

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.
בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים).

התמרת (טרנספורם) פורייה:

$$f(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

התמרה הפוכה:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dx$$

תכונות:

$$FT[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha FT[f(x)] + \beta FT[g(x)]$$

אם $f(x) \in G$ אז $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \neq \infty$
אם $f(x) \in G$ אז $F(k) \in G$ רציפה.

אם $f(x) \in G$ אז $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} F(k) = 0$ רימן-לבג
אם $f(x)$ זוגית אז $F(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$

אם $f(x)$ אי-זוגית אז:
 $F(k) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$

אם $f(x)$ ממשיית אז $\overline{F(k)} = F(-k)$
התמרות של פונקציות מיוחדות:

גאוסיאן:

$$FT[Ae^{-ax^2}] = \frac{Ae^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi a}}$$

אקספוננט:

$$FT[Ae^{-a|x|}] = \frac{aA}{\pi(a^2 + k^2)}$$

לורנציאן:

$$FT\left[\frac{a}{a^2 + x^2}\right] = \frac{1}{2} e^{-a|k|}$$

פונקציית דלתא:

$$FT[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}$$

קבוע:

$$FT[1] = \delta(k)$$

נוסחת הכפל באקספוננט, קוסינוס או סינוס (מודולציה):
 $FT[f(x)e^{iCx}] = F(k - C)$

$FT[f(x) \cos(Cx)] = \frac{F(k - C) + F(k + C)}{2}$

$FT[f(x) \sin(Cx)] = \frac{F(k - C) - F(k + C)}{2i}$

נוסחת הכינון והזזת:

$$FT[f(ax + b)] = \frac{1}{|a|} e^{i\frac{kb}{a}} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

נוסחת הנגזרת: אם $f(x) \in G$, $f'(x) \in G$ ו- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ אז:

$FT[f'(x)] = ikF(k)$

נוסחת המומנט: אם $f(x) \in G$ אז $xf(x) \in G$ ו- $FT[xf(x)] = i \frac{d}{dk} F(k)$

מבוא לגלים

גלים רוחביים: ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות (מיתר)
גלים אורכיים: ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות (קול)

תווך: החומר בו מתקדמת ההפרעה
פונקציית הגל: $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.

אנרגיה של גל: $A, E \propto A^2$ היא האמפליטודה (משרעת)

משוואת הגלים במימד אחד:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.

התאבכות: סכימה של גלים שנפגשים
חזית גל: אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן

גלים מחזוריים:

$$\lambda = v \cdot T$$

גל - אורך הגל: T - זמן המחזור; v - מהירות הגל

תדירות (מספר המחזורים בשנייה):

$$f = \frac{1}{T}$$

גל הרמוני:

$$y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi)$$

מספר הגל:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

קשרים בין הגדלים השונים:

$$\omega = vk = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

גל עומד: מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים

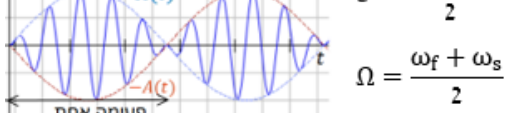
$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \phi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \phi))$

נקודות צומת (node): נקודות שלא זזות. אין מהירות גל.

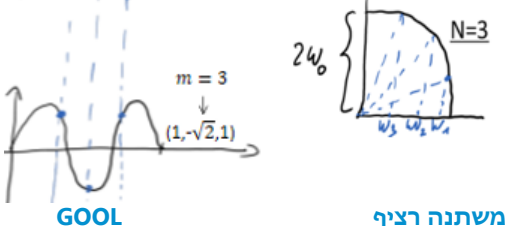
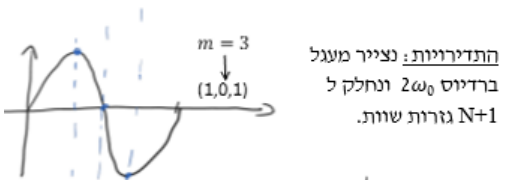
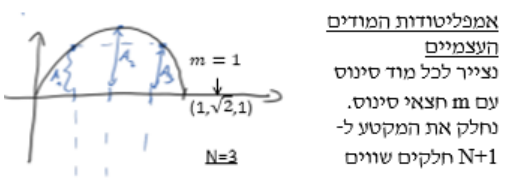
נקודת טבור (antinode): אמפליטודה מקסימאלית.

