

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

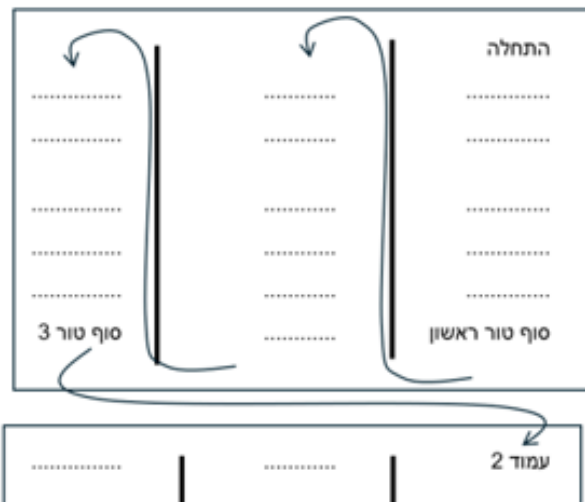
עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

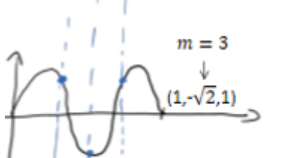
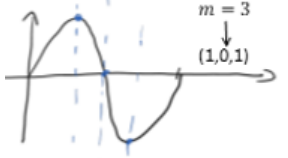
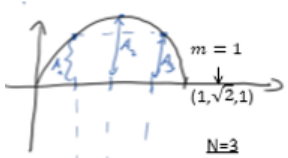
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.



משתנה רציף

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2}$$

z - מיקום המסה ; Ψ - העתק משווי משקל
 ρ - צפיפות המסה של המערכת , כאשר Δz הוא המרווח בין שתי מסות בשווי משקל (הולך לאפס)
 $E = k \Delta z$ - מודול האלסטיות.

אנליזה פורייה

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right]$$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).
 הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2 .

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

מכפלה פנימית:
 פונקציות אורתוגונליות:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.
 טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

טור אקספוננציאלי:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2\pi n}{L} x}$$

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} dx$$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננציאלי לטור סינוסים וקוסינוסים:

$$A_n = C_n + C_{-n}; \quad B_n = i(C_n - C_{-n}); \quad \frac{A_0}{2} = C_0$$

$$C_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n); \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(B_n + iA_n)$$

תופעת גיבס:
 קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלית. ניתן למצוא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω . אם $\Gamma \ll \omega_0$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות התנועה הרמונית ללא כוח מאלץ ומרסר)

מערכת של שתי מסות

משוואות התנועה:

$$-k_1 x_L - k_2(x_L - x_R) = m \ddot{x}_L$$

$$-k_1 x_R - k_2(x_R - x_L) = m \ddot{x}_R$$

החלפת משתנים:
 $x_s = x_L + x_R; \quad x_f = x_L - x_R$
 פתרון (מודים עצמיים):
 $x_s(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$
 $x_f(t) = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)$

כאשר -
 פעימות:
 עבור:
 מקבלים:

$$\varepsilon = \frac{\omega_f - \omega_s}{2}$$

$$\Omega = \frac{\omega_f + \omega_s}{2}$$

תדירות הפעימה: 2ε
 כוח מרסר ומאלץ:
 - המשוואות והפתרונות עבור x_s ו- x_f הן אלו של תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת
 - במקרה $\Gamma \ll 2\omega$ (תדירות הכוח המאלץ, Γ מקדם הכוח המרסר)
 - אם $\omega \approx \omega_s$ אז $A_f \gg A_s$ ו- $x_L \approx x_R$ כלומר רק המוד (1,1) מתעורר
 - אם $\omega \approx \omega_f$ אז $A_s \gg A_f$ ו- $x_L \approx -x_R$ כלומר רק המוד (1,-1) מתעורר.

מערכת של שלוש מסות

המשוואות:

$$-k x_1 - k(x_1 - x_2) = m \ddot{x}_1$$

$$-k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) = m \ddot{x}_2$$

$$-k x_3 - k(x_3 - x_2) = m \ddot{x}_3$$

פתרון (לאחר אלגברה עם מטריצה):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_m t + \phi_m) + A_f \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_f t + \phi_f) + A_s \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_s t + \phi_s)$$

כאשר -
 פתרון (לאחר אלגברה עם מטריצה):

מערכת N מסות

המשוואות:

$$-k(x_n - x_{n-1}) - k(x_n - x_{n+1}) = m \ddot{x}_n$$

פתרון כללי:

$$x_n(t) = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) e^{i\omega t} = C_1 \cos(n\theta) \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin(n\theta) \cos(\omega t + \phi_2)$$

כאשר -
 בתנאי שפה קבועים (קירות):
 $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$
 $x_n(t) = \sum_{m=1}^N C_m \sin\left(\frac{n\pi m}{N+1}\right) \cos(\omega_m t + \phi_m)$
 $\theta_m = \frac{\pi m}{N+1}; \quad \omega_m = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{2(N+1)}\right)$

כלומר יש N מודים עצמיים (בתדירויות ω_m) ו- x_n הם קומבינציות לינאריות של המודים האלו. המקדמים C_m ו- ϕ_m נקבעים מתנאי ההתחלה של כל ה- x_n

תנועה הרמונית פשוטה

משוואת התנועה:
 $-k(x - x_0) = m \ddot{x}$
 k ו- m הם קבועים חיוביים כלשהם.
 x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
 x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.
 $\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.
 חייב להיות מינוס לפני k .

פתרון המשוואה:
 $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0$
 x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma \vec{F} = 0$.
 A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משווי המשקל.
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - תדירות זוויתית
 ϕ - פאזה.
 מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

של המקדם x
 של המקדם $\ddot{x}$
 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
 נוסחה למהירות המקסימאלית:
 $v_{max} = \omega A$

האנרגיה:
 $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$
 - האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
 - חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.
 - **בור פוטנציאלי**: כאשר גוף נע בסביבה קרובה מאוד למינימום של הפוטנציאל (האנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית במינימום) אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

x_0 - מיקום נק' המינימום, ו- $U''(x_0)$ נגזרת שניה בנקודה.
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$

תנועה הרמונית מרוסנת

בנוסף לכוח הקפיץ נוסף כוח מרסר מהצורה:
 $F = -\lambda v$
 v - מהירות הגוף ו- λ קבוע.

