \propto A^2$ היא האמפליטודה (משרעת)
משוואת הגלים במימד אחד: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$
 כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.
התאבכות: סכימה של גלים שנפגשים
חזית גל: אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן
גלים מחזוריים:
 λ - אורך הגל; T - זמן המחזור; v - מהירות הגל

תדירות (מספר המחזורים בשנייה): $f = \frac{1}{T}$
גל הרמוני: $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi)$
מספר הגל: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
קשרים בין הגדלים השונים: $\omega = vk = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
גל עומד: מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים
 $y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \phi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \phi))$
נקודות צומת (node): נקודות שלא זוזות. אין מהירות גל.
נקודת טבור (antinode): אמפליטודה מקסימאלית.
פעילות: בפעמיות אחת מחברים שני גלים בעלי אותה אמפליטודה ומקבלים גל בתוך מעטפת (פעמה).
 $\Psi_1(t) = A \cos(\omega_1 t)$ & $\Psi_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$
 $\Psi_T(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = 2A \cos(\epsilon t) \cos(\Omega t)$
 $\epsilon = \frac{\omega_f - \omega_s}{2}$
 $\Omega = \frac{\omega_f + \omega_s}{2}$

תדירות הפעימה היא 2ε
תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:
חוק וויין: $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$
 λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין
נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$

קרינת גוף שחור

קבוע בולצמן: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$
קבוע פלאנק: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$
הנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של מסען בתנועה הרמונית באטום היא **אנרגיית המסען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי:** $E = nhf$
 כאשר n הוא המספר הקוונטי $n = 1, 2, 3, \dots$
התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי:
אנרגיה של פוטון יחיד (f- תדירות האור): $E = hf$
הינסי הפוטואלקטרי:

אנליזה פורייה
GOOL
 $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right]$
 כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).
 הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2 .
 $A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$
 $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$
 $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$
מכפלה פנימית: $\int_0^L f(x) g(x) dx$
פונקציות אורתוגונליות:
 $\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = 0$
 $\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$
 $\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$
 אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.
טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$
 $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$
 $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$
 $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$
טור אקספוננטים: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2\pi n}{L} x}$
 $C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$, $C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} dx$
הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים:
 $A_n = C_n + C_{-n}$; $B_n = i(C_n - C_{-n})$; $\frac{A_0}{2} = C_0$
 $C_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n)$; $C_{-n} = \frac{1}{2}(B_n + iA_n)$

תופעת גיבס:
 קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.
 בבקורת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים).
התמרת (טרנספורם) פורייה:
 $f(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$
התמרה הפוכה: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dx$
תכונות:
 $FT[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha FT[f(x)] + \beta FT[g(x)]$
 אם $f(x) \in G$ אז $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \neq \infty$
 אם $f(x) \in G$ אז $F(k)$ רציפה.
 אם $f(x) \in G$ אז $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} F(k) = 0$
 אם $f(x)$ זוגית אז $F(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$
 אם $f(x)$ אי-זוגית אז: $F(k) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$
 אם $f(x)$ ממשיית אז $\overline{F(k)} = F(-k)$
התמרות של פונקציות מיוחדות:
גאוסיאן: $FT[Ae^{-ax^2}] = \frac{Ae^{-\frac{k^2}{4a}}}{2\sqrt{\pi a}}$
אקספוננט: $FT[Ae^{-a|x|}] = \frac{aA}{\pi(a^2 + k^2)}$
לורנציאן: $FT\left[\frac{a}{a^2 + x^2}\right] = \frac{1}{2} e^{-a|k|}$
פונקציית דלתא: $FT[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}$

עבור: $E, V(x) = +a\delta(x)$ חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

פוטנציאלים תלת מימדיים
GOOL
 תיבה תלת מימדית בגודל $a \times b \times c$:

$$\psi(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x,y,z) = \frac{1}{2} k_y x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

$$E = \left(n_x - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_z$$

נינון: כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא מתרחש במימד אחד).
 דרגת הנייון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

פונקציית הגל כתלות בזמן
GOOL

$$\Psi(x,t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

כאשר $\psi_n(x)$ הן פתרונות המצבים העמידים ו- E_n היא האנרגיה של כל מצב.
 $|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.
 $\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x,0) dx$
 - אם $\Psi(x,0)$ מנורמלת אז $\Psi(x,t)$ מנורמלת לכל t .