פעילות: בפעילות אנחנו מחברים שני גלים בעלי אותה אמפליטודה ומקבלים גל בתוך מעטפת (פעילה).

$\Psi_1(t) = A \cos(\omega_1 t)$ & $\Psi_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$
 $\Psi_T(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = 2A \cos(\epsilon t) \cos(\Omega t)$



תדירות הפעימה היא 2ϵ



משנתה רציף

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2}$$

z - מיקום המסה; Ψ - העתק משיווי משקל
 $\rho = \frac{m}{\Delta z}$ - צפיפות המסה של המערכת, כאשר Δz הוא המרווח בין שתי מסות בשיווי משקל (הולך לאפס)
 $E = k\Delta z$ - מודול האלסטיות.

אנליזה פורייה

$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right]$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ- L אבל לא גדול ממנו).

הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2 .

$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$

$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$

$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$

$\int_0^L f(x) g(x) dx$

מכפלה פנימית:

פונקציות אורתוגונליות:

$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = 0$

$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$

$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$

$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$

$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$

$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$

טור אקספוננטים:

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi n}{L} x}$

$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$, $C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L} x} dx$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים:

$A_n = C_n + C_{-n}$; $B_n = i(C_n - C_{-n})$; $\frac{A_0}{2} = C_0$

$C_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n)$; $C_{-n} = \frac{1}{2}(B_n + iA_n)$

תופעת גיבס:

קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו

מערכת של שתי מסות

משוואות התנועה:

$$-k_1 x_L - k_2 (x_L - x_R) = m \ddot{x}_L$$

x_L ו- x_R מיקומי המסה השמאלית/ימנית בהתאמה

$-k_1 x_R - k_2 (x_R - x_L) = m \ddot{x}_R$

החלפת משתנים:

$$x_s = x_L + x_R; x_f = x_L - x_R$$

פתרון (מודים עצמיים):

$$x_s(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$$

$x_f(t) = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)$

כאשר -

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad \omega_f = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

פעילות:

עבור:

$$x_L(0) = \dot{x}_L(0) = \dot{x}_R(0) = 0; x_R(0) = R$$

מקבלים:

$$x_L(t) = A \sin(\epsilon t) \sin(\Omega t)$$

$x_R(t) = A \cos(\epsilon t) \cos(\Omega t)$

$\epsilon = \frac{\omega_f - \omega_s}{2}$

$\Omega = \frac{\omega_f + \omega_s}{2}$

תדירות הפעימה: 2ϵ

כוח מרסן ומאלץ:

המשוואות והפתרונות עבור x_s ו- x_f הן אלו של תנועה הרמונית מרוסנת ומאלצת

במקרה $\omega \ll 2\omega$ $\Gamma \ll 2\omega$ הכוח המאלץ, Γ מקדם הכוח המרסן

אם $\omega \approx \omega_s$ אז $A_f \gg A_s$ ו- $x_L \approx x_R$ כלומר רק המוד (1,1) מתעורר

אם $\omega \approx \omega_f$ אז $A_s \gg A_f$ ו- $x_L \approx -x_R$ כלומר רק המוד (1,-1) מתעורר.

מערכת של שלוש מסות

המשוואות:

$$-k x_1 - k(x_1 - x_2) = m \ddot{x}_1$$

$-k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) = m \ddot{x}_2$

$-k x_3 - k(x_3 - x_2) = m \ddot{x}_3$

פתרון (לאחר אלגברה עם מטריצה):

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_m t + \phi_m) +$

$+ A_f \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_f t + \phi_f) + A_s \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_s t + \phi_s)$

כאשר -

$$\omega_s = \sqrt{k/m}; \omega_f = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \omega_0; \omega_m = \sqrt{2} \omega_0$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \sqrt{2 - \sqrt{2}} \omega_0$

מערכת N מסות

המשוואות:

$$-k(x_n - x_{n-1}) - k(x_n - x_{n+1}) = m \ddot{x}_n$$

$\dots$

$x_n(t) = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) e^{i\omega t} =$

$= C_1 \cos(n\theta) \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin(n\theta) \cos(\omega t + \phi_2)$

