

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

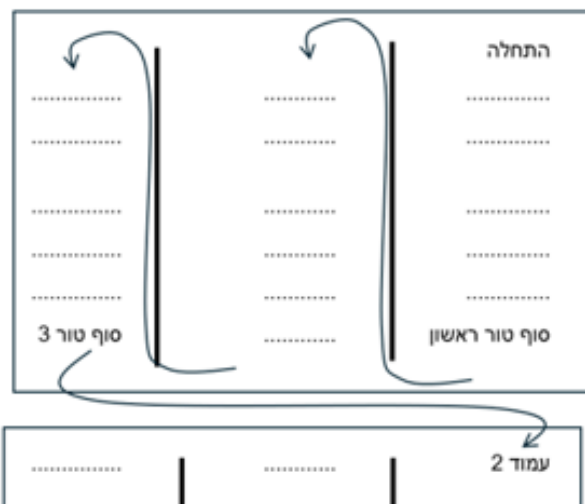
עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

מבוא לגלים

GOOL

גלים רוחניים: ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות (מיתר)
גלים אורכיים: ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות (קול)
תווך: החומר בו מתקדמת ההפרעה

פונקציית הגל: $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.
אנרגיה של גל: $E \propto A^2$, A היא האמפליטודה (משרעת)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{משוואת הגלים במימד אחד}$$

כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.

התאבכות: סכימה של גלים שנפגשים
חזית גל: אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן

$$\lambda = v \cdot T \quad \text{גלים מחזוריים}$$

λ - אורך הגל; T - זמן המחזור; v - מהירות הגל

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{תדירות (מספר המחזורים בשנייה)}$$

$$y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi) \quad \text{גל הרמוני}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{מספר הגל}$$

$$\omega = vk = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{קשרים בין הגדלים השונים}$$

גל עומד: מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \phi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \phi))$$

נקודות צומת (node): נקודות שלא זזות. אין מהירות גל.

נקודת טבור (antinode): אמפליטודה מקסימאלית.

פעימות: בפעימות אנו מחברים שני גלים בעלי אותה אמפליטודה ומקבלים גל בתוך מעטפת (פעימה).

$$\Psi_1(t) = A \cos(\omega_1 t) \quad \& \quad \Psi_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$$

$$\Psi_T(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = 2A \cos(\epsilon t) \cos(\Omega t)$$

$$\epsilon = \frac{\omega_f - \omega_s}{2} \quad \Omega = \frac{\omega_f + \omega_s}{2}$$

$\epsilon \ll \Omega$ תדירות הפעימה היא 2ϵ

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}; \quad E = \gamma mc^2 \quad \text{תנע ואנרגיה יחסיתיים}$$

γ - הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ולא למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות.

נוסחאות נוספות:

$$E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4; \quad |p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot mc$$

$$E_0 = mc^2 \quad \text{אנרגיית מנוחה}$$

$$E_k = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{אנרגיה קינטית}$$

עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, נייטרينو) והאנרגיה הקינטית היא:

$$E = |p|c = h\nu \quad \text{נ היא התדירות ו- } h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

h קבוע פלאנק

$$E' = \gamma_0(E - v_0 p_x); \quad p'_x = \gamma_0(p_x - v_0 E/c^2)$$

$$p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z$$

$$\left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c}\right) \quad \text{וקטור תנע אנרגיה}$$

"גודל הוקטורי" (מינוס באנרגיה) זהה בכל מערכות היחוס:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = const$$

הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.

עבור גוף יחיד הקבוע הוא: $m^2 c^2$.

פיזור קומפטון:

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = const$$

הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.

עבור גוף יחיד הקבוע הוא: $m^2 c^2$.

פיזור קומפטון:

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

E_γ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה

E'_γ - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה

m_e - מסת אלקטרון

θ - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J} \quad \text{יחידת האלקטרון וולט}$$

המרת מסת הגופים לאנרגיה:

$$m_e \approx 8.19 \times 10^{-14} \text{ J} (\approx 511 \text{ keV})$$

$$m_p \approx 1.50 \times 10^{-10} \text{ J} (\approx 938 \text{ MeV})$$

$$m_{\text{uranium}} \approx 3.55 \times 10^{-8} \text{ J} (\approx 225 \text{ GeV})$$

פוטון לאחר הפגיעה E'_γ

פוטון פוגע E_γ

פוטון פוגע E_γ

פוטון פוגע E_γ

פוטון פוגע E_γ

פוטון פוגע E_γ

פוטון פוגע E_γ

פוטון פוגע E_γ

- ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ- $\frac{eV}{c}$

כלומר הכמות (המספר) זהה רק ביחידות נחלק ב- c .

יחסות פרטית GOOL

תיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות (אינרציאליות).

עקרונות יסוד בתורת היחסות:

- חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.

- האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.

- מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.

- אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור.

- בוואקום. מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.

- הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם: x, y, z) ששונות טרנספורמציה.

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}; \quad \beta = \frac{v_0}{c}$$

γ_0 - תמיד גדולה מ-1

טרנספורמציות לורנץ למיקום והזמן:

$$x' = \gamma_0(x - v_0 t); \quad y' = y; \quad z' = z$$

$$t' = \gamma_0\left(t - \frac{v_0 x}{c^2}\right); \quad \beta = \frac{v_0}{c}; \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$x = \gamma_0(x' + v_0 t'); \quad y' = y; \quad z' = z$$

$$t = \gamma_0\left(t' + \frac{v_0 x'}{c^2}\right)$$

- הצירים של המערכות **חייבים** להיות מקבילים.