אופרטורים
GOOL

אם $\hat{Q}\psi = \lambda\psi$ אז ψ היא פ"ע ו- λ הוא ע"י.
 פ"ע של אופרטור התנע: $\psi(x) = Ae^{ikx}$
 הע"ע של אופרטור התנע: $\hbar k$
 פ"ע של אופרטור המיקום: $\psi(x) = \delta(x - a)$
 וע"ע: a (המיקום עצמו).
 אופרטור ההמילטוניאן (מודד את האנרגיה):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

אופרטורים הרמיטיים
GOOL
 גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי. כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.
 הגדרה: $(\hat{A}\psi)^* = \psi^* \hat{A}$ לכל הפונקציות במרחב,
 או $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \psi_1)^* \psi_2 dx$
 תכונות של אופרטור הרמיטי:
 1. ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.
 2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
 3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.
 4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל
GOOL
 אם λ_n ו- ϕ_n הן הפ"ע וע"ע של האופרטור $\hat{A}$ אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

$$\Psi(x,t) = \sum \alpha_n \phi_n$$
 זה ההסתברות להיות במצב ϕ_n או ההסתברות למדוד את הערך λ_n . הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^* \Psi(x,t) dx$$

במקרה הרציף:
 $|\alpha_n|^2 \rightarrow |\alpha(k,t)|^2 dk; \lambda_n \rightarrow \lambda(k); \phi_n \rightarrow \phi(k)$

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k,t) \phi(k) dk$$

$$\alpha(k,t) = \int \phi(k) \Psi(x,t) dx$$

יחס החילוף
GOOL
 $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
 יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו. אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).
יחס החילוף של המיקום עם התנע: $\langle [\hat{x}, \hat{p}_x] \rangle = i\hbar$
 אם "ס" האופרטורים $\hat{A}$ ו- $\hat{B}$ מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.
 אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.
 אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות בניהם לפי:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. **עקרונות לציור פונקציית גל:**
 1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
 2. עבור המצב n -ה ציירו גל עם $n - 1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
 3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולחפך).
 4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
 5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שהחפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מנהור (tunneling):
GOOL
 מקדם ההעברה עבור $1 \ll T$ (ההסתברות לעבור):

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$$

$$l, \alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$
 הפוטנציאל במחסום.
 מקדם החזרה:

$$R = 1 - T$$
אוסילטור הרמוני:
GOOL

פונקציות הגל: $\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$ $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
 $\psi_2(x) = \sqrt{2} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$
 $\psi_3(x) = 8\sqrt{3} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$
 רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ-1: $E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$
 או שאפשר להתחיל את n מאפס ואז $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה
 מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים):

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$
 מהירות החבורה:
 יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל- k

GOOL
פיזור

$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $\psi(x) = Ce^{ikx}$

מקדם העברה (ההסתברות לעבור):

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$
 אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

$$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$$
מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$
 - עבור מדרגת פוטנציאל $E > U_0$ וכאשר $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

- כאשר $E < U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.
 - כאשר $E > U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

פונקציית דלתא של דיראק
GOOL
 הגדרות הפונקציה:

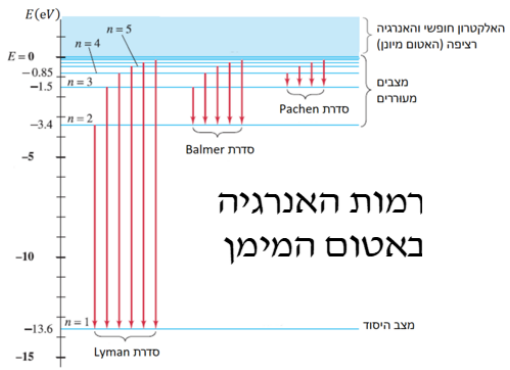
$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$
 או $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ או $\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$
 כאשר a הולך לאפס.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא:
 עבור $E < 0 \rightarrow V(x) = -a\delta(x)$
 נקבל $\psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$ ו- $E = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2}$
 מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב- a (גודל הבור).
 אם $E > 0$:

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$$

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \frac{1}{1 + \beta^2}, \beta = \frac{am}{\hbar^2 k}, k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$



בעיית שני הגופים ומסה מצומצמת:
GOOL
מעבר למשתנים החדשים והמעבר ההפוך:

$$\vec{r}_{rel} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \quad \vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{c.m.} + \frac{m_1 \vec{r}_{rel}}{m_1 + m_2}; \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_{c.m.} - \frac{m_2 \vec{r}_{rel}}{m_1 + m_2}$$
האנרגיה במשתנים החדשים:

$$E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2 + U(r_{rel})$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
 מסה מצומצמת:
 בהנחה שאין כוחות חיצוניים אז החלק הראשון קבוע והאנרגיה תלויה רק ב- r_{rel} והנגזרת שלו כמו במימד אחד.
תנ"צ:

$$\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}; \quad \vec{L}_{c.m.} = \mu \vec{r}_{rel} \times \vec{v}_{rel}$$
פונקציית הגל של החומר:
GOOL

ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:

$$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$
נרמול:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$
 כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.
מיקום ממוצע:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$
 המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצא אותו על ידי נגזרת).
שונות:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$
 כאשר -

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

עקרון אי הודאות של הייזנברג:
GOOL
אי ודאות מיקום תנע:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot s$$
 1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.
 2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.
 3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$
 1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.
 2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.
אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי:

$$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$$
משוואת שרדינגר:
GOOL
משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \Psi(x,t)$$
 - תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi + U \Psi$$
משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$
 כאשר:

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$
חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי:
GOOL
פונקציית הגל, חלקיק חופשי:

$$\psi(x) = A \sin(kx)$$
חבילת גלים:

$$\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$$
בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$
 לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה

עבור אלקטרון:

m

s

=
−

1
2

,

1
2

m

s

=
−
g

μ

B

ℏ

{\displaystyle {\vec {\mu }}_{s}=-g{\frac {\mu _{B}}{\hbar }}{\vec {S}}}

מומנט מגנטי מהספין:

g
=
2.0023
…
≈
2

{\displaystyle g=2.0023\ldots \approx 2}

עבור אלקטרון g ≈ 2.0023...
אטומים מורכבים והטבלה המחזורית: GOOL
כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים:

n
,

l

,

m

l

,

m

s

{\displaystyle n,l,m_{l},m_{s}}

. בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב-*n* וגם ב-*l*.
עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים:

n
,

l

,

m

l

,

m

s

{\displaystyle n,l,m_{l},m_{s}}

.
ככל ש-*l* גדל (יש יותר תנ"י מסילתי) האנרגיה גדלה.
דעיכה של מקור רדיואקטיבי:

N

=

N

0

e

−
λ
t

{\displaystyle N=N_{0}e^{-\lambda t}}

 או

d
N

d
t

=
−
λ
N

{\displaystyle {\frac {dN}{dt}}=-\lambda N}

.
- מספר גרעיני האב בזמן t.
-

N

0

{\displaystyle N_{0}}

 מספר גרעיני האב בזמן t = 0.
-

d
N

d
t

{\displaystyle {\frac {dN}{dt}}}

 קצב ההתפרקות של החומר הרדיואקטיבי.
- λ קבוע דעיכה
פעילות (מינוס קצב ההתפרקות) של מקור רדיואקטיבי:

R
=
λ
N

{\displaystyle R=\lambda N}

T

1
/
2

=

ln
⁡
2

λ

{\displaystyle T_{1/2}={\frac {\ln 2}{\lambda }}}

זמן מחצית החיים:

a
=

ℏ

2

k
m

e

2

=
0.529
⋅

10

−
10

m

{\displaystyle a={\frac {\hbar ^{2}}{kme^{2}}}=0.529\cdot 10^{-10}m}

רדיוס בוהר:

L

p
−
p

(
x
)
=
(
−
1

)

p

(

d

d
x

)

p

L

q

(
x
)

{\displaystyle L_{q-p}^{p}(x)=(-1)^{p}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{p}L_{q}(x)}

L

q

(
x
)
=

e

x

(

d

d
x

)

q

(

e

−
x

x

q

)

{\displaystyle L_{q}(x)=e^{x}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{q}(e^{-x}x^{q})}

R

10

=
2

a

−

3
2

exp
⁡
(
−

r
a

)

{\displaystyle R_{10}=2a^{-{\frac {3}{2}}}\exp \left(-{\frac {r}{a}}\right)}

R

20

=

1

√
2

a

−

3
2

(
1
−

1
2
a

r
)
exp
⁡
(
−

r
2
a

)

{\displaystyle R_{20}={\frac {1}{\sqrt {2}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{2a}}r\right)\exp \left(-{\frac {r}{2a}}\right)}

R

21

=

1

√
24

a

−

3
2

r
a

exp
⁡
(
−

r
2
a

)

{\displaystyle R_{21}={\frac {1}{\sqrt {24}}}a^{-{\frac {3}{2}}}{\frac {r}{a}}\exp \left(-{\frac {r}{2a}}\right)}

R

30

=

2

√
27

a

−

3
2

(
1
−

2
3
a

r
+

2
27

(

r
a

)

2

)
exp
⁡
(
−

r
3
a

)

{\displaystyle R_{30}={\frac {2}{\sqrt {27}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {2}{3a}}r+{\frac {2}{27}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}

R

31

=

8

27

√
6

a

−

3
2

(
1
−

1
6
a

r
)
(

r
a

)
exp
⁡
(
−

r
3
a

)

{\displaystyle R_{31}={\frac {8}{27{\sqrt {6}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{6a}}r\right)\left({\frac {r}{a}}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}

R

32

=

4

81

√
30

a

−

3
2

(

r
a

)
exp
⁡
(
−

r
3
a

)

{\displaystyle R_{32}={\frac {4}{81{\sqrt {30}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left({\frac {r}{a}}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}

R

40

=

1
4

a

−

3
2

(
1
−

3
4
a

r
+

1
8

(

r
a

)

2

−

1
192

(

r
a

)

3

)
exp
⁡
(
−

r
4
a

)

{\displaystyle R_{40}={\frac {1}{4}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {3}{4a}}r+{\frac {1}{8}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}-{\frac {1}{192}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{3}\right)\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}

R

41

=

√
5

16

√
3

a

−

3
2

(
1
−

1
4
a

r
+

1
80

(

r
a

)

2

)

r
a

exp
⁡
(
−

r
4
a

)

{\displaystyle R_{41}={\frac {\sqrt {5}}{16{\sqrt {3}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{4a}}r+{\frac {1}{80}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\right){\frac {r}{a}}\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}

R

42

=

1

64

√
5

a

−

3
2

(
1
−

1
12
a

r
)
(

r
a

)

2

exp
⁡
(
−

r
4
a

)

{\displaystyle R_{42}={\frac {1}{64{\sqrt {5}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{12a}}r\right)\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}

R

43

=

1

768

√
35

a

−

3
2

(

r
a

)

3

exp
⁡
(
−

r
4
a

)

{\displaystyle R_{43}={\frac {1}{768{\sqrt {35}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{3}\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}

פתרון כללי:

ψ

n
l
m

(
r
,
θ
,
ϕ
)
=

R

n
l

(
r
)

Y

l
m

(
θ
,
ϕ
)

{\displaystyle \psi _{nlm}(r,\theta ,\phi)=R_{nl}(r)Y_{l}^{m}(\theta ,\phi)}

n ו-*l* שלמים, n=1,2,3... ו-0 ≤ *l* ≤ *n* - 1 ו--*l* ≤ *m* ≤ *l* שלם ומקיים:
אורתוגונליות:

∫

ψ

n
l
m

∗

ψ

n
l
m
′

r

2

sin
⁡
θ
d
r
d
θ
d
ϕ
=

δ

n
n
′

δ

l
l
′

δ

m
m
′

{\displaystyle \int \psi _{nlm}^{*}\psi _{n'l'm'}r^{2}\sin \theta drd\theta d\phi =\delta _{nn'}\delta _{ll'}\delta _{mm'}}

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק *r* מהגרעין):

P

n
l

(
r
)
=

|

R

n
l

|

2

r

2

{\displaystyle P_{nl}(r)=|R_{nl}|^{2}r^{2}}

התנע הזוויתי:

L
→

=

r
→

×

p
→

=
(

L

x

,

L

y

,

L

z

)

{\displaystyle {\vec {L}}={\vec {r}}\times {\vec {p}}=(L_{x},L_{y},L_{z})}

L

2

Y

l
m

=
l
(
l
+
1
)

ℏ

2

Y

l
m

{\displaystyle {\hat {L}}^{2}Y_{l}^{m}=l(l+1)\hbar ^{2}Y_{l}^{m}}

|*L*| =

√

l
(
l
+
1
)

ℏ

{\displaystyle |L|={\sqrt {l(l+1)}}\hbar }

.
גודל התנ"י יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוהר.
את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של *L*_z, משם אפשר למצא את

cos
⁡
θ
=

L

z

|

L

|

{\displaystyle \cos \theta ={\frac {L_{z}}{|L|}}}

.

L

z

Y

l
m

=
m
ℏ

Y

l
m

{\displaystyle {\hat {L}}_{z}Y_{l}^{m}=m\hbar Y_{l}^{m}}

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!
צפיפות המצבים:

g
(
n
)
=
2

n

2

{\displaystyle g(n)=2n^{2}}

 (ה-2 מגיע מהספין).
כללי מעבר: א.

n

i

>

n

f

{\displaystyle n_{i}>n_{f}}

 ב.

Δ
l
=

l

f

−

l

i

=
±
1

{\displaystyle \Delta l=l_{f}-l_{i}=\pm 1}

 ג.

Δ
m
=

m

f

−

m

i

=
0
,
±
1

{\displaystyle \Delta m=m_{f}-m_{i}=0,\pm 1}

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

**מומנט כוח על דיפול מגנטי

μ
→

{\displaystyle {\vec {\mu }}}

:**
אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

U
=
−

μ
→

⋅

B
→

{\displaystyle U=-{\vec {\mu }}\cdot {\vec {B}}}

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

F
→

=
(

μ
→

⋅

∇
)

B
→

{\displaystyle {\vec {F}}=({\vec {\mu }}\cdot {\vec {\nabla }}){\vec {B}}}

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:

μ
→

=

−

μ

B

ℏ

L
→

{\displaystyle {\vec {\mu }}={\frac {-\mu _{B}}{\hbar }}{\vec {L}}}

המגנטון של בוהר:

μ

B

=

e
ℏ

2

m

e

=
5.788
⋅

10

−
5

eV

/

T

{\displaystyle \mu _{B}={\frac {e\hbar }{2m_{e}}}=5.788\cdot 10^{-5}\,eV/T}

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני:

U
=

μ

B

ℏ

L
→

⋅

B
→

=

μ

B

B

m

{\displaystyle U={\frac {\mu _{B}}{\hbar }}{\vec {L}}\cdot {\vec {B}}=\mu _{B}Bm}

 כאשר m הוא המספר הקוונטי של *L*_z.
תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות **אפקט זימן**:

Δ

E

z

=

μ

B

B
Δ
m

{\displaystyle \Delta E_{z}=\mu _{B}B\Delta m}

;

Δ
m
=
±
1,0

{\displaystyle \Delta m=\pm 1,0}

;
התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרי להתפצל לשלושה קווים.
ספין ניסוי ושטרן גרלך: GOOL

תנ"י כולל:

J
→

=

L
→

+

S
→

{\displaystyle {\vec {J}}={\vec {L}}+{\vec {S}}}

כאשר

L
→

{\displaystyle {\vec {L}}}

 תנ"י מסילתי,

S
→

{\displaystyle {\vec {S}}}

 תנ"י כתוצאה מהספין.
S גדולה - גודל התנ"י מהספין. *s* קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון

s
=

1
2

{\displaystyle s={\frac {1}{2}}}

.
עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי

s
=
0
,

1
2

,
1
,

3
2

,
…

{\displaystyle s=0,{\frac {1}{2}},1,{\frac {3}{2}},\ldots }

.
חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם נקראים **בוזונים**.

S

z

=

m

s

ℏ

{\displaystyle S_{z}=m_{s}\hbar }

−
s
<

m

s

<
s

{\displaystyle -s<m_{s}<s}

 בקפיצות של 1

משפט ארנסט GOOL

d

d
t

⟨
Q
⟩

=

i
ℏ

⟨
[

H
→

,

Q
→

]
⟩

+

⟨

∂
Q

∂
t

⟩

{\displaystyle {\frac {d}{dt}}\langle Q\rangle ={\frac {i}{\hbar }}\langle [{{\vec {H}}},{\vec {Q}}]\rangle +\left\langle {\frac {\partial Q}{\partial t}}\right\rangle }

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.
זרם ההסתברות: GOOL

j
→

=

ℏ

2
m
i

(

ψ

∗

∇

ψ
−

ψ

∇

ψ

∗

)

{\displaystyle {\vec {j}}={\frac {\hbar }{2mi}}(\psi ^{*}{\vec {\nabla }}\psi -\psi {\vec {\nabla }}\psi ^{*})}

- זרם ההסתברות מתאפס כשפונקציות גל ממשיות.
- קבוע עבור מצבים יציבים.
אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: GOOL
משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-*r*:
ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקציית הגל:

ψ
(
r
,
θ
,
ϕ
)
=
R
(
r
)
θ
(
θ
)
ϕ
(
ϕ
)

{\displaystyle \psi (r,\theta ,\varphi)=R(r)\theta (\theta)\phi (\varphi)}

**המשוואה ל-

θ
(
θ
)

{\displaystyle \theta (\theta)}

:**

1

θ
(
θ
)

sin
⁡
θ

∂

∂
θ

(
sin
⁡
θ

∂

∂
θ

(
θ
)

)
+
l
(
l
+
1
)

sin

2

⁡
θ
=

m

2

{\displaystyle {\frac {1}{\theta (\theta)}}\sin \theta {\frac {\partial }{\partial \theta }}\left(\sin \theta {\frac {\partial \theta (\theta)}{\partial \theta }}\right)+l(l+1)\sin ^{2}\theta =m^{2}}

**משוואה ל-

ϕ
(
ϕ
)

{\displaystyle \phi (\varphi)}

:**

d

2

ϕ
(
ϕ
)

d

ϕ

2

=
−

m

2

ϕ
(
ϕ
)

{\displaystyle {\frac {d^{2}\phi (\varphi)}{d\varphi ^{2}}}=-m^{2}\phi (\varphi)}

**פתרון ל-

θ
(
θ
)

{\displaystyle \theta (\theta)}

 ו-

ϕ
(
ϕ
)

{\displaystyle \phi (\varphi)}

:**

Y

l
m

(
θ
,
ϕ
)
=
θ
(
θ
)
ϕ
(
ϕ
)
=

(
2
l
+
1
)
(
l
−
|
m
|
)
!

4
π
(
l
+
|
m
|
)
!

P

l

m

(
cos
⁡
θ
)

e

i
m
ϕ

=
ε

{\displaystyle Y_{l}^{m}(\theta ,\varphi)=\theta (\theta)\phi (\varphi)={\frac {(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi (l+|m|)!}}P_{l}^{m}(\cos \theta)e^{im\varphi }=\varepsilon {\sqrt {\frac {(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi (l+|m|)!}}}P_{l}^{m}(\cos \theta)e^{im\varphi }}

ε
=

{

(
−
1

)

m

m
>
0

1

m
≤
0

l
≥
0

{\displaystyle \varepsilon =\left\{{\begin{matrix}(-1)^{m}&m>0\\1&m\leq 0\end{matrix}}\right|l\geq 0}

P

l

m

(
x
)
=
(
1
−

x

2

)

|
m
|

2

(

d

d
x

)

|
m
|

P

l

(
x
)

{\displaystyle P_{l}^{m}(x)=(1-x^{2})^{\frac {|m|}{2}}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{|m|}P_{l}(x)}

P

l

(
x
)
=

1

2

l

l
!

(

d

d
x

)

l

(

x

2

−
1

)

l

{\displaystyle P_{l}(x)={\frac {1}{2^{l}l!}}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{l}(x^{2}-1)^{l}}

Y

0

=
(

1
4
π

)

1
2

;

Y

2

0

=
(

5
16
π

)

1
2

(
3
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle Y_{0}^{0}=\left({\frac {1}{4\pi }}\right)^{\frac {1}{2}};Y_{2}^{0}=\left({\frac {5}{16\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}(3\cos ^{2}\theta -1)}

Y

1

0

=
(

3
4
π

)

1
2

cos
⁡
θ
;

Y

2

±
1

=
∓
(

15
8
π

)

1
2

sin
⁡
θ
cos
⁡
θ

e

±
i
ϕ

{\displaystyle Y_{1}^{0}=\left({\frac {3}{4\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\cos \theta ;Y_{2}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {15}{8\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi }}

Y

1

±
1

=
∓
(

3
8
π

)

1
2

sin
⁡
θ

e

±
i
ϕ

;

{\displaystyle Y_{1}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {3}{8\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta e^{\pm i\phi };}

Y

2

±
2

=
(

15
32
π

)

1
2

sin

2

⁡
θ

e

±
2
i
ϕ

{\displaystyle Y_{2}^{\pm 2}=\left({\frac {15}{32\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{2}\theta e^{\pm 2i\phi }}

Y

3

0

=
(

7
16
π

)

1
2

(
5
cos

3

⁡
θ
−
3
cos
⁡
θ
)

{\displaystyle Y_{3}^{0}=\left({\frac {7}{16\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}(5\cos ^{3}\theta -3\cos \theta)}

Y

3

±
1

=
∓
(

21
64
π

)

1
2

sin
⁡
θ
(
5
cos

2

⁡
θ
−
1
)

e

±
i
ϕ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {21}{64\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)e^{\pm i\phi }}

Y

3

±
2

=
(

105
32
π

)

1
2

sin

2

⁡
θ
cos
⁡
θ

e

±
2
i
ϕ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 2}=\left({\frac {105}{32\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{2}\theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi }}

Y

3

±
3

=
∓
(

35
64
π

)

1
2

sin

3

⁡
θ

e

±
3
i
ϕ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 3}=\mp \left({\frac {35}{64\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{3}\theta e^{\pm 3i\phi }}

P

1

0

=
cos
⁡
θ
;

P

3

0

=

1
2

(
5
cos

3

⁡
θ
−
3
cos
⁡
θ
)

{\displaystyle P_{1}^{0}=\cos \theta ;P_{3}^{0}={\frac {1}{2}}(5\cos ^{3}\theta -3\cos \theta)}