כאשר $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_0^2} \right)$ ו- ω נקבע מתנאי השפה

בתנאי שפה קבועים (קירות): $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$

$x_n(t) = \sum_{m=1}^N C_m \sin\left(\frac{n\pi m}{N+1}\right) \cos(\omega_m t + \phi_m)$

$\theta_m = \frac{\pi m}{N+1}$; $\omega_m = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{2(N+1)}\right)$

כלומר יש N מודים עצמיים (בתדירויות ω_m) ו- x_n הם קומבינציות לינאריות של המודים האלו. המקדמים C_m ו- ϕ_m נקבעים מתנאי ההתחלה של כל ה- x_n

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

T – המתוחות במיתר, ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך, ψ – פונקציית הגל, ההעתק הרוחבי של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

פתרון המשוואה:

$$\psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$$

- אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזוויות סריגונומטריות)

$$\psi(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t = C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2)$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים:

$$\psi(x,t) = A_1 e^{i(kx + \omega t)} + A_2 e^{i(kx - \omega t)} + A_3 e^{-i(kx + \omega t)} + A_4 e^{-i(kx - \omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_4 = A_3^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)}$$

יחס הדיספרסיה:

$$\omega = v \cdot k$$

פתרון באמצעות נוסחת ד'אלמבר:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2} [\psi(x - vt, 0) + \psi(x + vt, 0)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x', 0) dx'$$

החזרה והעברה

תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב- $x=0$:

- רציפות הפונקציה: $\psi_L(0,t) = \psi_R(0,t)$
 - רציפות הכוח: $F_L = F_R$
- אם המתוחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הגזרות:

$$\frac{\partial \psi_L}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi_R}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$\psi_L(x,t) = \psi_r(x,t) + \psi(x,t); \quad \psi_R(x,t) = \psi_t(x,t)$$

$$\psi_r(x,t) = r\psi(-x,t)$$

$$\psi_t(x,t) = t\psi\left(\frac{v_1}{v_2}x,t\right); \quad v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$$

מקדם החזרה:

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}$$

מקדם העברה:

$$t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

הערה: את הנוסחאות של מקדם ההעברה וההחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.

עכבה

עכבה (impedance):

$$Z = \sqrt{\rho T} = \frac{T}{v}$$

T – מתוחות. V – מהירות הגל

$$|Z| = \frac{|F_y|}{|V_y(t)|}$$

F_y – הכוח על אלמנט מסה

$$V_y(t) = -\dot{\psi}_y(t)$$

מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)

מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2:

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

תאום עכבות: $r = 0 \iff z_1 = z_2$

אנרגיה הספק ותנע

אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר:

$$\varepsilon(x,t) = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \rho v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2$$

אנרגיה ממוצעת בזמן:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 |A|^2$$

הספק רגעי בנקודה, כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני ביחידת זמן:

$$P^\pm = \pm Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \pm v \varepsilon(x,t)$$

$P^\pm$ הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי

ההספק הממוצע בזמן:

$$\bar{P}^\pm = \pm \frac{1}{2} Z \omega^2 |A|^2$$

מקדם החזרה של האנרגיה:

$$R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = r^2 = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2$$

מקדם העברה של האנרגיה:

$$T = \frac{P_2^+}{P_1^+} = \frac{z_2}{z_1} t^2 = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$$

$$R + T = 1$$

תנע: התנע הוא אפס.

גלים עומדים

מיתר חצי אינסופי:

קצה קשור:

$$\psi(x=0,t) = 0 \Rightarrow \psi(x,t) = C \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi)$$

קצה חופשי:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \psi(x,t) = C \cos(kx) \cos(\omega t + \varphi)$$

מיתר סופי:

2 קצוות קשורים:

$$\psi(x=0,t) = \psi(x=L,t) = 0$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}; \quad k_n = \frac{\pi n}{L}; \quad n = 0,1,2,3 \dots; \quad f_n = \frac{vn}{2L}$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

קצה קשור וקצה חופשי:

$$\psi(x=0,t) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$$

$$k_n = \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right); \quad n = 0,1,2,3 \dots$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{(n+\frac{1}{2})}; \quad f_n = \frac{v}{2L} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}; \quad f_n = \frac{vn}{2L}; \quad k_n = \frac{\pi n}{L}; \quad n = 0,1,2,3 \dots$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