משוואת התנועה:
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
 כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
 פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
 אין תנודות

מקרה (II) - ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$
 $z(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}$
 דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

מקרה (III) - ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$
 $z(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \cos(\tilde{\omega} t + \phi); \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$
 יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת
 בנוסף לכוח הקפיץ והמרסר נוסף כוח מאלץ מהצורה:
 $\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$
 Ω ו- F_0 קבועים כלשהם
 משוואת התנועה:
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$
 פתרון משוואת התנועה:
 $x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{homog}(t)$
 $x_{homog}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...
 - במצב עמיד (לאחר זמן רב) נזנח את הפתרון ההומוגני.

תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת
 בנוסף לכוח הקפיץ והמרסר נוסף כוח מאלץ מהצורה:
 $\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$
 Ω ו- F_0 קבועים כלשהם
 משוואת התנועה:
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$
 פתרון משוואת התנועה:
 $x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{homog}(t)$
 $x_{homog}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...
 - במצב עמיד (לאחר זמן רב) נזנח את הפתרון ההומוגני.

GOOL	גלים עומדים
מיתר חצי אינסופי:	
$\Psi(x=0,t)=0 \Rightarrow$	קצה קשור:
$\Rightarrow \Psi(x,t)=C\sin(kx)\sin(\omega t+\varphi)$	קצה חופשי:
$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big _{x=0}=0 \Rightarrow \Psi(x,t)=C\cos(kx)\cos(\omega t+\varphi)$	מיתר סופי:
$\Psi(x=0,t)=\Psi(x=L,t)=0$	2 קצוות קשורים:
$\lambda_n=\frac{2L}{n}; k_n=\frac{\pi n}{L}; n=0,1,2,3 \dots; f_n=\frac{vn}{2L}$	
$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$	
קצה קשור וקצה חופשי:	
$\Psi(x=0,t)=0, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big _{x=L}=0$	
$k_n=\frac{\pi}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right); n=0,1,2,3 \dots$	
$\lambda_n=\frac{2L}{(n+\frac{1}{2})}; f_n=\frac{v}{2L}\left(n+\frac{1}{2}\right)$	
$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$	

מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים:

$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big _{x=0}=0, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big _{x=L}=0$	
$\lambda_n=\frac{2L}{n}; f_n=\frac{vn}{2L}; k_n=\frac{\pi n}{L}; n=0,1,2,3 \dots$	
$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$	

GOOL	משוואת הגלים האלקטרומגנטיים
משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:	

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים:	
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}$	
משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:	
$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}})$	
$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	בריץ:

- המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.
 - המשוואה זהה לשדה המגנטי.
 - אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור

$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$	בחומר:
- תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק).	
פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:	
$E_x(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$	
$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	

מעבר לייצוג קופלקסי:

$\cos(kx - \omega t) = \text{Re}[e^{i(kx - \omega t)}]$	
- כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב- $t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.	
$\omega = uk$	יחס הדיספרסיה:
אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:	
$u_{ph} = \frac{\omega}{k}, u_g = \frac{d\omega}{dk}$	
GOOL	גל אלקטרומגנטי מישורי:

הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$	
כאשר $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$	
$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$	וקטור הגל:
- הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.	

יחס הדיספרסיה בגל: $\omega = u k = u\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$	
- כיוון $\vec{k}$ בכיוון התקדמות הגל, בגל מישורי תמיד $\vec{E} \perp \vec{k}$	
- כיוון $\vec{E}$ (מסומן בדרכ"ב ב- $\hat{n}$) נקרא כיוון הקיטוב של הגל.	
- כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל.	
- התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי (אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).	

$\vec{B} = \frac{1}{u} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$	
$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	העכבה של התווך:

GOOL	גלים רוחביים במיתר
משוואת הגלים:	
$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$	T – המתיחות במיתר, ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך, ψ – פונקציית הגל, ההעתק הרוחבי של כל חתיכה במיתר.
$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$	מהירות הגל:
פתרון המשוואה:	
$\psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$	- אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)
$\psi(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t = C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2)$	שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.
פתרון במספרים מרוכבים:	
$\psi(x,t) = A_1 e^{i(kx + \omega t)} + A_2 e^{i(kx - \omega t)} + A_3 e^{-i(kx + \omega t)} + A_4 e^{-i(kx - \omega t)}$	אם הפונקציה ממשית, אז $A_4 = A_2^* \cdot A_3 = A_1^*$ מתכנס לחלק הממשי של
$\psi(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}$	יחס הדיספרסיה:
$\omega = v \cdot k$	פתרון באמצעות נוסחת ד'אלמבר:

$\psi(x,t) = \frac{1}{2}[\psi(x-vt,0) + \psi(x+vt,0)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi'(x',0)dx'$	
GOOL	החזרה והעברה
תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב-$x=0$:	
1. רציפות הפונקציה: $\psi_L(0,t) = \psi_R(0,t)$	2. רציפות הכוח: $F_L = F_R$
אם המתיחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הגזרת:	
$\frac{\partial \psi_L}{\partial x}\Big _{x=0} = \frac{\partial \psi_R}{\partial x}\Big _{x=0}$	
$\psi_L(x,t) = \psi_r(x,t) + \psi(x,t); \psi_R(x,t) = \psi_t(x,t)$	
$\psi_r(x,t) = r\psi(-x,t)$	
$\psi_t(x,t) = t\psi\left(\frac{v_1}{v_2}x,t\right); v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$	

$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}$	מקדם החזרה:
$t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}$	מקדם העברה:
הערה: את הנוסחאות של מקדם ההעברה וההחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.	
GOOL	עכבה
$Z = \sqrt{\rho T} = \frac{T}{v}$	עכבה (impedance):
T – מתיחות. V – מהירות הגל	
$ Z = \frac{ F_y }{ V_y(t) }$	
F_y – הכוח על אלמנט מסה	
$V_y(t)$ – מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)	
מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2:	
$r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$	$t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$
$r = 0 \rightarrow t = 1 \Leftarrow z_1 = z_2$	
GOOL	אנרגיה הספק ותנע

אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר:

$\varepsilon(x,t) = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 = \rho v^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2$	
$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A ^2$	אנרגיה ממוצעת בזמן:
הספק רגעי בנקודה , כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני ביחידת זמן:	
$P^\pm = \pm Z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 = \pm v \varepsilon(x,t)$	

$P^\pm$ הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי

ההספק הממוצע בזמן:

$R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = r^2 = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^2$	מקדם החזרה של האנרגיה:
$T = \frac{P_2^+}{P_1^+} = \frac{z_2}{z_1} t^2 = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$	מקדם העברה של האנרגיה:
$R + T = 1$	

תנע: התנע הוא אפס.

הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.	
בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים).	
התמרת (טרנספורם) פורייה:	
$f(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$	
$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dx$	התמרה הפוכה:
תכונות:	
$FT[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha FT[f(x)] + \beta FT[g(x)]$	אם $f(x) \in G$ אז $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq \infty$
$f(x) \in G$ אז $F(k) \in F$ רציפה.	אם $f(x) \in G$ אז $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} F(k) = 0$
$F(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos(kx) dx$	אם $f(x)$ זוגית אז
$F(k) = -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin(kx) dx$	אם $f(x)$ אי-זוגית אז:
$\overline{F(k)} = F(-k)$	אם $f(x)$ ממשית אז
התמרות של פונקציות מיוחדות:	

$FT[Ae^{-ax^2}] = \frac{Ae^{-\frac{k^2}{4a}}}{2\sqrt{\pi a}}$	גאוסיאן:
$FT[Ae^{-a x }] = \frac{aA}{\pi(a^2 + k^2)}$	אקספוננט:
$FT\left[\frac{a}{a^2 + x^2}\right] = \frac{1}{2} e^{-a k }$	לורנציאן:
$FT[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}$	פונקציית דלתא:
$FT[1] = \delta(k)$	קבוע:
נוסחת הכפל באקספוננט, קוסינוס או סינוס (מודולציה):	
$FT[f(x)e^{iCx}] = F(k - C)$	
$FT[f(x) \cos(Cx)] = \frac{F(k - C) + F(k + C)}{2}$	
$FT[f(x) \sin(Cx)] = \frac{F(k - C) - F(k + C)}{2i}$	

$FT[f(ax + b)] = \frac{1}{ a } e^{i\frac{kb}{a}} F\left(\frac{k}{a}\right)$	נוסחת הכינון והזזת:
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ ו- $f(x), f'(x) \in G$	נוסחת הגזרת: אם
$FT[f'(x)] = ikF(k)$	אז:
$FT[xf(x)] = i \frac{d}{dk} F(k)$	נוסחת המומנט: אם $xf(x) \in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו-

GOOL	מבוא לגלים
גלים רוחביים: ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות (מיתר)	
גלים אורכיים: ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות (קול)	
תווך: החומר בו מתקדמת ההפרעה	
פונקציית הגל: $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.	
אנרגיה של גל: $A, E \propto A^2$ היא האמפליטודה (משרעת)	
משוואת הגלים במימד אחד:	
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	
כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.	
התאבכות: סכימה של גלים שנפגשים	
זווית גל: אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן	

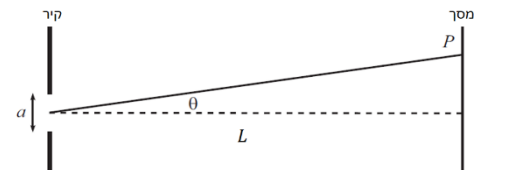
$\lambda = v \cdot T$	גלים מחזוריים:
λ - אורך הגל; T -זמן המחזור; v - מהירות הגל	
$f = \frac{1}{T}$	תדירות (מספר המחזורים בשנייה):
$y(x,t) = A \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$	גל הרמוני:
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	מספר הגל:

$\omega = vk = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	קשרים בין הגדלים השונים:
גל עומד: מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים	
$y(x,t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \varphi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \varphi))$	
- נקודות צומת (node): נקודות שלא זזות. אין מהירות גל.	
- נקודת טבור (antinode): אמפליטודה מקסימאלית.	
פעימות: בפעמיות אנחנו מחברים שני גלים בעלי אותה אמפליטודה ומקבלים גל בתוך מעטפת (פעימה).	

$\Psi_1(t) = A \cos(\omega_1 t) \quad \Psi_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$	
$\Psi_T(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = 2A \cos(\varepsilon t) \cos(\Omega t)$	
$\varepsilon = \frac{\omega_f - \omega_s}{2}$	
$\Omega = \frac{\omega_f + \omega_s}{2}$	

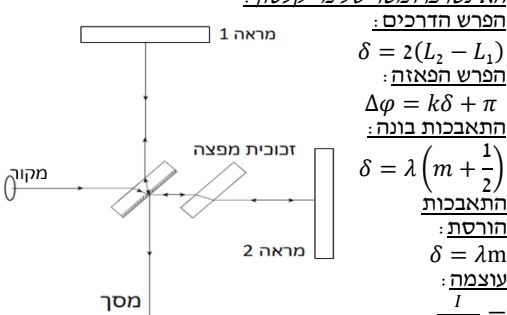
תדירות הפעימה היא 2ε

$n \neq mN$ - $\alpha_n = \frac{2\pi n}{N}$
 פיק קטן (נגזרת שווה לאפס ומכנה לא מתאפס), עבור
 $\alpha_n = \frac{2\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2}\right)$: $N \gg 1$
 מספר הפיקים באחד הצדדים (ללא הפיק המרכזי):
 $\frac{kd}{2\pi}$: (לעגל למטה).
 מספר הפיקים (הגדולים) הכולל שווה למספר הפיקים
 באחד הצדדים כפול 2 ועוד 1 (המרכזי)

עקיפה

 קירוב השדה הרחוק : $L \gg a$
 $\frac{I(\beta)}{I(0)} = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\beta)}{\frac{1}{2}\beta}\right)^2$
 $\beta = ka \sin \theta$
 נק' התאפסות:
 $\beta_n = 2\pi n$
 אם $\lambda > a$ אז רוחב הפיק המרכזי גדול מאינסוף ולא
 יהיו נק' התאפסות, הסדק מתנהג כמקור אור נקודתי.
 אם $\lambda \gg a$ מקבלים עוצמה קבועה ברוחב הסדק,
 מתאים למקרה הקלאסי בו מניחים שהאור נע בקווים
 ישרים.
 מקסימום מקומי (נגזרת מתאפסת):
 $\beta_n \approx 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$

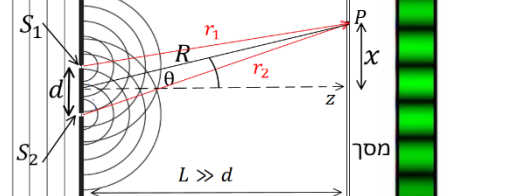
חקשר לפורייה
 האמפליטודה הכוללת על המסך כתלות בזווית:
 $A_{tot}(\theta) = 2\pi FT[B(x)](k')$; $k' = k \sin \theta$
 כאשר $B(x)$ היא האמפליטודה ליחידת אורך בסדק.
התאבכות ועקיפה ביחד
 $\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left(\sin c\left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \theta}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right)}\right)^2$
 כאשר a הוא רוחב כל סדק, d המרחק בין שני סדקים ו-
 N מספר הסדקים.