- בזמן $t = t' = 0$ **חייבים** שהראשיות מתלכדות.

המערכת העצמית:

מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

- **זמן עצמי** τ מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

- **אורך עצמי** l_0 האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

התכווצות האורך: שינוי האורך ממערכת המנוחה

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0} \quad \text{(העצמית) למערכת נעה}$$

התארכות הזמן: שינוי הזמן ממערכת המנוחה (העצמית) למערכת נעה

$$\Delta t = \gamma_0 \tau$$

$$\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$$

θ' - זווית ביחס לציר x (ציר התנועה) במערכת העצמית

θ - זווית ביחס לציר x (ציר התנועה) במערכת אחרת.

אפקט דופלר היחסות:

$$T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tau \quad \text{זמן המחזור של הגל}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda' \quad \text{אורך הגל}$$

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f' \quad \text{תדירות הגל}$$

$$\lambda' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}; \quad \lambda'_y = \frac{v_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}; \quad \lambda'_z = \frac{v_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$$

טרנספורמציות לורנץ למהירויות:

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}; \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}; \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$$

אברציה - שינוי זווית המהירות:

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0(\cos \theta - \frac{v_0}{c})}$$

שימו לב שפה השינוי הוא בזווית של וקטור המהירות (כיוון התנועה) ולא שינוי זווית של הגוף כמו למעלה.

$$\vec{\Sigma F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma^3 \vec{a}_{||} + m\gamma \vec{a}_{\perp}$$

$\vec{a}_{||}, \vec{a}_{\perp}$ הרכיב המאונך והמקביל של התאוצה למהירות

גודל הרכיב המקביל של התאוצה:

$$a_{||} = \dot{v}$$

טרנספורמציה של הכוחות:

$$F'_x = F_x - \frac{v_0(F_y v_y + F_z v_z)}{c^2 - v_0 v_x}$$

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}; \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v'_x}$$

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}; \quad F_z = \frac{F'_z}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v'_x}$$

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}; \quad F_z = \frac{F'_z}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v'_x}$$

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}; \quad F_z = \frac{F'_z}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v'_x}$$

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}; \quad F_z = \frac{F'_z}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v'_x}$$

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}; \quad F_z = \frac{F'_z}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v'_x}$$

טרנספורמציות יחסיות (לורנץ) לשדות

טרנספורמציה של השדות עבור צופה הנע במהירות $\vec{v}$

$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||}; \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$$

$$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||}; \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}); \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$\vec{E}, \vec{B}$ הם השדות במערכת הנעה.

$\vec{E}', \vec{B}'$ הם השדות במערכת המעבדה ו- $\vec{v}$ הם השדות במערכת הנעה.

$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||}; \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$$

$$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||}; \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}_{\perp})$$

טרנספורמציה של צפיפויות המטען:

$$\lambda = \gamma \lambda_0; \quad \sigma = \gamma \sigma_0; \quad \rho = \gamma \rho_0$$

כאשר $\lambda_0, \sigma_0, \rho_0$ הן צפיפויות אורכיות, משטחיות ונפחיות במערכת העצמית של הגוף.

- הסיבה לטרנספורמציה היא שסך המטען זהה בשתי המערכות אבל האורך משתנה.

נוסחאות לצפיפויות הזרם:

$$\vec{J} = \gamma \rho_0 \vec{v}; \quad \vec{K} = \gamma \sigma_0 \vec{v}; \quad I = \gamma \lambda_0 v$$

כאשר $\lambda_0, \sigma_0, \rho_0$ הן צפיפויות אורכיות, משטחיות ונפחיות במערכת העצמית של הגוף.

דעיכה של מקור רדיואקטיבי:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{או} \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

N - מספר גרעיני האב בזמן t .

N_0 - מספר גרעיני האב בזמן $t = 0$.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \text{קצב ההתפרקות של החומר הרדיואקטיבי.}$$

λ - קבוע דעיכה

פעילות (מינוס קצב ההתפרקות) של מקור רדיואקטיבי:

$$R = \lambda N$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{זמן מחצית החיים}$$

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:

$$\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad \text{חוק וויין}$$

λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad \text{נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור}$$

תדירות (Hz) $\leftarrow$

קרינת גוף שחור

כתלות באורך גל ובטמפרטורה

6000 K

4500 K

3000 K

0 UV 1000 IR 2000 3000

אורך גל (nm) $\rightarrow$

התחנה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום היא $E_{min} = hf$

- אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי: $E = nhf$

כאשר n הוא המספר הקוונטי

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי:

$$E = hf \quad \text{אנרגיה של פוטון יחיד (f - תדירות האור):}$$

הניסוי הפוטואלקטרי:

$$hf_0 = W_0 \quad \text{תדירות סף (פונקציית העבודה של המתכת):}$$

$$E_k = hf - W_0 \quad \text{אנרגיה קינטית מקסי של האלקטרונים}$$

מתח עצירה:

$$eV_0 = E_{kmax}$$

השוואה לתורה הגלית:

לפי התורה הפוטונית

1. עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא

אנרגיה של כל אחד מהם.

הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם.

2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.