P

1

1

=
sin
⁡
θ
;

P

3

1

=

3
2

sin
⁡
θ
(
5
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{1}^{1}=\sin \theta ;P_{3}^{1}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}

P

2

0

=

1
2

(
3
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{2}^{0}={\frac {1}{2}}(3\cos ^{2}\theta -1)}

P

3

1

=

3
2

sin
⁡
θ
(
5
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{3}^{1}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}

P

2

1

=
3
sin
⁡
θ
cos
⁡
θ
;

P

3

1

=

3
2

sin
⁡
θ
(
5
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{2}^{1}=3\sin \theta \cos \theta ;P_{3}^{1}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}

P

2

2

=
3

sin

2

⁡
θ

;

P

3

3

=
15
sin
⁡
θ
(
1
−

cos

2

⁡
θ
)

{\displaystyle P_{2}^{2}=3\sin ^{2}\theta \;;\;P_{3}^{3}=15\sin \theta (1-\cos ^{2}\theta)}

אורתוגונליות:
המשוואה לחלק הרדיאלי:

∫

2
π

∫

0

π

[

Y

l
m

(
θ
,
ϕ
)
]

∗

[

Y

l
′

m
′

(
θ
,
ϕ
)
]
sin
⁡
θ
d
θ
d
ϕ
=

δ

l
l
′

δ

m
m
′

{\displaystyle \int _{0}^{2\pi }\int _{0}^{\pi }[Y_{l}^{m}(\theta ,\varphi)]^{*}\left[Y_{l'}^{m'}(\theta ,\varphi)\right]\sin \theta d\theta d\varphi =\delta _{ll'}\delta _{mm'}}

המשוואה לחלק הרדיאלי:

1

R
(
r
)

∂

∂
r

(

r

2

∂
R
(
r
)

∂
r

)
−

2
m

r

2

(
V
(
r
)
−
E
)
=
l
(
l
+
1
)

{\displaystyle {\frac {1}{R(r)}}{\frac {\partial }{\partial r}}\left(r^{2}{\frac {\partial R(r)}{\partial r}}\right)-{\frac {2mr^{2}}{\hbar ^{2}}}(V(r)-E)=l(l+1)}

R
(
r
)
=

u
(
r
)

r

{\displaystyle R(r)={\frac {u(r)}{r}}}

−

ℏ

2

2
m

d

2

u
(
r
)

d

r

2

+
[
V
(
r
)
+

ℏ

2

l
(
l
+
1
)

r

2

]
u
(
r
)
=
E
u
(
r
)

{\displaystyle -{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {d^{2}u(r)}{dr^{2}}}+\left[V(r)+{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {l(l+1)}{r^{2}}}\right]u(r)=Eu(r)}

פתרון עבור אטום המימן

V
(
r
)
=

k

e

2

r

{\displaystyle V(r)={\frac {ke^{2}}{r}}}

E

n

=
−

m

k

2

e

4

1

n

2

=

E

1

n

2

=

−
13.6
eV

n

2

{\displaystyle E_{n}=-{\frac {mk^{2}e^{4}}{2\hbar ^{2}}}\cdot {\frac {1}{n^{2}}}={\frac {E_{1}}{n^{2}}}={\frac {-13.6eV}{n^{2}}}}

R

n
l

(
r
)
=

(

2
n
a

)

3

(
n
−
l
−
1
)
!

2
n
[
(
n
−
l
)
]
!

3

e

−

r
n
a

(

2
r
n
a

)

l

L

n
−
l
−
1

(

2
r
n
a

)

{\displaystyle R_{nl}(r)={\sqrt {\left({\frac {2}{na}}\right)^{3}{\frac {(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^{3}}}}e^{-{\frac {r}{na}}}\left({\frac {2r}{na}}\right)^{l}L_{n-l-1}^{n-l-1}\left({\frac {2r}{na}}\right)}