קווי תמסורת ללא הפסדים

קשרים בין מתח וזרם:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}; \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

משוואת הגלים:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

L_0 ו- C_0 קיבול והשראות ליח' אורך

עכבה (יכולה להיות תלויה במיקום):

$$Z = \frac{V}{I}$$

עכבה אופיינית:

$$\frac{V^+(x,t)}{I^+(x,t)} = -\frac{V^-(x,t)}{I^-(x,t)} = Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

לא תלויה במיקום (בדרכ"כ כשנתונה העכבה הכוונה לעכבה אופיינית).

החזרה והעברה (בהנחה שאין גל חוזר בעומס):

$$V^-(x_0,t) = -rV^+(x_0,t); \quad I^-(x_0,t) = rI^+(x_0,t)$$

$$V_L^+(x_0,t) = tV^+(x_0,t); \quad I_L^+(x_0,t) = tI^+(x_0,t)$$

$$t = \frac{2Z_0}{Z_L + Z_0}; \quad r = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}$$

אם יש קצר בקצה אז $Z_L = 0$, נקבל גל עומד.

גלי קול בצינור

גל אורכי: תנועת המולקולות בכיוון ההתקדמות הגל $\psi(x,t)$ – פונקציית ההעתק של מולקולות הגז משיווי משקל. x מציינ את מיקום המולקולות בשיווי משקל ולא את המיקום שלהן כתלות בזמן.

$\psi_p(x,t)$ – פונקציית הלחץ העודף access pressure.

$\Delta p(x,t)$ – פונקציית השינוי בצפיפות.

נק' צומת בפונקציית ההעתק היא נק' טבור בפונקציות הצפיפות והלחץ ולהפך.

גז אידיאלי בתהליך אדיאבטי:

$$PV^\gamma = const$$

P – לחץ. V – נפח. γ – קבוע הקשור לסוג הגז.

קשר בין פונקציית ההעתק לפונקציית הלחץ:

P_p (הלחץ בשיווי משקל)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma P_0} \psi_p$$

מקדם האלסטיות של הגז:

$$B_a = \gamma P_0$$

משוואת הגלים:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

אותה המשוואה מתקיימת גם עבור ψ_p ו- Δp

מהירות הגלים (מהירות הקול, לפעמים כתובה באות c):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

באוויר בתנאים סטנדרטיים:

$$v \approx 340 \text{ m/s}$$

קשר בין הצפיפות לפונקציית ההעתק:

$$\Delta \rho = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

עכבה של גל קול מישורי ליחידת שטח:

$$\frac{Z}{A} = \rho_0 v$$

ρ_0 – צפיפות המסה בשיווי משקל. A – שטח החתך של הצינור. v – מהירות הקול בחומר.

האנרגיה הכוללת ליחידת אורך:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2} A \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] = A \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2$$

השוויון האחרון הוא עבור גלים נעים בלבד.

אנרגיה פוטנציאלית וקינטית ממוצעת בזמן ליחידת אורך:

$$\bar{U}_{dx} = \bar{E}_{k_{dx}} = \frac{1}{4} \rho_0 A \omega^2 \psi_{max}^2$$

אנרגיה כוללת ממוצעת בזמן ליחידת אורך:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho_0 A \omega^2 \psi_{max}^2$$

ψ_{max} – האמפליטודה של פונקציית ההעתק – קבוע.

ω – התדירות הזוויתית.

הספק של גל קול נע (כמה אנרגיה עוברת דרך שטח חתך ביחידת זמן) בכיוון החיובי/שלילי:

(לא לבלבל עם P של לחץ)

$$P(x,t) = \pm v \varepsilon(x,t)$$

עוצמה של הגל (ההספק ליחידת שטח):

$$I(x,t) = \frac{|P(x,t)|}{A} = v \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2$$

עוצמה ממוצעת בזמן:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} v \rho_0 \omega^2 \psi_{max}^2$$

מדידת עוצמה בסולם לוגריתמי:

$I_a = I_0 \cdot 10^a$

a – היא העוצמה ב B (בל) . $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$

$1B = 10 \text{ dB}$ (זה דציבל)

עוצמה בגל כדורי:

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

תנאי שפה בצינור:

– קצה סגור $\psi = 0$ (כמו קצה קשור במיתר)

– קצה פתוח $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi_p = 0$ (כמו קצה חופשי במיתר)

ערך RMS של פונקציית סינוס/קוסינוס הוא הערך המקסימלי חלקי $\sqrt{2}$

מטריצת מומנט ההתמד:

$$L_{ij} = \sum_j I_{ij} \omega_j$$

$$I_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} + i \cdot j)$$

כאשר i, j, k מקבלים את הערכים x, y, z

יחס נפיצה(דיספרסיה) ומהירות החבורה

ייצוג פונקציית הגל באמצעות פורייה:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dx$$

כאשר-

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0) e^{-ikx} dx$$

מהירות הפאזה:

$$v_\varphi(k) = \frac{\omega}{k}$$

מהירות החבורה:

$$v_g(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

רוחב כתלות בזמן של גאוסיאן:

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma^4 + 4\beta^2 t^2}{\sigma^2}$$

כאשר σ היא הרוחב ההתחלתי ו-

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0}$$

אם מספר הגל יוצא מורכב עבור תדירויות מסוימות, נקבל **גל דוֹפֵּר**. קבוע הדעיכה הוא החלק המדומה של מספר הגל.

במערכת הקוונטים: פונקציית גל מתארת הסתברות למצוא חלקיק במיקום מסוים.

– **משוואת שרדינגר:**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

– **התנע של חלקיק:**

$$p = \hbar k$$

גלי מים:

– **יחס הדיספרסיה הכללי עבור גלים בנוזל הוא:**

$$\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \tan h(kH)$$

σ – קבוע מתח הפנים, כוח ליחידת אורך או אנרגיה ליחידת שטח, H – עומק הנוזל, g – תאוצת הכובד

ρ – צפיפות המסה ליחידת נפח

– **גלים קצרים (גלי מתח פנים):**

$$\lambda \ll \lambda_c \sim 2cm$$

$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$

– **עבור גלים ארוכים (גלי כבידה) אבל קצרים מעומק המים (או הנוזל):**

$$\omega = \sqrt{gk}, \quad H \gg \lambda \gg \lambda_c$$

– **עבור גלים ארוכים וגדולים מעומק המים (או הנוזל):**

$$\omega = \sqrt{gHk}, \quad \lambda \gg H \gg \lambda_c$$

גלים דו מימדיים

משוואת הגלים במיתר:

$$\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

T – מתוחות ליחידת אורך. ρ – צפיפות מסה ליחידת שטח.

פתרון:

$$z(x,y,t) = A e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}, \quad \vec{k} = (k_x, k_y)$$

$\vec{k}$ בכיוון התקדמות הגל וזוויתות הגל מאונכות לו.

אורך הגל:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

יחס הנפיצה:

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho} (k_x^2 + k_y^2) = v^2 \cdot |\vec{k}|^2$$

תנאי שפה מלבנים עבור שפה קשורה:

$$z(x,y,t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi m}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L_y} y\right) \cos(\omega_{m,n} t + \varphi_{m,n})$$

משוואת הגלים האלקטרומגנטיים

משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:

מעבר של יותר מתווך אחד: נציב את תנאי השפה עבור כל נקודת מעבר.

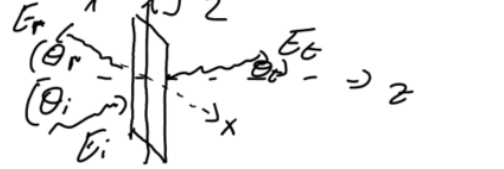
מבוא לאופטיקה

חוק סנל:
 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
כאשר n הם מקדמי השבירה של התווך ו- θ הן הזוויות בין הקרן שפוגעת/מוחזרת לבין האנך למשטח.

$B_{2\perp} = B_{1\perp}$; $D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free}$
 $H_{2\parallel} - H_{1\parallel} = k_{free}$; $E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$
 σ_{free} - צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה.
 k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה.
בפגיעה ישירה (או פגיעה בניצב) יש לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.