3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

השוואה לתורה הגלית:

לפי התורה הפוטונית

1. עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא

אנרגיה של כל אחד מהם.

הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם.

2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.

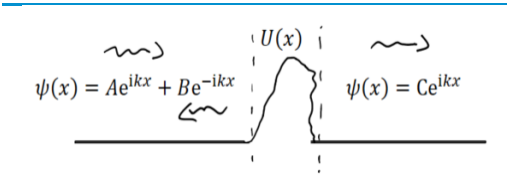
3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

פיזור



מקדם העברה (ההסתברות לעבור): $T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$

אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

$$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$$

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

עבור מדרגת פוטנציאל $E > U_0$ וכאשר $E > U_0$

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$
$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

כאשר $E < U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.

כאשר $E > U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

פונקציית דלתא של דיראק

הגדרות הפונקציה:

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} \quad \text{או} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

כאשר a חולך לאפס.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא:

$$E < 0 \quad V(x) = -a\delta(x) \quad \text{עבור}$$

$$E = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2} \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$$

נקבל מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב- a (גודל הבור).

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$$

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1}{1 + \beta^2}, \quad \beta = \frac{am}{\hbar^2 k}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

עבור $E > 0$, $V(x) = +a\delta(x)$ חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

פוטנציאלים תלת מימדיים

תיבה תלת מימדית בגודל $a \times b \times c$:

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

$$E = \left(n_x - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_z$$

ניוון: כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא מתרחש במימד אחד).

דרגת הניוון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

פונקציית הגל כתלות בזמן

$$\Psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

כאשר $\psi_n(x)$ הן פתרונות המצבים העמידים ו- E_n היא האנרגיה של כל מצב.

$|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x, 0) dx$$

- אם $\Psi(x, 0)$ מנורמלת אז $\Psi(x, t)$ מנורמלת לכל t .

אופרטורים

אם $\hat{\psi} = \lambda \psi$, אז ψ היא פ"ע ו- λ הוא ע"ע.

פ"ע של אופרטור התנע:

$$\hat{p} \psi(x) = \hbar k \psi(x)$$

פ"ע של אופרטור המיקום:

$$\hat{x} \psi(x) = x \psi(x)$$

וע"ע: a (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מוدد את האנרגיה):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

שונות:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

עקרון אי הוודאות של הייזנברג:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.
2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.
2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הוודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי:

$$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$$

משוואת שרדינגר:

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t)$$

- תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$

כאשר:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי:

פונקציית הגל, חלקיק חופשי:

$$\psi(x) = A \sin(kx)$$

חבילת גלים:

$$\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$$

בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות ליצור פונקציית גל:

1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
2. עבור המצב n -ה ציירו גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולחיצה).
4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שהחפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מנהור (tunneling):

מקדם ההעברה עבור $T \ll 1$ (ההסתברות לעבור):

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right) e^{-2\alpha l}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

הפוטנציאל במחסום.

מקדם החזרה:

$$R = 1 - T$$

אוסילטור הרמוני:

$$\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \quad b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{2} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_3(x) = 8\sqrt{3} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2} \right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ-1:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

או שאפשר להתחיל את n מאפס וזו $E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$

מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה

מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים):

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל- k

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

$$E = hf$$

$$p = \frac{E}{c} = \hbar \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

תנע של פוטון:

$$m = 0$$

מסת מנוחה של פוטון:

אפקט קומפטון:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

הסתת קומפטון:

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

$$\frac{h}{m_e c} - \text{אורך גל של האלקטרון החופשי.}$$

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען
2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .
3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף "בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.
4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

אורך גל דה ברולי של חלקיק:

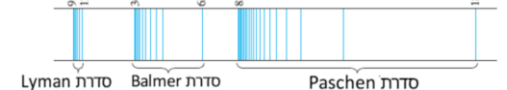
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$p = mv$ לא יחסותי, $p = mv\gamma$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$$

קבוע Rydberg:



בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:

1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.
2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

מודל האטום של בוהר:

הנחות המודל:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.
2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.

אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

$$hf = E_U - E_L$$

הנחה על התנע הזוויתי ($n=1, 2, 3, \dots$):

$$L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$$

הרדיוסים האפשריים (Z - מספר הפרוטונים):

$$r_n = \frac{n^2}{Z} r_1 \quad r_1 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה- n :

$$E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 \text{ eV}}{n^2}$$



רמות האנרגיה באטום המימן

פונקציית הגל של החומר:

ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:

$$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

נרמול: כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.

מיקום ממוצע:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצא אותו על ידי נגזרת).

גודל התני"ז יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוהר. את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של *L_z*, משם אפשר למצא את *cos θ =

L

z

|

L

|

{\displaystyle cos \theta ={\frac {L_{z}}{|L|}}}*

Ĥ_zY_l^m = mħY_l^m

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!

צפיפות המצבים: *g(n) = 2n²* (ה-2 מגיע מהספיין).