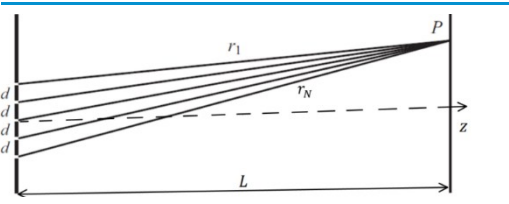
אינטרפרומטריה
 האינטרפרומטר של מייקלסון:
 הפרש הדרכים:
 $\delta = 2(L_2 - L_1)$
 הפרש הפאזה:
 $\Delta\phi = k\delta + \pi$
 התאבכות בונה:
 $\delta = \lambda \left(m + \frac{1}{2}\right)$
 התאבכות חורטת:
 $\delta = \lambda m$
 עוצמה:
 $\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)$
 אינטרפרומטר מאד-זנדר:
 $\delta = d(n - 1)$
 גלאי 1: $\Delta\phi = k\delta$
 גלאי 2: $\Delta\phi = k\delta + \pi$
 עוצמה:
 $\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$
 אינטרפרומטר פברי-פרו:

אינטרפרומטריה

 מראה 1
 זכוכית מפצה
 מקור
 מראה 2
 מסך
 גלאי 1
 גלאי 2
 חומר
 BS מפצל
 מקור
 BS מפצל
 מראה
 זכוכית
 אוויר
 זכוכית
 זווית פגיעה
 מקדם החזרה בכל פגיעה:
 $R = r^2 = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2$

$1 + \Gamma^\perp = \tau^\perp$
 עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי
 מקביל למישור הפגיעה):
 $\Gamma^\parallel = \frac{E_{r0}^\parallel}{E_{i0}^\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} =$
 $= \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$
 $\tau^\parallel = \frac{E_{t0}^\parallel}{E_{i0}^\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} =$
 $= \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{2n_1 n_2 \cos \theta_i}$
 $1 + \Gamma^\parallel = \tau^\parallel \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$
 זווית ברוסטר הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).
 זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:
 $\sin^2 \theta_B^\parallel = \frac{1 - \frac{\mu_t \epsilon_i}{\mu_i \epsilon_t}}{1 - \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon_i}\right)^2}$
 אם $\mu_2 \approx \mu_1$ אז: $\tan \theta_B^\parallel = \frac{n_t}{n_i}$; $\sin \theta_B^\parallel = \frac{1}{1 + \epsilon_i/\epsilon_t}$
 בקיטוב אנכי (מאוד נדיר בטבע):
 $\sin^2 \theta_B^\perp = \frac{1 - \frac{\mu_i \epsilon_t}{\mu_t \epsilon_i}}{1 - \left(\frac{\mu_i}{\mu_t}\right)^2}$

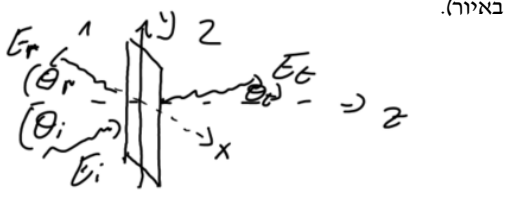
מעבר של יותר מתווך אחד: נציב את תנאי השפה עבור כל
 נקודת מעבר.
התאבכות בשני סדקים
 עקרון הויינגס: ניתן להתייחס לכל נקודה בחזית הגל
 כמקור נקודתי של גל חדש.
 אמפליטודה בגלים גליליים:
 $A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$
 אמפליטודה בגלים כדוריים:
 $A \propto \frac{1}{r}$
 ניסוי שני הסדקים:

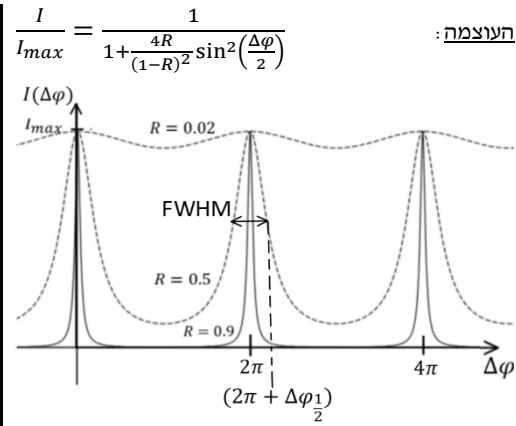

 קירוב השדה הרחוק : $L \gg d$
 $A_1 \approx A_2 \leftarrow \Delta r \ll r$ 1.
 $\Delta r = d \sin \theta \leftarrow r_1 || r_2$ 2.
 העוצמה היחסית:
 $\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2\left(\frac{k d \sin \theta}{2}\right)$
 קירוב זוויות קטנות:
 $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{x}{L}$
 בגלל התלות של האמפליטודה במרחק, צריך להכפיל את
 התוצאה לעוצמה בקוסינוס טטה עבור גלים גליליים
 ובקוסינוס בריבוע עבור גלים כדוריים. התוספת הזו
 קשורה למבנה של המסך והיא לא תופיע במסך עגול.
 בדרכי מניחים קירוב זוויות קטנות ואז היא זניחה.

התאבכות ב N סדקים

 קירוב השדה הרחוק:
 $A_1 \approx A_2 \approx A_3 \approx A_4 \leftarrow \Delta r \ll r$
 $\Delta r = d \sin \theta \leftarrow r_1 || r_2 || r_3 || r_4$
 $\alpha = kd \sin \theta$; $\frac{I_{tot}(\alpha)}{I_{tot}(0)} \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2$
 פיק גדול (מתרחש כשהמכנה מתאפס):
 $\alpha_n = 2\pi n$
 נקודות התאפסות (כשהמונה מתאפס והמכנה לא):

בריק:
 $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi$
 $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}$; $\vec{E} = -\eta \hat{k} \times \vec{H}$
 וקטור פוינטינג (כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן):
 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
 בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.
 הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).
 ממוצע הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא **העוצמה של הגל**):
 $\vec{S}_{Avg} = \langle \vec{S} \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{E} \times \vec{H}^*}{2} \right\}$
 ו- $\vec{H}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.
 המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$, $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$
קיטוב מעגלי ואליפטי:
 הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא
 לבלבל עם כיוון הגל).
 מקטב: מודד את הקיטוב של הגל.
 קיטוב לינארי: כיוון השדה קבוע.
 קיטוב מעגלי ימני: רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב- 90°
 (הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\frac{\pi}{2}$)
 - השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס
 לציר z-
 קיטוב מעגלי שמאלי: רכיב y מקדים את רכיב x ב- 90°
 ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$)
 - השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד
 ימין ביחס לציר z-
 קיטוב אליפטי: מתקבל כאשר הפרש הפאזה שונה מ- 90°
 או אם האמפליטודה של הרכיבים שונה.
פגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:
 כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל
 עובר וגל מוחזר.
 תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקור.
 אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה:
 $B_{2\perp} = B_{1\perp}$; $D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free}$
 $H_{2||} - H_{1||} = k_{free}$; $E_{2||} = E_{1||}$
 σ_{free} - צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה.
 k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה.
 בפגיעה ישרה (או פגיעה בניצב) יש לשני השדות רכיב
 מקביל לשפה בלבד.
 בתווך דיאלקטרי: $\sigma_{free} = k_{free} = 0$
 הקשר בין האמפליטודות:
 $\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$; $\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$
 - השוויון השני נכון רק אם: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב
 המקרים). לא לבלבל בין n ל- η .
 מקדם העברה: $\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$; מקדם החזרה: $\tau = \frac{E_t}{E_0}$
 בפגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:
פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי:
 מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
 מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz
 באיור).

מישור הסימטריה k_y זהה לכל הגלים ו- $\theta_i = \theta_r$
חוק סנל:
 $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t}$
 אם $n_i > n_t$ אז קיימת זווית קריטית.
 - אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה
 גל עובר (תהיה החזרה מלאה): $\theta_c = \text{shiftsin}\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$
 משוואות פרנל עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה
 החשמלי מאונך למישור הפגיעה):
 $\Gamma^\perp = \frac{E_{r0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} =$
 $= \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$
 $\tau^\perp = \frac{E_{t0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} =$
 $= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$


 משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים ו- $\theta_i = \theta_r$
חוק סנל:
 $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t}$
 אם $n_i > n_t$ אז קיימת זווית קריטית.
 - אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה
 גל עובר (תהיה החזרה מלאה): $\theta_c = \text{shiftsin}\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$
 משוואות פרנל עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה
 החשמלי מאונך למישור הפגיעה):
 $\Gamma^\perp = \frac{E_{r0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} =$
 $= \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$
 $\tau^\perp = \frac{E_{t0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} =$
 $= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$



FWHM - רוחב הפונקציה בחצי גובה (עבור $R=0.5$)
תוספת הפאזה להגיע לחצי גובה מנקודת המקסימום:

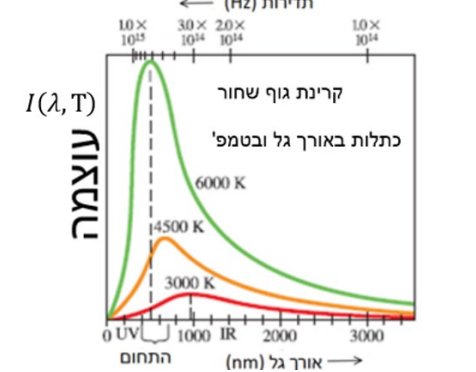
$$\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \approx \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:

חוק וויין: $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$

λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$



קבוע בולצמן: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$

קבוע פלאנק: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

התנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של

מטען בתנועה הרמונית באטום היא $E_{min} = hf$

- אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של העדר

המינימלי: $E = nhf$

כאשר n הוא המספר הקוונטי

התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי:

אנרגיה של פוטון יחיד (f- תדירות האור): $E = hf$

הניסוי הפוטואלקטרי:

תדירות סף (W_0 - פונקציית העבודה של המתכת): $hf_0 = W_0$

אנרגיה קינטית מקסי' של האלקטרונים: $E_k = hf - W_0$

מתח עצירה: $eV_0 = E_{k,max}$

השוואה לתורה הגלית:

לפי התורה הפוטונית

1. עוצמת האור קשורה

למספר הפוטונים ולא

אנרגיה של כל אחד מהם.

הגדלת העוצמה תגדיל את

מספר האלק' הנפלטים אבל

לא את האנרגיה הקינטית שלהם.

2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.

3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

- לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

אנרגיה של פוטון יחיד: $E = hf$

תנע של פוטון: $p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$

מסת מנוחה של פוטון: $m = 0$

אפקט קומפטון:

הסחת קומפטון: $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

$\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען
2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .
3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.
4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

אורך גל דה ברולי של חלקיק: $\lambda = \frac{h}{p}$

$p = mv$ לא יחסותי, $p = mv\gamma$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום:

אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן: $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$

קבוע Rydberg: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$

GOOL

עיוות במודל הפלנטארי של ראתפורד:

1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.

2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

מודל האטום של בוהר:

הנחות המודל:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.

2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.

אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

$$hf = E_U - E_L$$

הנחה על התנע הזוויתי ($n=1,2,3,\dots$): $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$

רדיוסים האפשריים (Z- מספר הפרוטונים): $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n: $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 eV}{n^2}$

GOOL

האלקטרון חופשי והאנרגיה רציפה (האטום מיונן)

מצבים משרורים

תדרות (Hz)

אורך גל (nm)

תחום

קרינת גוף שחור

כתלות באורך גל ובטמפ'

6000 K

4500 K

3000 K

0 UV 1000 IR 2000 3000

התחום

אורך גל (nm)

תדרות (Hz)

קרינת גוף שחור

כתלות באורך גל ובטמפ'

6000 K

4500 K

3000 K

0 UV 1000 IR 2000 3000

התחום

אורך גל (nm)

תדרות (Hz)

קרינת גוף שחור

כתלות באורך גל ובטמפ'

6000 K

4500 K

3000 K

0 UV 1000 IR 2000 3000

התחום

אורך גל (nm)

תדרות (Hz)

קרינת גוף שחור

כתלות באורך גל ובטמפ'

6000 K

4500 K

3000 K

0 UV 1000 IR 2000 3000

התחום

כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.
מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$
המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).
שונו: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$
כאשר: $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$
עקרון אי הוודאות של הייזנברג:
 $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$
אי ודאות מיקום תנע:
 $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot s$
1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.
2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.
3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.
אי ודאות זמן אנרגיה:
 $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$
1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.
2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הוודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.
אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי:
 $\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$
משוואת שרדינגר:
משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:
 $i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \Psi(x,t)$
- תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.
תלת מימד:
 $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$
משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$
כאשר: $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$
חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי:
פונקציית הגל, חלקיק חופשי:
 $\psi(x) = A \sin(kx)$
חבילת גלים:
 $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$
בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l:
 $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$
 $E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$
לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות לציור פונקציית גל:
1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
2. עבור המצב ה-n ציירו גל עם n-1 נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולהיפך).
4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.
מנהרה (tunneling):
מקדם החעברה עבור $T \ll 1$ (ההסתברות לעבור):
 $T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$
גובה $U_0 > E$ אורך המחסום, $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$
הפוטנציאל במחסום.
מקדם החזרה:
 $R = 1 - T$
אוסילטור הרמוני:
פונקציות הגל: $\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$ $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
 $\psi_2(x) = \sqrt{2} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$
 $\psi_3(x) = 8\sqrt{3} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$
רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ 1: $E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$
או שאפשר להתחיל את n מאפס ואז $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$
מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה
מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים):

נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta e^{\pm i\phi};$$

$$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$Y_3^{\pm 1} = \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1)e^{\pm i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\theta \cos\theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 3} = \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^3\theta e^{\pm 3i\phi}$$

$$P_1^0 = \cos\theta; \quad P_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$P_1^1 = \sin\theta; \quad P_3^1 = \frac{3}{2}\sin\theta (5\cos^2\theta - 1)$$

$$P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_3^1 = \frac{3}{2}\sin\theta (5\cos^2\theta - 1)$$

$$P_2^1 = 3\sin\theta \cos\theta; \quad P_3^1 = \frac{3}{2}\sin\theta (5\cos^2\theta - 1)$$

$$P_2^2 = 3\sin^2\theta; \quad P_3^3 = 15\sin\theta (1 - \cos^2\theta)$$

אורתוגונליות:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

המשוואה לחלק הרדיאלי:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) = l(l+1)$$

$$R(r) = \frac{u(r)}{r}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = Eu(r)$$

פתרון עבור אטום המימן: $V(r) = \frac{ke^2}{r}$

$$E_n = -\frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} = \frac{-13.6\text{eV}}{n^2}$$

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$

רדיוס בוהר: $a = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{m}$

$$L_{q-p}^p(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$

$$L_q(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$$

$$R_{10} = 2a^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-\frac{3}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{40} = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192} \left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

l ו- n שלמים, $n=1,2,3,\dots$ ו- $l=0,1,\dots,n-1$
 m שלם ומקיים: $-l \leq m \leq l$

אורתוגונליות:

$$\int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק r מהגרעין):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

GOOL **אופרטורים הרמיטיים**

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי.
כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה: $(\hat{A}\psi)^* = \psi^* \hat{A}$, לכל הפונקציות במרחב,
או $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \psi_1)^* \psi_2 \, dx$

- תכונות של אופרטור הרמיטי:
- ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.
- הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

GOOL **הפירוש הסטטיסטי המוכלל**

אם λ_n ו- ϕ_n הן הפייע ועייע של האופרטור $\hat{A}$
אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

$$\Psi(x, t) = \sum \alpha_n \phi_n$$

$|\alpha_n|^2$ זה ההסתברות להיות במצב ϕ_n או ההסתברות למדוד את הערך λ_n . הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^* \Psi(x, t) \, dx$

במקרה הרציף:

$$|\alpha_n|^2 \rightarrow |\alpha(k, t)|^2 dk; \quad \lambda_n \rightarrow \lambda(k); \quad \phi_n \rightarrow \phi(k)$$

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k, t) \phi(k) \, dk$$

$$\alpha(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) \Psi(x, t) \, dx$$

GOOL **יחס החילוף**

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.
אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).

יחס החילוף של המיקום עם התנע: $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$

אם"ם האופרטורים $\hat{A}$ ו- $\hat{B}$ מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.
אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.
אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |[\hat{A}, \hat{B}]|$
בניהם לפי:

GOOL **משפט ארנסט**

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

GOOL **זרם ההסתברות:**

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

- זרם ההסתברות מתאפס כשפונקציות גל ממשיית.
- קבוע עבור מצבים יציבים.

אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: **GOOL**

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב- r :
ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקציית הגל:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \theta(\theta) \phi(\varphi)$$

המשוואה ל- $\theta(\theta)$:

$$\frac{1}{\theta(\theta)} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin^2\theta = m^2$$

משוואה ל- $\phi(\varphi)$:

$$\frac{\partial^2 \phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 \phi(\varphi)$$

פתרון ל- $\theta(\theta)$ ו- $\phi(\varphi)$:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \theta(\theta) \phi(\varphi) =$$

$$= \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

$l \geq 0$ ו- $m > 0$ $\varepsilon = (-1)^m$ ו- $|m| \leq l$ שלם.

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_l(x)$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l$$

$$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta; \quad Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\phi}$$

מהירות התבורה:
יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל- k

GOOL **פיזור**

מקדם העברה (ההסתברות לעבור):
אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

$$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$$

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

- עבור מדרגת פוטנציאל $U(x)$ ו- $E > U_0$ וכאשר $E > U_0$

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

- כאשר $E < U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.
- כאשר $E > U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

GOOL **פונקציית דלתא של דיראק**

הגדרות הפונקציה:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

או $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, dx = 1$ או $\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$ כאשר a הולך לאפס.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) \, dx = f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא:
עבור $V(x) = -a\delta(x)$ ו- $E < 0$

נקבל: $\psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$

נקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב- a (גודל הבור).

אם $E > 0$:

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \frac{1}{1+\beta^2}, \quad \beta = \frac{am}{\hbar^2 k}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

עבור: $V(x) = +a\delta(x)$, $E > 0$ והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

GOOL **פוטנציאלים תלת מימדים**

תיבה תלת מימדית בגודל $a \times b \times c$:

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}\right)$$

אוקסיטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2} k_y x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

$$E = \left(n_x - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_z$$

ניוו: כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה לא מתרחש במימד אחד).

דרגת הניוו מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

GOOL **פונקציית הגל כתלות בזמן**

$$\Psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

כאשר $\psi_n(x)$ הן פתרונות המצבים העמידים ו- E_n היא האנרגיה של כל מצב.

$|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

אם $\Psi(x, 0)$ מנורמלת אז $\Psi(x, t)$ מנורמלת לכל t .

GOOL **אופרטורים**

אם $\hat{Q}\psi = \lambda\psi$ אז ψ היא פייע ו- λ הוא עייע.

פייע של אופרטור התנע: $\psi(x) = Ae^{ikx}$

העייע של אופרטור התנע: $\hbar k$

פייע של אופרטור המיקום: $\psi(x) = \delta(x-a)$

ועייע: a (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מוודד את האנרגיה):

תנ"ז מסילתי והספין: **GOOL**

התני"ז בקואורדינטות כדוריות: $\hat{L}_z = (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \varphi}$

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$
$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$
$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$
$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$
$$\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar \hat{L}_z$$
$$\hat{L}_- \hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar \hat{L}_z$$

יחסי החילוף של התני"ז המסילתי:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \quad ; \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$$
$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y \quad ; \quad [\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$$
$$[\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}] = \pm \hbar \hat{L}_{\pm} \quad ; \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_{\pm}] = 0$$
$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$$
$$L_{\pm} Y_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_l^{m \pm 1}$$

מטריצות התני"ז עבור l = 1:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ספין - אותם יחסי חילוף כמו התני"ז:

$$\hat{S}_z f = \hbar m_s f$$
$$\hat{S}^2 f = \hbar^2 S(S+1) f$$
$$-S \leq m_s \leq S$$

m_s, S יכולים להיות חצי שלמים.

S קבוע ותלוי רק בסוג החלקיק. פרמיונים – חצי שלם, בוזונים – ספין שלם.

ספין חצי:

$$S = \frac{1}{2} \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$
$$|x_+\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\uparrow\rangle \quad ; \quad |x_-\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\downarrow\rangle$$
$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{S}_{\pm} = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$
$$\hat{S}_{\pm} |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$$
$$|x\rangle = \alpha |x_+\rangle + \beta |x_-\rangle$$

פונקציית ספין כללית:

המילטוניון פריק:

נקיפת לרמור: **GOOL**

ערך התוחלת של S עבור ספין חצי בשדה מגנטי עושה נקיפה (פרסציה) מסביב לשדה בתדירות $\omega = \gamma B_0$ ובוזויות α ביחס לשדה כאשר $\gamma = g \frac{-e}{2m_e}$.

g הוא היחס הגיירו מגנטי. α נקבעת מתנאי התחלה.

פונקציית הגל:

$$\chi(t) = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{\gamma B_0 t}{2}}, \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{\gamma B_0 t}{2}} \right)$$

חיבור תנ"ז: **GOOL**

חיבור שני ספינים:

$$|S_1 - S_2| \leq S < S_1 + S_2$$

S הוא של כל המערכת והוא לא קבוע בניגוד לחלקיק בודד.

$$-S \leq m_s \leq S$$

$|S, m_s\rangle$ עבור שני חלקיקים עם ספין חצי:

$$|1, -1\rangle \rightarrow |\downarrow\downarrow\rangle$$
$$|1, 1\rangle \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle \quad ; \quad |1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

מצב סינגלט:

$$|0, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

תני"ז כולל:

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

אותם יחסי חילוף כמו של התני"ז המסילתי והספין.

$$\hat{J}_z f = \hbar m_J f \quad ; \quad \hat{J}^2 f = \hbar^2 j(j+1) f$$
$$m_J = m_l + m_s \quad ; \quad |l - S| \leq j \leq l + S$$

אינטראקציית ספין מסלול: **GOOL**

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\frac{e^2 \cdot \vec{S} \cdot \vec{L}}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2 r^3}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{m_e c^2 r^3} \vec{L}$$

הע"ע של $\hat{S} \cdot \hat{L}$:

$$\frac{1}{2} \hbar^2 (j(j+1) - S(S+1) - l(l+1))$$

$-$ האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i (כפול סקלר כלשהו): $Q_{ij} = \langle e_i | \hat{Q} | e_j \rangle$ שורה, j עמודה.

$-$ אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

$-$ כתיב נוסף:

$$\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} \psi_2 \rangle$$
$$\langle \hat{Q} \psi | = (\hat{Q} | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | \hat{Q}^\dagger$$
$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משוחלפת:

צמד הרמיטי:

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$

מטריצת יחידה:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

כפל מטריצות: $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$

כפל מטריצות הוא לא חילופי: $AB \neq BA$

יחס חילוף בין מטריצות: $[A, B] = AB - BA$

מטריצה ההופכית: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

מטריצה אוניטרית: $U^\dagger = U^{-1}$

זהויות:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad ; \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$
$$(A^\dagger)^\dagger = A \quad ; \quad (\langle \psi_1 | \hat{A}^\dagger | \psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$$
$$(AB)^T = B^T A^T \quad ; \quad \langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

- הגודל של ע"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.

אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.

פונקציות של אופרטורים והפרופגטור GOOL

אם $f(x) = \sum_n \alpha_n x^n$ אז ניתן להגדיר $f(\hat{A}) = \sum_n \alpha_n \hat{A}^n$ אם ורק אם $\hat{A}$ אלכסונית ו- a_i הם הע"ע שלה

כלומר אם $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$

זוהיות:

$$\hat{B} = f(\hat{A}) = \begin{pmatrix} f(a_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(a_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

אם $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ אז $[\hat{A}, f(\hat{B})] = 0$

אם $[\hat{A}, \hat{B}] = cI$ כאשר I היא מטריצת יחידה ו- c קבוע. אז

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = c \frac{df(\hat{B})}{dx}$$

אם $f(x)$ ממשית (ואנליטית), כלומר ניתן לפתח אותה לטור

$$f^\dagger(\hat{A}) = f(\hat{A}^\dagger)$$

הפרופגטור:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle$$
$$\hat{U}(t) = \Sigma e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} |E_n\rangle \langle E_n| = e^{-i \frac{\hat{H} t}{\hbar}}$$

הפרופגטור הוא אופרטור אוניטרי ולכן הנורמה של פונקציית הגל נשמרת במהלך ההתפתחות בזמן.

אופרטור העלאה והורדה באוסילטור הרמוני:

אופרטור ההורדה (או השמדה):

$$\hat{a} |\psi_n\rangle = \sqrt{n} |\psi_{n-1}\rangle \quad ; \quad \hat{a} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$

אופרטור ההעלאה (או יצירה):

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$
$$\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\psi_{n+1}\rangle$$
$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{a} \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \right)$$
$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad ; \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$
$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} H_n \left[\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x \right]$$
$$H_0(y) = 1; \quad H_2(y) = -2(1 - 2y^2)$$
$$H_1(y) = 2y; \quad H_3(y) = -12\left(y - \frac{2}{3}y^3\right)$$

$$P_{nl}(r) = |R_{nl}|^2 r^2$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z)$$
$$\hat{L}^2 Y_l^m = l(l+1) \hbar^2 Y_l^m$$
$$|L| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

גודל התני"ז יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוהר.

את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של L_z , משם אפשר למצא את $\cos \theta = \frac{L_z}{|L|}$

$$\hat{L}_z Y_l^m = m \hbar Y_l^m$$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!

צפיפות המצבים: $g(n) = 2n^2$ (ה-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר: א. $n_i > n_f$ ב. $\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$ ג. $\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

מומנט כוח על דיפול מגנטי $\vec{\mu}$: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}$$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:

$$\vec{\mu} = \frac{-e\hbar}{2m_e} \vec{L}$$

המגנטון של בוהר: $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5} \text{ eV} / T$

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני: $U = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$

הוא המספר הקוונטי של L_z .

תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות

בעקבות אפקט זימן: $\Delta E_z = \mu_B B \Delta m$; $\Delta m = \pm 1, 0$

התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרי להתפצל לשלושה קווים.

ספין ניסוי ושטרן גרלך: **GOOL**

תני"ז כולל:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

כאשר $\vec{L}$ תני"ז מסילתי, $\vec{S}$ תני"ז כתוצאה מהספין.

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

S גדולה - גודל התני"ז מהספין. s קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון $s = \frac{1}{2}$. עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי

$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם נקראים **בוזונים**.

$$S_z = m_s \hbar$$

$s < m_s < -s$ בקפיצות של 1

עבור אלקטרון:

$$m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

מומנט מגנטי מהספין:

$$\vec{\mu}_s = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

פקטור g, עבור אלקטרון $g \approx 2.0023$

אטומים מורכבים והטבלה המחזורית: GOOL

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: n, l, m_l, m_s . בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב- n וגם ב- l .

עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: n, l, m_l, m_s

ייצוג באמצעות אלגברה לינארית: GOOL

תכונות המכפלה הפנימית:

$$\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^*$$

$\langle v | v \rangle = 0$ אם $|v\rangle = |0\rangle$

$$\langle v | (\alpha |u\rangle + \beta |k\rangle) = \alpha \langle v | u \rangle + \beta \langle v | k \rangle$$

הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$$

נורמה:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$$

מכפלה פנימית: $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum \alpha_i^* \beta_i$ כאשר α_i ו- β_i הם המקדמים של פונקציות הגל באותו בסיס

אי שוויון שורץ: **GOOL**

$$|\langle a | b \rangle|^2 \leq \langle a | a \rangle \langle b | b \rangle$$

זווית מוכללת בין וקטורים:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{\langle a | b \rangle \langle b | a \rangle}}{\sqrt{\langle a | a \rangle \langle b | b \rangle}}$$

אי שוויון המשולש:

$$|\langle |a\rangle + |b\rangle | \leq \langle |a\rangle + |b\rangle | \langle |a\rangle + |b\rangle \rangle$$

אופרטורים בייצוג אלגברי GOOL

אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P(a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d) = \int_c^d \int_a^b |\Psi(x_1, x_2, t)|^2 dx_1 dx_2$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + V(x_1, x_2, t)$$

אם הפוטנציאל לא תלוי בזמן אז פונקציית הגל היא:

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \psi(x_1, x_2) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

עבור שני חלקיקים הנמצאים במצבים $\psi_a(x)$ ו- $\psi_b(x)$ אורתונורמליים, פונקציית הגל היא:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1) \psi_b(x_2) \quad \text{אז:} \quad \psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1) \psi_b(x_2)$$

- אם החלקים שונים, אז: $\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1) \psi_b(x_2)$
 - אם החלקיקים הם בוזונים / פרמיונים זהים אז פונקציית הגל צריכה להיות סימטרית (פלוס) / אנטי-סימטרית (מינוס) **להחלפה של החלקיקים**:

$$\Psi_{\pm}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1) \psi_b(x_2) \pm \psi_a(x_2) \psi_b(x_1)]$$

שימו לב שפונקציית הגל הכללית צריכה לקיים את תנאי הסימטריה וצריך להתחשב גם בספין.

כוח ההחלפה – Exchange Forces

ריבוע המרחק הממוצע של שני חלקיקים שונים

$$\langle \Delta x^2 \rangle_a = \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2 \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

$$\langle x \rangle_a = \int x |\psi_a(x)|^2 dx$$

ריבוע המרחק הממוצע של חלקיקים עם פונקציה מרחבית סימטרית / אנטי סימטרית

$$\langle \Delta x^2 \rangle_{\pm} = \langle \Delta x^2 \rangle_a \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

$$\langle x \rangle_{ab} = \int \psi_a(x) \psi_b(x) dx$$

קשר קוולנטי נוצר כאשר יש אלקטרונים במצב ספין אנטי-סימטרי (עבור שני אלקטרונים זהו מצב הסינגלט). מצב הספין האנטי-סימטרי מאלץ את פונקציית הגל המרחבית של האלקטרונים להיות סימטרית ולקרב בין האלקטרונים. המטען העודף של האלקטרונים כשהם מתקרבים מושך את הגרעינים של האטומים ויוצר את הקשר.