בתווך דיאלקטרי:
 $\sigma_{free} = k_{free} = 0$
הקשר בין האמפליטודות:
 $\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$; $\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$
השוויון השני נכון רק אם: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים). לא לבלבל בין n ל- η .
מקדם העברה: $\tau = \frac{E_t}{E_0}$. מקדם החזרה: $\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$
בפגיעה ישירה בתווך דיאלקטרי:
פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי:
GOOL

מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים ו- $\theta_i = \theta_r$
חוק סנל:
 $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t}$
אם $n_i > n_t$ אז קיימת זווית קריטית.
אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר (תהיה החזרה מלאה): $\theta_c = \text{shiftsin}(\frac{n_t}{n_i})$
משוואות פרנל עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך למישור הפגיעה):

$$\Gamma^\perp = \frac{E_{r0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$
$$\tau^\perp = \frac{E_{t0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$
$$1 + \Gamma^\perp = \tau^\perp$$

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל למישור הפגיעה):

$$\Gamma^\parallel = \frac{E_{r0}^\parallel}{E_{i0}^\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$
$$\tau^\parallel = \frac{E_{t0}^\parallel}{E_{i0}^\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$1 + \Gamma^\parallel = \tau^\parallel$
זווית ברוסטר הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).
זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:

$$\sin^2 \theta_B^\parallel = \frac{1 - \frac{\mu_t \varepsilon_i}{\mu_i \varepsilon_t}}{1 - \left(\varepsilon_t / \varepsilon_i\right)^2}$$

אם $\mu_2 \approx \mu_1$ אז: $\tan \theta_B^\parallel = \frac{n_t}{n_i}$; $\sin \theta_B^\parallel = \frac{1}{1 + \varepsilon_t / \varepsilon_i}$

- בקיטוב אנכי (מאוד נדיר בטבע):

$$\sin^2 \theta_B^\perp = \frac{1 - \frac{\mu_i \varepsilon_t}{\mu_t \varepsilon_i}}{1 - \left(\mu_i / \mu_t\right)^2}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$; $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$; $\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$
משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:

$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$; $(u = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}})$
בריק:
 $u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.
- המשוואה זהה לשדה המגנטי.
אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר):
 $n = \frac{c}{u} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$
- תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק).
פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

מעבר לייצוג קופלקסי:
 $\cos(kx - \omega t) = \text{Re}[e^{i(kx - \omega t)}]$
- כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב- $t = 0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.
יחס הדיספרסיה: $\omega = uk$
אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:
 $u_{ph} = \frac{\omega}{k}, u_g = \frac{d\omega}{dk}$
גל אלקטרומגנטי מישורי:
GOOL
הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

כאשר $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$
וקטור הגל:
- הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.

יחס הדיספרסיה בגל: $\omega = u|k| = u \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$
- כיוון $\vec{k}$ בכיוון התקדמות הגל, בגל מישורי תמיד $\vec{E} \perp \vec{k}$.
- כיוון $\vec{E}$ (מסומן בדו"כ ב- $\hat{h}$) נקרא כיוון הקיטוב של הגל.
- כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל.
- התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי (אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B} = \frac{1}{u} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

העכבה של התווך:
 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$
בריק:
 $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi$
 $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}$; $\vec{E} = -\eta \hat{k} \times \vec{H}$
וקטור פוינטינג (כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן):
 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.
- הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).
- ממוצע הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא העוצמה של הגל):

$$\vec{S}_{Avg} = \langle \vec{S} \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{E} \times \vec{H}^*}{2} \right\}$$

$\vec{E}$ ו- $\vec{H}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.

המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$, $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$
GOOL
קיטוב מעגלי ואליפטי:
הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב: מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב לינארי: כיוון השדה קבוע.
קיטוב מעגלי ימני: רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב- 90° (הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\varphi = \frac{\pi}{2}$)
- השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר z -.
קיטוב מעגלי שמאלי: רכיב y מקדים את רכיב x ב- 90° .
($\varphi = -\frac{\pi}{2}$)
- השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר z -.)

קיטוב אליפטי: מתקבל כאשר הפרש הפאזה שונה מ- 90° או אם האמפליטודה של הרכיבים שונה.
פגיעה ישירה בתווך דיאלקטרי:
GOOL

כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר.
תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקור.
אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה: