

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה:

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

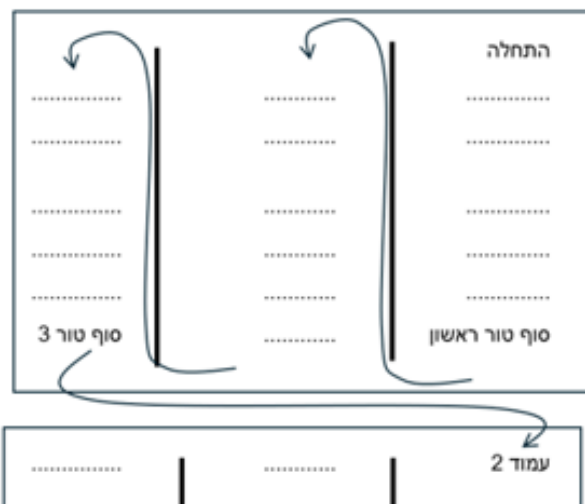
עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

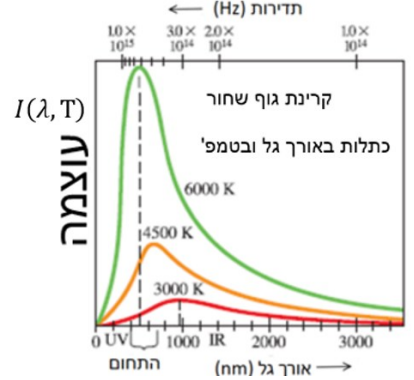
הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:

חוק בוין: $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$

λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$



קבוע בולצמן: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$

קבוע פלאנק: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

התנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום היא $E_{min} = hf$

אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי: $E = nhf$

כאשר n הוא המספר הקוונטי

התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי:

אנרגיה של פוטון יחיד (f- תדירות האור): $E = hf$

הניסוי הפוטואלקטרי:

תדירות סף (פונקציית העבודה של המתכת): $hf_0 = W_0$

אנרגיה קינטית מקסי' של האלקטרונים: $E_k = hf - W_0$

מתח עצירה: $eV_0 = E_{kmax}$

השוואה לתורה הגלית:

לפי התורה הפוטונית

1. עוצמת האור קשורה

למספר הפוטונים ולא

אנרגיה של כל אחד מהם.

הגדלת העוצמה גדילה את

מספר האלק' הנפלטים אבל

לא את האנרגיה הקינטית שלהם.

2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.

3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה

תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

אנרגיה של פוטון יחיד: $E = hf$

תנע של פוטון: $p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$

מסת מנוחה של פוטון: $m = 0$

אפקט קומפטון:

חסחת קומפטון: $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

$\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען

2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .

3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.

4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

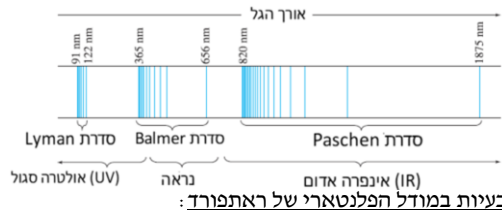
אורך גל דה ברויל של חלקיק: $\lambda = \frac{h}{p}$

$p = mv$ לא יחסותי, $p = \gamma mv$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום:

אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן: $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$

קבוע Rydberg: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$



בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:

1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.

2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד

אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

מודל האטום של בוהר:

הנחות המודל:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.

2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד

אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.

אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

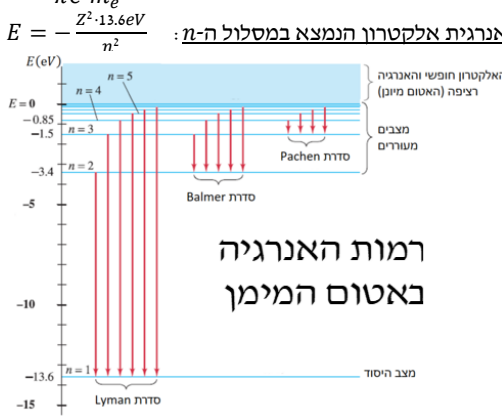
$hf = E_U - E_L$

הנחה על התנע הזוויתי (n=1,2,3...): $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$

הרדיוסים האפשריים (Z- מספר הפרוטונים): $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$

$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול n-: $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 eV}{n^2}$



אנליזת פורייה

ממות האנרגיה באטום המימן

$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right]$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).

הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2 .

$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$

$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$

$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$

$\int_0^L f(x) g(x) dx$

מכפלה פנימית:

פונקציות אורתוגונליות:

$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx = 0$

$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nn}$

$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nn}$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx$

$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx$

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$

טור אקספוננטים:

$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$, $C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} dx$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים:

$A_n = C_n + C_{-n}$; $B_n = i(C_n - C_{-n})$; $\frac{A_0}{2} = C_0$

$C_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n)$; $C_{-n} = \frac{1}{2}(B_n + iA_n)$

תופעת גיבס:

קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.

בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים).

התמרת (טרנספורם) פורייה:

$f(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$

התמרת הפוכה: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dx$

תכונות:

$FT[af(x) + \beta g(x)] = \alpha FT[f(x)] + \beta FT[g(x)]$

אם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \neq \infty$ אז $f(x) \in G$

אם $f(x) \in G$ אז $F(k) \in G$ ו- $F(k)$ רציפה.

אם $f(x) \in G$ אז $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} F(k) = 0$ רימן-לבג

אם $f(x)$ זוגית אז $F(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$

אם $f(x)$ אי-זוגית אז $F(k) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$

אם $f(x)$ ממשיה אז $\overline{F(k)} = F(-k)$

התמרות של פונקציות מיוחדות:

גאוסיאן: $FT[Ae^{-ax^2}] = \frac{Ae^{-\frac{k^2}{4a}}}{2\sqrt{\pi a}}$

אקספוננט: $FT[Ae^{-a|x|}] = \frac{aA}{\pi(a^2 + k^2)}$

לורנציאן: $FT\left[\frac{a}{a^2 + x^2}\right] = \frac{1}{2} e^{-a|k|}$

פונקציית דלתא: $FT[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}$

קבוע: $FT[1] = \delta(k)$

נוסחת הכפל באקספוננט, קוסינוס או סינוס (מודולציה):

$FT[f(x)e^{iCx}] = F(k - C)$

$FT[f(x) \cos(Cx)] = \frac{F(k - C) + F(k + C)}{2}$

$FT[f(x) \sin(Cx)] = \frac{F(k - C) - F(k + C)}{2i}$

נוסחת הכינוף והזזה: $FT[f(ax + b)] = \frac{1}{|a|} e^{i\frac{kb}{a}} F\left(\frac{k}{a}\right)$

נוסחת הנגזרת: אם $f(x) \in G$, $f'(x) \in G$ ו- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ אז $FT[f'(x)] = ikF(k)$

נוסחת המומנט: אם $xf(x) \in G$ אז $F(k) \in G$ ו- $FT[xf(x)] = i \frac{d}{dk} F(k)$

פונקציית הגל של החומר:

הסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:

$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$

נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$

כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.

מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$

המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).

שונות: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

כאשר - $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$

עקרון אי הוודאות של הייזנברג:

$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

אי ודאות מיקום תנע: $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בזמן.

2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בזמן.

אי ודאות זמן אנרגיה: $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.

$\Psi(x,t) = \sum \alpha_n \phi_n$
זה $|\alpha_n|^2$ ההסתברות להיות במצב ϕ_n או ההסתברות למדוד את הערך λ_n . הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^* \Psi(x,t) dx$
במקרה הרציף:
 $|\alpha_n|^2 \rightarrow |\alpha(k,t)|^2 dk; \lambda_n \rightarrow \lambda(k); \phi_n \rightarrow \phi(k)$

$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k,t) \phi(k) dk$
 $\alpha(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) \Psi(x,t) dx$

יחס החילוף

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.
אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).

יחס החילוף של המיקום עם התנע: $\langle [\hat{x}, \hat{p}_x] \rangle = i\hbar$
אם"ם האופרטורים $\hat{A}$ ו- $\hat{B}$ מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.
אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.
אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$
בניהם לפי:

משפט ארנפס

משפט ארנפס

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקלי קבוע בזמן.

אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: GOOL

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב- r :
ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקציית הגל:

המשוואה ל- $\theta(\theta)$:
$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

משוואה ל- $\phi(\phi)$:
$$\frac{\partial^2 \phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2 \phi(\phi)$$

פתרון ל- $\theta(\theta)$ ו- $\phi(\phi)$:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \theta(\theta) \phi(\phi) = \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m & m > 0 \\ 1 & m \leq 0 \end{cases} \quad l \geq 0$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x)$$

$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2-1)^l$

$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}}; Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (3\cos^2 \theta - 1)$

$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta; Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$

$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta e^{\pm i\phi};$

$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$

$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

$Y_3^{\pm 1} = \mp \left(\frac{21}{64\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$

$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}$

$Y_3^{\pm 3} = \mp \left(\frac{35}{64\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}$

$P_1^0 = \cos \theta; P_3^0 = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

$P_1^1 = \sin \theta; P_3^1 = \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$

$P_2^0 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$

$P_3^1 = \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$

עבור מדרגת פוטנציאל $E > U_0$ וכאשר $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$ ו- $R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$

- כאשר $E < U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.
- כאשר $E > U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

פונקציית דלתא של דיראק

הגדרות הפונקציה:

$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$ או $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ או $\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$ כאשר a הולך לאפס.

פיזור מפונקציית דלתא:

עבור $E < 0$ ו- $V(x) = -\frac{am}{\hbar^2} |x|$ נקבל $\psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2} |x|}$ ו- $E = -\frac{a^2 m^2}{2\hbar^2}$
מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב- a (גודל הבור).

אם $E > 0$: $R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$ ו- $T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1}{1+\beta^2}$, $\beta = \frac{am}{\hbar^2 k}$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

עבור: $V(x) = +a\delta(x)$ חייב להיות גודל מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

פוטנציאלים תלת מימדים

תיבה תלת מימדית בגודל $a \times b \times c$:

$\psi(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$

$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$v(x,y,z) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$

$E = \left(n_x - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_z$
ניוון: כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא מתרחש במימד אחד).
דרגת הניוון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

פונקציית הגל כתלות בזמן

$\Psi(x,t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$

כאשר $\psi_n(x)$ הן פתרונות המצבים העמידים ו- E_n היא האנרגיה של כל מצב.
 $|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x,0) dx$

- אם $\Psi(x,0)$ מנורמלת אז $\Psi(x,t)$ מנורמלת לכל t .

אופרטורים

אם $\hat{Q}\psi = \lambda\psi$ אז ψ היא פנייה ו- λ הוא עי"ע.
פנייה של אופרטור התנע: $\psi(x) = Ae^{ikx}$
העי"ע של אופרטור התנע: $\hbar k$
פנייה של אופרטור המיקום: $\psi(x) = \delta(x-a)$
ועי"ע: a (המיקום עצמו).
אופרטור ההמילטוניאן (מודר את האנרגיה):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

אופרטורים הרמיטיים

גודל פיזיקלי מדיד חייב להיות מספר ממשי.
כל הגדלים הפיזיקלי מיוצגים עי"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה: $(\hat{A}\psi)^* = \psi^* \hat{A}$ לכל הפונקציות במרחב,
או $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \psi_1)^* \psi_2 dx$

תכונות של אופרטור הרמיטי:

- ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.
- הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל

אם ϕ_n ו- λ_n הן הפנייה ועי"ע של האופרטור $\hat{A}$ אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי: $\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$

משוואת שרדינגר: GOOL
משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:
$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \Psi(x,t)$$

- תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$
משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

כאשר: $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי: GOOL

פונקציית הגל, חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$
חבילת גלים: $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$
בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l :

$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$

$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות לציוור פונקציית גל:

- ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
- עבור המצב ה- n ציירו גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
- ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולחיפך).
- פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
- פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מנהור (tunneling): GOOL
מקדם ההעברה עבור $T \ll 1$ (ההסתברות לעבור):
 $T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right) e^{-2\alpha l}$
 $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$, l - אורך המחסום, $U_0 > E$ גובה הפוטנציאל במחסום.

מקדם החזרה: $R = 1 - T$

אוסילטור הרמוני: GOOL

פונקציות הגל: $\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$ ו- $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$\psi_2(x) = \sqrt{2} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$

$\psi_3(x) = 8\sqrt{3} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2} \right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$

רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ-1: $E_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$

או שאפשר להתחיל את n מאפס ואז $E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$

מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה

מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים):

$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$
 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

מהירות החבורה:

יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל- k

פיזור: GOOL

מקדם העברה (ההסתברות לעבור): $T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$

אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה: $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$:מטריצה ההופכית:
 $U^\dagger = U^{-1}$:מטריצה אוניטרית:
 זוויות:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger; \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A; \quad (\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$$

$$(AB)^T = B^T A^T; \quad \langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

- הגודל של עי"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.
 אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים
 נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.

אופרטור העלאה והורדה באוסילטור הרמוני:
 אופרטור ההורדה (או השמדה):

$$\hat{a}|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle \quad ; \quad \hat{a} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$
 אופרטור ההעלאה (או יצירה):

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

$$\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad ; \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0,1,2,...$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}x\right]$$

$$H_0(y) = 1; \quad H_2(y) = -2(1 - 2y^2)$$

$$H_1(y) = 2y; \quad H_3(y) = -12\left(y - \frac{2}{3}y^3\right)$$

תנ"ז מסילתי והספין:**GOOL**

התנ"ז בקואורדינטות כדוריות:

$$\hat{L}_z = (-i\hbar)\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar\hat{L}_z$$

$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar\hat{L}_z$$

יחסי החילוף של התנ"ז המסילתי:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \quad ; \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \quad ; \quad [\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm \quad ; \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$$

$$L_\pm Y_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}Y_l^{m \pm 1}$$

מטריצות התנ"ז עבור $l = 1$:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}^2 = \hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ספין - אותם יחסי חילוף כמו התנ"ז:

$$\hat{S}_z f = \hbar m_s f$$

$$\hat{S}^2 f = \hbar^2 S(S+1)f$$

$-S \leq m_s \leq S$ - קפיצות של 1
 m_s, S יכולים להיות חצי שלמים.
 S קבוע ותלוי רק בסוג החלקיק. פרמיונים - חצי שלם,
 בוזונים - ספין שלם.

ספין חצי:

$$S = \frac{1}{2} \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

$$|x_+\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \equiv |\uparrow\rangle \quad ; \quad |x_-\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv |\downarrow\rangle$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}|s, m_s \pm 1\rangle$$

פונקציית ספין כללית:
המילטוניון פריס:

$\hat{H}(\hat{X}, \hat{P}, \hat{S}) = \hat{H}_0(\hat{X}, \hat{P}) + \hat{H}_S(\hat{S})$
 במקרה זה ניתן לפתור את משוואת שרדינגר לספין ולמרחב בנפרד.

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט מגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני: $U = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$ כאשר m הוא המספר הקוונטי של L_z .
 תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות **אפקט זימן**: $\Delta m = \pm 1, 0 \quad ; \quad \Delta E_z = \mu_B B \Delta m$
 התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפצל לשלושה קווים.
ספין ניסוי ושטון גרלך:**GOOL**

תנ"ז כולל:
 כאשר $\vec{L}$ תנ"ז מסילתי, $\vec{S}$ תנ"ז כתוצאה מהספין.

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

S גדולה - גודל התנ"ז מהספין. s קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון $s = \frac{1}{2}$. עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי
 $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$
 נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם נקראים **בוזונים**.

$S_z = m_s \hbar$
 $-s < m_s < s$ בקפיצות של 1
עבור אלקטרון:
 מומנט מגנטי מהספין:

$$g = 2.0023 \dots \approx 2$$
 עבור אלקטרון g , פקטור **אטומים מורכבים והטבלה המחזורית:****GOOL**

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: n, l, m_l, m_s . בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב- n וגם ב- l .
עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: n, l, m_l, m_s .
 ככל ש- l גדל יש יותר תנ"ז מסילתי) האנרגיה גדלה.
ייצוג באמצעות אלגברה לינארית:**GOOL**

תכונות המכפלה הפנימית:
 סקלר $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^*$
 $\langle v|v\rangle$ תמיד ממשי גדול או שווה לאפס
 אם $\langle v|v\rangle = 0$ אז $\langle v|v\rangle = 0$
 $\langle v|(\alpha|u\rangle + \beta|k\rangle) = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|k\rangle$
הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 \, dx$$
נורמה:
 $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$
 מכפלה פנימית: $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum \alpha_i^* \beta_i$ כאשר α_i ו- β_i הם המקדמים של פונקציות הגל באותו בסיס
אי שוויון שוורץ:**GOOL**

$|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$
זווית מוכללת בין וקטורים:
 $\cos\theta = \frac{\sqrt{\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle}}{\sqrt{\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle}}$
אי שוויון המשולש:
 $|\langle |a\rangle + |b\rangle | \rangle| \leq \langle a| \rangle + \langle b| \rangle$
אופרטורים בייצוג אלגברי**GOOL**
 אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

- האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i (כפול סקלר כלשהו): $\langle e_i | \hat{Q} | e_j \rangle$, שורה, j עמודה.
 אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.
 - כתיב נוסף:

$$\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} \psi_2 \rangle$$

$$\langle \hat{Q} \psi | = (\hat{Q} | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | \hat{Q}^\dagger$$

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
מטריצה משוחלפת:
צמד הרמיטי:

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$
מטריצת יחידה:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$$

כפל מטריצות: $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$
כפל מטריצות הוא לא חילופי:
 $AB \neq BA$
יחס חילוף בין מטריצות:
 $[A, B] = AB - BA$

$P_2^1 = 3 \sin\theta \cos\theta \quad ; \quad P_3^1 = \frac{3}{2} \sin\theta (5 \cos^2\theta - 1)$
 $P_2^2 = 3 \sin^2\theta \quad ; \quad P_3^3 = 15 \sin\theta (1 - \cos^2\theta)$
אורתוגונליות:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* [Y_l^m(\theta, \varphi)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

המשוואה לחלק הרדיאלי:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) = l(l+1)$$

$$R(r) = \frac{u(r)}{r}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = E u(r)$$

פתרון עבור אטום המימן:

$$V(r) = \frac{ke^2}{r}$$

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} = \frac{-13.6eV}{n^2}$$

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$
רדיוס בוחר:

$$a = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} m$$

$$L_{q-p}^p(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$

$$L_q(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$$

$$R_{10} = 2a^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-\frac{3}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{40} = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192} \left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי:

$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$
 $0 \leq l \leq n-1$ ו- $n=1,2,3,\dots$ שלמים,
 $-l \leq m \leq l$ שלם ומקיים:
אורתוגונליות:

$$\int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק r מהגרעין):

$P_{nl}(r) = |R_{nl}|^2 r^2$
 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z)$
התנע הזוויתי:

$$\hat{L}^2 Y_l^m = l(l+1) \hbar^2 Y_l^m$$

$$|L| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

גודל התנ"ז יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוחר.
 את הכיוון נאחר באמצעות הגודל של L_z , משם אפשר למצא את $\cos\theta = \frac{L_z}{|L|}$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!
צפיפות המצבים: $g(n) = 2n^2$ (2-ה נגיע מהספין).
כללי מעבר: א. $n_i > n_f$. ב. $\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$.
 $\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$
מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

מומנט כוח על דיפול מגנטי $\vec{\mu}$:
אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}$$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:

$$\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m_e} \vec{L}$$
המגנטון של בוחר:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5} eV/T$$

נקיפת לרמור: **GOOL**

ערך התוחלת של S עבור ספין חצי בשדה מגנטי עושה נקיפה (פרסציה) מסביב לשדה בתדירות $\omega = \gamma B_0$ ובזווית α ביחס לשדה כאשר $\gamma = g \frac{-e}{2m_e}$.
 g הוא היחס הג'ירו מגנטי. α נקבעת מתנאי התחלה.
פונקציית הגל:

$$\chi(t) = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{\gamma B_0 t}{2}}, \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{\gamma B_0 t}{2}} \right)$$

חיבור תנ"ז: **GOOL**

חיבור שני ספינים: $|S_1 - S_2| \leq S < S_1 + S_2$
 S הוא של כל המערכת והוא לא קבוע בניגוד לחלקיק בודד.
 $-S \leq m_S \leq S$
 $|S, m_S\rangle$ עבור שני חלקיקים עם ספין חצי:

מצבי טריפלט: $|1, -1\rangle \rightarrow |\downarrow\downarrow\rangle$
 $|1, 1\rangle \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle$; $|1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$

מצב סינגלט: $|0, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

תנ"ז כולל: $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$
אותם יחסי חילוף כמו של התנ"ז המסילתי והספין.

$\hat{J}_z f = \hbar m_j f$; $\hat{J}^2 f = \hbar^2 j(j+1) f$
 $m_j = m_l + m_s$; $|l - S| \leq j \leq l + S$

אינטראקציית ספין מסלול: **GOOL**

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e^2 \cdot \vec{S} \cdot \vec{L}}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2 r^3}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{m_e c^2 r^3} \vec{L}$$

העייע של $\hat{S} \cdot \hat{L}$:

$$\frac{1}{2} \hbar^2 (j(j+1) - S(S+1) - l(l+1))$$