כללי מעבר: א. *n_f > n_i* ב. *Δl = l_f - l_i = ±1* ג. *Δm = m_f - m_i = 0, ±1*

מומנט מגנטי מסיליתי ואפקט זימן הנורמאלי:

מומנט כוח על דיפול מגנטי *μ̃*: *τ
=

μ
¯

×

B
¯

{\displaystyle {\vec {\tau }}={\vec {\mu }}\times {\vec {B}}}*

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

U = -μ̃ · B̃

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין: *μ
¯

=

−

μ

B

ħ

L
¯

{\displaystyle {\vec {\mu }}=-{\frac {\mu _{B}}{\hbar }}{\vec {L}}}*

המגנטון של בוהר: *μ

B

=

e
ħ

2

m

e

=5.788⋅10

−5

eV

/

T

{\displaystyle \mu _{B}={\frac {e\hbar }{2m_{e}}}=5.788\cdot 10^{-5}{\mathrm {eV} /T}*

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסיליתי עם שדה מגנטי חיצוני: *U
=

μ

B

L
¯

⋅

B
¯

=

μ

B

B

m

{\displaystyle U={\frac {\mu _{B}}{\hbar }}{\vec {L}}\cdot {\vec {B}}=\mu _{B}Bm}* כאשר m הוא המספר הקוונטי של *L_z*.

תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות

בעקבות אפקט זימן: *ΔE_z = μ_BBΔm* ; *Δm = ±1,0* ;

התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפצל לשלושה קווים.

ספיין ניסוי ושטרן גרלך: **GOOL**

תני"ז כולל: *f
¯

=

L
¯

+

S
¯

{\displaystyle {\vec {f}}={\vec {L}}+{\vec {S}}}*

כאשר *L̃* תני"ז מסיליתי, *S̃* תני"ז כתוצאה מהספיין.

S = √s(s+1)ħ

S גדולה - גודל התני"ז מהספיין. *s* קטנה - הספיין של החלקיק, עבור אלקטרון *s =

1
2

{\displaystyle {\frac {1}{2}}}*. עבור חלקיקים אחרים ערכי הספיין הן כפולות שלמות של חצי

*s = 0,

1
2

,

1
2

,

3
2

,
…

{\displaystyle s=0,{\frac {1}{2}},1,{\frac {3}{2}},\ldots }*. חלקיקים שהספיין שלהם חצי שלם נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספיין שלהם שלם נקראים **בוזונים**.

S_z = m_sħ

s > m_s > -s בקפיצות של 1

עבור אלקטרון: *m

s

=
−

1
2

,

1
2

{\displaystyle m_{s}=-{\frac {1}{2}},{\frac {1}{2}}}*

מומנט מגנטי מהספיין: *μ

s

=
−
g

μ

B

ħ

S
¯

{\displaystyle {\vec {\mu }}_{s}=-g{\frac {\mu _{B}}{\hbar }}{\vec {S}}}*

פקטור g, עבור אלקטרון 2 ≈ 2.0023

אטומים מורכבים והטבלה המחזורית: GOOL

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: *m_s, m_l, l, n*. בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב-*n* וגם ב-*l*.

עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: *n, l, m_l, m_s*

ככל ש-*l* גדל (יש יותר תני"ז מסיליתי) האנרגיה גדלה.

ייצוג באמצעות אלגברה לינארית: GOOL

תכונות המכפלה הפנימית:

*⟨
v
|

u
⟩
=
⟨
u
|

v
⟩

*

{\displaystyle \langle v|u\rangle =\langle u|v\rangle ^{*}}* סקלר

*⟨
v
|

v
⟩
=
|

v
⟩

|

v
⟩

{\displaystyle \langle v|v\rangle =|v\rangle |v\rangle }* אם *|v> = |0>*

*⟨
v
|

(

α
|

u
⟩
+

β
|

k
⟩
)
=

α
⟨
v
|

u
⟩
+

β
⟨
v
|

k
⟩

{\displaystyle \langle v|\left(\alpha |u\rangle +\beta |k\rangle \right)=\alpha \langle v|u\rangle +\beta \langle v|k\rangle }*

הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

*⟨

ψ

1

|

ψ

2

⟩
=

∫

−
∞

∞

ψ

1

*

ψ

2

d

x

{\displaystyle \langle \psi _{1}|\psi _{2}\rangle =\int _{-\infty }^{\infty }\psi _{1}^{*}\psi _{2}\,dx}*

נורמה: *|

|

v
|

|

=

⟨
v
|

v
⟩

{\displaystyle ||v||={\sqrt {\langle v|v\rangle }}*

מכפלה פנימית: *⟨

ψ

1

|

ψ

2

⟩
=

∑

i

α

i

β

i

{\displaystyle \langle \psi _{1}|\psi _{2}\rangle =\sum _{i}\alpha _{i}\beta _{i}}* כאשר *α_i* ו-*β_i* הם המקדמים של פונקציית הגל באותו בסיס

אי שוויון שורץ: GOOL

*|
⟨
a
|

b
⟩

|

|

2

≤
⟨
a
|

a
⟩
⟨
b
|

b
⟩

{\displaystyle |\langle a|b\rangle |^{2}\leq \langle a|a\rangle \langle b|b\rangle }*

זווית מוכללת בין וקטורים: *cos
⁡
θ
=

⟨
a
|

b
⟩

⟨
a
|

a
⟩

⟨
b
|

b
⟩

{\displaystyle \cos \theta ={\frac {\langle a|b\rangle }{\sqrt {\langle a|a\rangle \langle b|b\rangle }}}*

אי שוויון המשולש: *|
|

(

a
+
b
)

|

|

≤
|

a
|

+
|

b
|

{\displaystyle |\left(a+b\right)|\leq |a|+|b|}*

אופרטורים בייצוג אלגברי GOOL

אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

*Q
¯

=

(

Q

11

Q

12

…

Q

1n

Q

21

Q

22

…

Q

2n

⋮

⋮

⋮

⋮

)

{\displaystyle {\vec {Q}}={\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}&\ldots &Q_{1n}\\Q_{21}&Q_{22}&\ldots &Q_{2n}\\\vdots &\vdots &\ddots &\vdots \\Q_{n1}&Q_{n2}&\ldots &Q_{nn}\end{pmatrix}}*

- האיבר *Q_{ij}* מעביר את הוקטור *e_j* לוקטור *e_i* (ככול סקלר כלשהו): *Q_{ij} = <e_i |Q̂| e_j>*, שורה *i*, שורה *j* עמודה.

- אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

*Y

3

0

=

(

7

16
π

)

1
2

(5

cos

3

⁡
θ
−
3
cos
⁡
θ
)

{\displaystyle Y_{3}^{0}=\left({\frac {7}{16\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}(5\cos ^{3}\theta -3\cos \theta)}*

*Y

3

±
1

=
∓

(

21

64
π

)

1
2

sin
⁡
θ
(5

cos

2

⁡
θ
−
1)

e

±
i
ϕ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {21}{64\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)e^{\pm i\phi }}*

*Y

3

±
2

=

(

105

32
π

)

1
2

sin

2

⁡
θ
cos
⁡
θ

e

±
2
i
ϕ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 2}=\left({\frac {105}{32\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{2}\theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi }}*

*Y

3

±
3

=
∓

(

35

64
π

)

1
2

sin

3

⁡
θ

e

±
3
i
ϕ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 3}=\mp \left({\frac {35}{64\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{3}\theta e^{\pm 3i\phi }}*

*P

1

0

=
cos
⁡
θ
;

P

3

0

=

1
2

(5

cos

3

⁡
θ
−
3
cos
⁡
θ
)

{\displaystyle P_{1}^{0}=\cos \theta ;P_{3}^{0}={\frac {1}{2}}(5\cos ^{3}\theta -3\cos \theta)}*

*P

1

1

=
sin
⁡
θ
;

P

3

1

=

3
2

sin
⁡
θ
(5

cos

2

⁡
θ
−
1)

{\displaystyle P_{1}^{1}=\sin \theta ;P_{3}^{1}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}*

*P

2

0

=

1
2

(3

cos

2

⁡
θ
−
1)

{\displaystyle P_{2}^{0}={\frac {1}{2}}(3\cos ^{2}\theta -1)}*

*P

3

1

=

3
2

sin
⁡
θ
(5

cos

2

⁡
θ
−
1)

{\displaystyle P_{3}^{1}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}*

*P

2

1

=
3
sin
⁡
θ
cos
⁡
θ
;

P

3

1

=

3
2

sin
⁡
θ
(5

cos

2

⁡
θ
−
1)

{\displaystyle P_{2}^{1}=3\sin \theta \cos \theta ;P_{3}^{1}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}*

*P

2

2

=
3

sin

2

⁡
θ
;

P

3

2

=
15
sin
⁡
θ
(1
−

cos

2

⁡
θ
)

{\displaystyle P_{2}^{2}=3\sin ^{2}\theta ;P_{3}^{2}=15\sin \theta (1-\cos ^{2}\theta)}*

אורתוגונליות:

*∫

2
π

∫

0

π

[

Y

l

m

(
θ
,
ϕ
)

]

*

[

Y

l
′

m
′

(
θ
,
ϕ
)

]
sin
⁡
θ
d
θ
d
ϕ
=

δ

l
l
′

δ

m
m
′

{\displaystyle \int _{0}^{2\pi }\int _{0}^{\pi }[Y_{l}^{m}(\theta ,\phi)]^{*}[Y_{l'}^{m'}(\theta ,\phi)]\sin \theta d\theta d\phi =\delta _{ll'}\delta _{mm'}}*

המשוואה לחלק הרדיאלי:

*1
R
(
r
)

∂

∂
r

(

r

2

∂
R
(
r
)

∂
r

)
−

2
m

r

2

(
V
(
r
)
−
E
)
=
l
(
l
+
1
)

{\displaystyle {\frac {1}{R(r)}}{\frac {\partial }{\partial r}}\left(r^{2}{\frac {\partial R(r)}{\partial r}}\right)-{\frac {2mr^{2}}{\hbar ^{2}}}(V(r)-E)=l(l+1)}*

*R
(
r
)
=

u
(
r
)
r

{\displaystyle R(r)={\frac {u(r)}{r}}}*

*−

ħ

2

2
m

d

2

u
(
r
)

d

r

2

+
[
V
(
r
)
+

ħ

2

2
m

l
(
l
+
1
)

r

2

]
u
(
r
)
=
E
u
(
r
)

{\displaystyle -{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {d^{2}u(r)}{dr^{2}}}+\left[V(r)+{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {l(l+1)}{r^{2}}}\right]u(r)=Eu(r)}*

פתרון עבור אטום המימן: *V
(
r
)
=

k

e

2

r

{\displaystyle V(r)={\frac {ke^{2}}{r}}}*

*E

n

=
−

m

k

2

e

4

2
ħ

2

⋅

1

n

2

=

E

1

n

2

=

−
13.6
eV

n

2

{\displaystyle E_{n}=-{\frac {mk^{2}e^{4}}{2\hbar ^{2}}}\cdot {\frac {1}{n^{2}}}={\frac {E_{1}}{n^{2}}}={\frac {-13.6eV}{n^{2}}}}*

*R

n
l

(
r
)
=

(

2
n
a

)

3

(
n
−
l
−
1
)
!

2
n
!
[
(
n
−
l
)
]
!

e

−

r
n
a

(

2
r
n
a

)

l

L

n
−
l
−
1

l

(

2
r
n
a

)

{\displaystyle R_{nl}(r)={\sqrt {\left({\frac {2}{na}}\right)^{3}{\frac {(n-l-1)!}{2n![(n-l)!]^{3}}}e^{-{\frac {r}{na}}}\left({\frac {2r}{na}}\right)^{l}L_{n-l-1}^{l}\left({\frac {2r}{na}}\right)}}*

רדיוס בוהר: *a
=

ħ

2

k
m

e

2

=
0.529⋅10

−10

m

{\displaystyle a={\frac {\hbar ^{2}}{kme^{2}}}=0.529\cdot 10^{-10}m}*

*L

p
−
p

(
x
)
=
(
−
1

)

p

(

d
d
x

)

p

L
q
(
x
)

{\displaystyle L_{p-p}^{p}(x)=(-1)^{p}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{p}L_{q}(x)}*

*L
q
(
x
)
=

e

x

(

d
d
x

)

q

(

e

−
x

x

q

)

{\displaystyle L_{q}(x)=e^{x}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{q}\left(e^{-x}x^{q}\right)}*

*R

10

=
2

a

−

3
2

exp
⁡
(
−

r
a

)

{\displaystyle R_{10}=2a^{-{\frac {3}{2}}}\exp \left(-{\frac {r}{a}}\right)}*

*R

20

=

1

√
2

a

−

3
2

(
1
−

1
2
a

r

)
exp
⁡
(
−

r
2
a

)

{\displaystyle R_{20}={\frac {1}{\sqrt {2}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{2a}}r\right)\exp \left(-{\frac {r}{2a}}\right)}*

*R

21

=

1

√
24

a

−

3
2

r
a

exp
⁡
(
−

r
2
a

)

{\displaystyle R_{21}={\frac {1}{\sqrt {24}}}a^{-{\frac {3}{2}}}{\frac {r}{a}}\exp \left(-{\frac {r}{2a}}\right)}*

*R

30

=

2

√
27

a

−

3
2

(
1
−

2
r
3
a

+

2
27

(

r
a

)

2

)
exp
⁡
(
−

r
3
a

)

{\displaystyle R_{30}={\frac {2}{\sqrt {27}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {2r}{3a}}+{\frac {2}{27}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}*

*R

31

=

8

27

√
6

a

−

3
2

(
1
−

1
6
a

r

)
(

r
a

)
exp
⁡
(
−

r
3
a

)

{\displaystyle R_{31}={\frac {8}{27{\sqrt {6}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{6a}}r\right)\left({\frac {r}{a}}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}*

*R

32

=

4

81

√
30

a

−

3
2

(

r
a

)
exp
⁡
(
−

r
3
a

)

{\displaystyle R_{32}={\frac {4}{81{\sqrt {30}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left({\frac {r}{a}}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}*

*R

40

=

1
4

a

−

3
2

(
1
−

3
r
4
a

+

1
8

(

r
a

)

2

−

1
192

(

r
a

)

3

)
exp
⁡
(
−

r
4
a

)

{\displaystyle R_{40}={\frac {1}{4}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {3r}{4a}}+{\frac {1}{8}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}-{\frac {1}{192}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{3}\right)\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}*

*R

41

=

√
5

16

√
3

a

−

3
2

(
1
−

1
4
a

r

+

1
80

(

r
a

)

2

)

r
a

exp
⁡
(
−

r
4
a

)

{\displaystyle R_{41}={\frac {\sqrt {5}}{16{\sqrt {3}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{4a}}r+{\frac {1}{80}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\right){\frac {r}{a}}\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}*

*R

42

=

1

64

√
5

a

−

3
2

(
1
−

1
12
a

r

)
(

r
a

)

2

exp
⁡
(
−

r
4
a

)

{\displaystyle R_{42}={\frac {1}{64{\sqrt {5}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{12a}}r\right)\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}*

*R

43

=

1

768

√
35

a

−

3
2

(

r
a

)

3

exp
⁡
(
−

r
4
a

)

{\displaystyle R_{43}={\frac {1}{768{\sqrt {35}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{3}\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}*

פתרון כללי:

*ψ

n
l
m

(
r
,
θ
,
ϕ
)
=

R

n
l

(
r
)

Y

l

m

(
θ
,
ϕ
)

{\displaystyle \psi _{nlm}(r,\theta ,\phi)=R_{nl}(r)Y_{l}^{m}(\theta ,\phi)}*

n ו-*l* שלמים, *n*=1,2,3... ו-*l* ≤ *n* - 1

m שלם ומקיים: *-l ≤ m ≤ l*

אורתוגונליות:

*∫

ψ

n
l
m

*

ψ

n
′
l
′
m
′

r

2

sin
⁡
θ
d
r
d
θ
d
ϕ
=

δ

n
n
′

δ

l
l
′

δ

m
m
′

{\displaystyle \int \psi _{nlm}^{*}\psi _{n'l'm'}r^{2}\sin \theta drd\theta d\phi =\delta _{nn'}\delta _{ll'}\delta _{mm'}}*

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק *r* מהגרעין):

*P

n
l

(
r
)
=

|

R

n
l

|

2

r

2

{\displaystyle P_{nl}(r)=|R_{nl}|^{2}r^{2}}*

התנע הזוויתי:

*L
¯

=

r
¯

×

p
¯

=
(

L

x

,

L

y

,

L

z

)

{\displaystyle {\vec {L}}={\vec {r}}\times {\vec {p}}=(L_{x},L_{y},L_{z})}*

*L
¯

2

Y

l

m

=
l
(
l
+
1
)
ħ

2

Y

l

m

{\displaystyle {\vec {L}}^{2}Y_{l}^{m}=l(l+1)\hbar ^{2}Y_{l}^{m}}*

*|

L
|

=

√
l
(
l
+
1
)
ħ

{\displaystyle |L|={\sqrt {l(l+1)}}\hbar }*

אופרטורים הרמיטיים GOOL

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי.

כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה: *(
Â
Ψ
)
∗
=
Ψ
∗
Â

{\displaystyle ({\hat {A}}\Psi)^{*}=\Psi ^{*}{\hat {A}}}* בכל הפונקציות במרחב,

או *∫

−
∞

∞

Ψ

1

*

Â
Ψ

2

d

x

=

∫

−
∞

∞

(
Â
Ψ

1

)
∗

Ψ

2

d

x

{\displaystyle \int _{-\infty }^{\infty }\Psi _{1}^{*}{\hat {A}}\Psi _{2}\,dx=\int _{-\infty }^{\infty }({\hat {A}}\Psi _{1})^{*}\Psi _{2}\,dx}*

תכונות של אופרטור הרמיטי:

- ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.
- הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמטי הן אורתוגונליות.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל GOOL

אם *φ_n* ו-*λ_n* הן הפייע ועייע של האופרטור *Â* אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

*Ψ
(
x
,
t
)
=

∑

α

n

φ

n

{\displaystyle \Psi (x,t)=\sum \alpha _{n}\phi _{n}}*

|α_n|² זה ההסתברות להיות במצב *φ_n* או ההסתברות למדוד את הערך *λ_n*. הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

*α

n

=

∫

−
∞

∞

φ

n

*

Ψ
(
x
,
t
)
d

x

{\displaystyle \alpha _{n}=\int _{-\infty }^{\infty }\phi _{n}^{*}\Psi (x,t)\,dx}*

במקרה הרצוי:

*|

α

n

|

2

→

|

α
(
k
,
t
)

|

2

d

k

;

λ

n

→
λ
(
k
)
;

φ

n

→
ϕ
(
k
)

{\displaystyle |\alpha _{n}|^{2}\rightarrow |\alpha (k,t)|^{2}dk;\lambda _{n}\rightarrow \lambda (k);\phi _{n}\rightarrow \phi (k)}*

*Ψ
(
x
,
t
)
=

∫

−
∞

∞

α
(
k
,
t
)
ϕ
(
k
)
d

k

{\displaystyle \Psi (x,t)=\int _{-\infty }^{\infty }\alpha (k,t)\phi (k)\,dk}*

*α
(
k
,
t
)
=

∫

−
∞

∞

ϕ
(
k
)
Ψ
(
x
,
t
)
d

x

{\displaystyle \alpha (k,t)=\int _{-\infty }^{\infty }\phi (k)\Psi (x,t)\,dx}*

יחס החילוף GOOL

*[
Â
,
B
¯
]
=
Â
B
¯
−
B
¯
Â

{\displaystyle [{\hat {A}},{\bar {B}}]={\hat {A}}{\bar {B}}-{\bar {B}}{\hat {A}}}*

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.

אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).

יחס החילוף של המיקום עם התנע: *⟨
[
x
¯
,

p

x
¯
]
⟩
=
i
ħ

{\displaystyle \langle [\,{\bar {x}},{\bar {p}}_{x}]\rangle =i\hbar }*

אם"ם האופרטורים *Â* ו-*B̃* מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.

אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.

אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות

*Δ
A
Δ
B
≥

1
2

|
⟨
[
Â
,
B
¯
]
⟩
|

{\displaystyle \Delta A\Delta B\geq {\frac {1}{2}}|\langle [{\hat {A}},{\bar {B}}]\rangle |}*

ביניהם לפי:

משפט ארנפס GOOL

*d
d
t

⟨
Q
⟩
=

i
ħ

⟨
[
H
¯
,
Q
]
⟩
+

∂
Q
¯

∂
t

{\displaystyle {\frac {d}{dt}}\langle Q\rangle ={\frac {i}{\hbar }}\langle [{\bar {H}},Q]\rangle +\left\langle {\frac {\partial Q}{\partial t}}\right\rangle }*

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: GOOL

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-*r*:

ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקציית הגל:

*Ψ
(
r
,
θ
,
ϕ
)
=
R
(
r
)
θ
(
θ
)
ϕ
(
ϕ
)

{\displaystyle \Psi (r,\theta ,\phi)=R(r)\theta (\theta)\phi (\phi)}*

המשוואה ל-*θ(θ)*:

*1
θ
(
θ
)

sin
⁡
θ

∂

∂
θ

(
sin
⁡
θ

∂
θ
(
θ
)

∂
θ

)
+
l
(
l
+
1
)

sin

2

⁡
θ
=

m

2

{\displaystyle {\frac {1}{\theta (\theta)}}\sin \theta {\frac {\partial }{\partial \theta }}\left(\sin \theta {\frac {\partial \theta (\theta)}{\partial \theta }}\right)+l(l+1)\sin ^{2}\theta =m^{2}}*

משוואה ל-*φ(φ)*:

- כתיב נוסף:

$$\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} \psi_2 \rangle$$

$$\langle \hat{Q} \psi | = (\hat{Q} | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | \hat{Q}^\dagger$$

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה משוחלפת:}$$

צמד הרמיטי:

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$

מטריצת יחידה:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

$$C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in} \quad \text{כפל מטריצות:}$$

$$AB \neq BA$$

כפל מטריצות הוא לא חילופי:

$$[A, B] = AB - BA$$

יחס חילוף בין מטריצות:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

מטריצה ההופכית:

$$U^\dagger = U^{-1}$$

מטריצה אוניטרית:

זהויות:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger; \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A; \quad (\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$$

$$(AB)^T = B^T A^T; \quad \langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

- הגודל של ע"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.

אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים

$$[A, A^\dagger] = 0. \quad \text{נורמלים, כלומר:}$$

אופרטור העלאה והורדה באוסילטור הרמוני:

אופרטור ההורדה (או השמדה):

$$\hat{a} |\psi_n\rangle = \sqrt{n} |\psi_{n-1}\rangle; \quad \hat{a} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p}\right)$$

אופרטור ההעלאה (או יצירה):

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p}\right)$$

$$\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\psi_{n+1}\rangle$$

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(\hat{a} \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1; \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n \left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x\right]$$

$$H_0(y) = 1; \quad H_2(y) = -2(1 - 2y^2)$$

$$H_1(y) = 2y; \quad H_3(y) = -12\left(y - \frac{2}{3}y^3\right)$$

תנ"ז מסילתי והספין:

$$\hat{L}_z = (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{התנ"ז בקואורדינטות כדוריות:}$$

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar \hat{L}_z$$

$$\hat{L}_- \hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar \hat{L}_z$$

יחסי החילוף של התנ"ז המסילתי:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z; \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y; \quad [\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm; \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$$

$$L_\pm Y_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_l^{m \pm 1}$$

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{מטריצות התנ"ז עבור } l = 1:$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ספין - אותם יחסי חילוף כמו התנ"ז:

$$\hat{S}_z f = \hbar m_s f$$

$$\hat{S}^2 f = \hbar^2 S(S+1) f$$

$$-S \leq m_s \leq S \quad \text{קפיצות של 1}$$

m_s, S יכולים להיות חצי שלמים.

S קבוע ותלוי רק בסוג החלקיק. פרמיונים - חצי שלם, בוזונים - ספין שלם.

$$S = \frac{1}{2} \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \quad \text{ספין חצי:}$$

$$|x_+\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \equiv |\uparrow\rangle; \quad |x_-\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv |\downarrow\rangle$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$$

$$|x\rangle = \alpha |x_+\rangle + \beta |x_-\rangle \quad \text{פונקציית ספין כללית:}$$

המילטוניו פריק:

$$\hat{H}(\hat{X}, \hat{P}, \hat{S}) = \hat{H}_0(\hat{X}, \hat{P}) + \hat{H}_S(\hat{S})$$

במקרה זה ניתן לפתור את משוואת שרדינגר לספין ולמרחב בנפרד.

נקיפת לרמור:

ערך התוחלת של S עבור ספין חצי בשדה מגנטי עושה

$$\omega = \gamma B_0 \quad \text{(פרסציה) מסביב לשדה בתדירות}$$

$$\gamma = g \frac{-e}{2m_e} \quad \text{בזווית } \alpha \text{ ביחס לשדה כאשר}$$

$$g \text{ הוא היחס הגיירו מגנטי. } \alpha \text{ נקבעת מתנאי התחלה.}$$

פונקציית הגל:

$$\chi(t) = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{\gamma B_0 t}{2}}, \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{\gamma B_0 t}{2}} \right)$$

חיבור תנ"ז:

$$|S_1 - S_2| \leq S < S_1 + S_2 \quad \text{חיבור שני ספינים:}$$

S הוא של כל המערכת והוא לא קבוע בניגוד לחלקיק בודד.

$$-S \leq m_s \leq S$$

$|S, m_s\rangle$ עבור שני חלקיקים עם ספין חצי:

$$|1, -1\rangle \rightarrow |\downarrow\downarrow\rangle$$

מצבי טריפלט:

$$|1, 1\rangle \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle; \quad |1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|0, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \text{מצב סינגלט:}$$

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

תנ"ז כולל:

אותם יחסי חילוף כמו של התנ"ז המסילתי והספין.

$$\hat{J}_z f = \hbar m_j f; \quad \hat{J}^2 f = \hbar^2 j(j+1) f$$

$$m_j = m_l + m_s; \quad |l - S| \leq j \leq l + S$$

אינטראקציית ספין מסלול:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e^2 \cdot \vec{S} \cdot \vec{L}}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2 r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{m_e c^2 r^3} \vec{L}$$

הע"ע של $\hat{S} \cdot \hat{L}$:

$$\frac{1}{2} \hbar^2 (j(j+1) - S(S+1) - l(l+1))$$