

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

תנועה הרמונית פשוטה

GOOL

משוואת התנועה:
 $-k(x - x_0) = m\ddot{x}$
 k ו- m הם קבועים **חיוביים** כלשהם.
 x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
 x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.
 $\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.
 חייב להיות מינוס לפני k .
פתרון המשוואה:
 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$
 x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\vec{F} = 0$.
 A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משיווי המשקל.
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - תדירות זוויתית.
 φ - פאזה.
מציאת הקבועים בפתרון:
 x_0 - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$
 A, φ מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית:
 $v_{\max} = \omega A$
האנרגיה:
 $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$
 - האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
 - חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.

תנועה הרמונית מרוסנת

GOOL

בנוסף לכוח הקפיץ נוסף **כוח מרוסן** מהצורה:
 $F = -\lambda \dot{v}$
 λ - מהירות הגוף ו- λ קבוע.
משוואת התנועה:
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
 כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:
מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
 אין תנודות

מקרה (II) - ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$
 $z(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}$
 דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

מקרה (III) - ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$
 $z(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \cos(\tilde{\omega} t + \varphi)$; $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$
 יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת

בנוסף לכוח הקפיץ והמרוסן נוסף **כוח מאלץ** מהצורה:
 $\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$
 F_0 - קבועים כלשהם
משוואת התנועה:
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$
פתרון משוואת התנועה:
 $x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$
 $x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...
 - במצב עמיד (לאחר זמן רב) נזניח את הפתרון ההומוגני.
 $A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$
 $\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$
תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה A מקסימאלי. ניתן למצוא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω . אם $\omega_0 < \Gamma$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות התנועה ההרמונית ללא כוח מאלץ ומרוסן)

מערכת של שתי מסות

GOOL

משוואות התנועה:
 $-k_1 x_L - k_2 (x_L - x_R) = m \ddot{x}_L$
 $-k_1 x_R - k_2 (x_R - x_L) = m \ddot{x}_R$
 $x_S = x_L + x_R$; $\dot{x}_f = \dot{x}_L - \dot{x}_R$
פתרון (מודים עצמיים):
 $x_S(t) = A_S \cos(\omega_S t + \varphi_S)$
 $x_f(t) = A_f \cos(\omega_f t + \varphi_f)$
 $\omega_S = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ ו- $\omega_f = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$
כאשר -
פעימות:
 עבור: $x_L(0) = \dot{x}_L(0) = \dot{x}_R(0) = 0$; $x_R(0) = R$
מקבלים:
 $x_L(t) = A \sin(\epsilon t) \sin(\Omega t)$
 $x_R(t) = A \cos(\epsilon t) \cos(\Omega t)$
 $\epsilon = \frac{\omega_f - \omega_S}{2}$
 $\Omega = \frac{\omega_f + \omega_S}{2}$
 תדירות הפעימה: 2ϵ
 כוח מרוסן ומאלץ:

המשוואות והפתרונות עבור x_S ו- x_f הן אלו של תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת
 - במקרה $\Gamma \ll 2\omega$ (תדירות הכוח המאלץ, Γ מקדם הכוח המרוסן)
 - אם $\omega \approx \omega_S \gg A_f$ אז $x_L \approx x_R - A_S$ כלומר רק המוד (1,1) מתעורר
 - אם $\omega \approx \omega_f \gg A_S$ אז $x_L \approx -x_R$ כלומר רק המוד (1,-1) מתעורר.

GOOL

מערכת של שלוש מסות

המשוואות:
 $-k x_1 - k(x_1 - x_2) = m \ddot{x}_1$
 $-k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) = m \ddot{x}_2$
 $-k x_3 - k(x_3 - x_2) = m \ddot{x}_3$
פתרון (לאחר אלגברה עם מטריצה):
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_m t + \varphi_m) + A_f \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_f t + \varphi_f) + A_s \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_s t + \varphi_s)$
 כאשר -
 $\omega_S = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \omega_0$; $\omega_m = \sqrt{2} \omega_0$
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\sqrt{2 - \sqrt{2}} \omega_0$

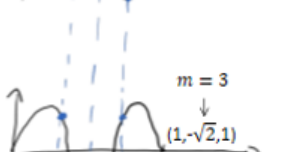
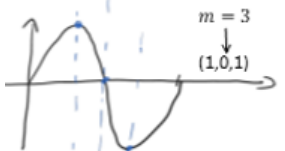
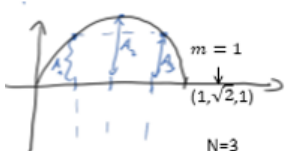
GOOL

מערכת N מסות

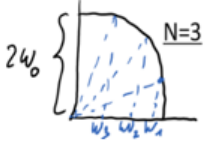
המשוואות:
 $-k(x_n - x_{n-1}) - k(x_n - x_{n+1}) = m \ddot{x}_n$
פתרון כללי:
 $x_n(t) = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) e^{i\omega t} = C_1 \cos(n\theta) \cos(\omega t + \varphi_1) + C_2 \sin(n\theta) \cos(\omega t + \varphi_2)$
 כאשר $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_0^2} \right)$ ו- ω נקבע מתנאי השפה
בתנאי שפה קבועים (קירות): $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$
 $x_n(t) = \sum_{m=1}^N C_m \sin\left(\frac{n\pi m}{N+1}\right) \cos(\omega_m t + \varphi_m)$
 $\theta_m = \frac{\pi m}{N+1}$; $\omega_m = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{2(N+1)}\right)$
 כלומר יש N מודים עצמיים (בתדירויות ω_m) ו- x_n הם קומבינציות לינאריות של המודים האלו. המקדמים C_m ו- φ_m נקבעים מתנאי ההתחלה של כל x_n

אמפליטודות המודים העצמיים

נצייר לכל מוד סינוס עם m חצאי סינוס. נחלק את המקטע ל- $N+1$ חלקים שווים



התדירויות: נצייר מעגל ברדיוס $2\omega_0$ ונחלק ל- $N+1$ גזרות שוות.



GOOL

משתנה רציף

$\rho \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2}$
 z - מיקום המסה; Ψ - העתק משיווי משקל
 $\rho = \frac{m}{\Delta z}$ - צפיפות המסה של המערכת, כאשר Δz הוא המרווח בין שתי מסות בשיווי משקל (הולך לאפס)
 $E = k \Delta z$ - מודול האלסטיות.

GOOL

אנליזת פורייה

$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right]$
 כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ- L אבל לא גדול ממנו).
 הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2 .

$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$
 $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$
 $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$
מכפלה פנימית:
פונקציות אורתוגונליות:

$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = 0$
 $\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$
 $\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי:
 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$
 $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$
 $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$
 $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$

טור אקספוננציאלי:
 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2\pi n}{L} x}$
 $C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$, $C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} dx$
הקשר בין המקדמים בטור אקספוננציאלי לטור סינוסים וקוסינוסים:
 $A_n = C_n + C_{-n}$; $B_n = i(C_n - C_{-n})$; $\frac{A_0}{2} = C_0$
 $C_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n)$; $C_{-n} = \frac{1}{2}(B_n + iA_n)$

תופעת גיבס

קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו

גלים עומדים	GOOL
מיתר חצי אינסופי:	
קצה קשור:	$\Psi(x=0,t)=0 \Rightarrow \Psi(x,t)=C\sin(kx)\sin(\omega t+\varphi)$
קצה חופשי:	
$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big _{x=0}=0 \Rightarrow \Psi(x,t)=C\cos(kx)\cos(\omega t+\varphi)$	
מיתר סופי:	
2 קצוות קשורים:	$\Psi(x=0,t)=\Psi(x=L,t)=0$ $\lambda_n=\frac{2L}{n}; k_n=\frac{\pi n}{L}; n=0,1,2,3 \dots; f_n=\frac{vn}{2L}$
קצה קשור וקצה חופשי:	
$\Psi(x=0,t)=0, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big _{x=L}=0$	
$k_n=\frac{\pi}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right); n=0,1,2,3 \dots$	
$\lambda_n=\frac{2L}{(n+\frac{1}{2})}; f_n=\frac{v}{2L}\left(n+\frac{1}{2}\right)$	
$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$	

מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים:	
$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big _{x=0}=0, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big _{x=L}=0$	
$\lambda_n=\frac{2L}{n}; f_n=\frac{vn}{2L}; k_n=\frac{\pi n}{L}; n=0,1,2,3 \dots$	
$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$	

יחס נפיצה(דיספרסיה) ומהירות החבורה GOOL	
ייצוג פונקציית הגל באמצעות פורייה:	
$\Psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dx$	
כאשר-	$A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,0)e^{-ikx} dx$
מהירות הפאזה:	$v_{\varphi}(k)=\frac{\omega}{k}$
מהירות החבורה:	$v_g(k)=\frac{\partial \omega}{\partial k}$
רוחב כתלות בזמן של גאוסיאן:	$\sigma^2(t)=\frac{\sigma^4+4\beta^2t^2}{\sigma^2}$
כאשר σ היא הרוחב ההתחלתי ו-	$\beta=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\Big _{k_0}$

אם מספר הגל יוצא מורכב עבור תדירויות מסוימות, נקבל גל דועך. קבוע הדעיכה הוא החלק המדומה של מספר הגל. מכניקת הקוונטים: פונקציית גל מתארת הסתברות למצוא חלקיק במיקום מסוים.	
- משוואת שרדינגר:	$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$
- התנע של חלקיק:	$p = \hbar k$

גלי מים:	
- יחס הדיספרסיה הכללי עבור גלים בנוזל הוא:	
$\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \tan h(kH)$	
σ – קבוע מתח הפנים, כוח ליחידת אורך או אנרגיה ליחידת שטח, H - עומק הנוזל, g - תאוצת הכובד	
ρ - צפיפות המסה ליחידת נפח	
- בגלים קצרים (גלי מתח פנים):	$\lambda \ll \lambda_c \sim 2cm$
$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$	
- עבור גלים ארוכים (גלי כבידה) אבל קצרים מעומק המים (או הנוזל):	$\omega = \sqrt{gk}, \quad H \gg \lambda \gg \lambda_c$
- עבור גלים ארוכים וגדולים מעומק המים (או הנוזל):	$\omega = \sqrt{gHk}, \quad \lambda \gg H \gg \lambda_c$

משוואת הגלים האלקטרומגנטיים GOOL	
משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:	
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	
בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים:	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$
משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:	
$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}})$	
-בריק:	$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 m/s$

- המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד. המשוואה זהה לשדה המגנטי.	
---	--

גלים רוחביים במיתר	
משוואת הגלים:	$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$
T – המתיחות במיתר, ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך, Ψ – פונקציית הגל, ההעתק הרוחבי של כל חתיכה במיתר.	
מהירות הגל:	$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$
פתרון המשוואה:	$\Psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$

- אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)	
$\Psi(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t = C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2)$	
שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.	
פתרון במספרים מרוכבים:	
$\Psi(x,t) = A_1 e^{i(kx+\omega t)} + A_2 e^{i(kx-\omega t)} + A_3 e^{-i(kx+\omega t)} + A_4 e^{-i(kx-\omega t)}$	
אם הפונקציה ממשית, אז $A_4 = A_2^*$ ו-$A_3 = A_1^*$ מתכנס לחלק הממשי של	
$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$	
יחס הדיספרסיה:	$\omega = v \cdot k$
פתרון באמצעות נוסחת ד'אלמבר:	
$\Psi(x,t) = \frac{1}{2} [\Psi(x-vt,0) + \Psi(x+vt,0)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi'(x',0) dx'$	

החזרה והעברה GOOL	
תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב-$x=0$:	
1. רציפות הפונקציה:	$\Psi_L(0,t) = \Psi_R(0,t)$
2. רציפות הכוח:	$F_L = F_R$
אם המתיחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הגזרת:	
$\frac{\partial \Psi_L}{\partial x}\Big _{x=0} = \frac{\partial \Psi_R}{\partial x}\Big _{x=0}$	
$\Psi_L(x,t) = \Psi_r(x,t) + \Psi(x,t); \Psi_R(x,t) = \Psi_t(x,t)$	
$\Psi_r(x,t) = r\Psi(-x,t)$	
$\Psi_t(x,t) = t\Psi\left(\frac{v_1}{v_2}x,t\right); \quad v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$	
מקדם החזרה:	$r = \frac{v_2-v_1}{v_2+v_1} = \frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2}-\sqrt{\rho_1}}$
מקדם העברה:	$t = \frac{2v_2}{v_2+v_1} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}$

הערה: את הנוסחאות של מקדם ההעברה וההחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.	
---	--

עכבה GOOL	
עכבה (impedance):	$Z = \sqrt{\rho T} = \frac{T}{v}$
T – מתיחות. V – מהירות הגל	
$ Z = \frac{ F_y }{ V_y(t) }$	
F_y – הכוח על אלמנט מסה	
$V_y(t)$ – מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)	
מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2:	
$r = \frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}$ מקדם החזרה.	
$t = \frac{2z_1}{z_1+z_2}$ מקדם העברה.	
$r = 0 \rightarrow t = 1 \leftarrow z_1 = z_2$ תאום עכבות:	

אנרגיה הספק ותנע GOOL	
אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר:	
$\varepsilon(x,t) = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 = \rho v^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2$	
אנרגיה ממוצעת בזמן:	$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A ^2$
הספק רגעי בנקודה, כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני ביחידת זמן:	
$P^{\pm} = \pm Z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 = \pm v \varepsilon(x,t)$	
$P^{\pm}$ הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי	
ההספק הממוצע בזמן:	$\bar{P}^{\pm} = \pm \frac{1}{2} Z \omega^2 A ^2$
מקדם החזרה של האנרגיה:	$R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = r^2 = \left(\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right)^2$
מקדם העברה של האנרגיה:	$T = \frac{P_2^+}{P_1^+} = \frac{z_2}{z_1} t^2 = \frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}$
תנע: התנע הוא אפס.	$R + T = 1$

הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים. בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים).	
התמרת (טרנספורם) פורייה:	$f(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$
התמרה הפוכה:	$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dx$
תכונות:	$FT[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha FT[f(x)] + \beta FT[g(x)]$
אם $f(x) \in G$ אז $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq \infty$	
אם $f(x) \in G$ אז $F(k) \in G$ רציפה.	
אם $f(x) \in G$ אז $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} F(k) = 0$ רימן-לבג	
אם $f(x)$ זוגית אז $F(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$	
אם $f(x)$ אי-זוגית אז:	$F(k) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$
אם $f(x)$ ממשית אז $\overline{F(k)} = F(-k)$	
התמרות של פונקציות מיוחדות:	
גאוסיאן:	$FT[Ae^{-ax^2}] = \frac{Ae^{-\frac{k^2}{4a}}}{2\sqrt{\pi a}}$
אקספוננט:	$FT[Ae^{-a x }] = \frac{aA}{\pi(a^2+k^2)}$
לורנציאן:	$FT\left[\frac{a}{a^2+x^2}\right] = \frac{1}{2} e^{-a k }$
פונקציית דלתא:	$FT[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}$
קבוע:	$FT[1] = \delta(k)$
נוסחת הכפל באקספוננט, קוסינוס או סינוס (מודולציה):	$FT[f(x)e^{iCx}] = F(k-C)$
$FT[f(x) \cos(Cx)] = \frac{F(k-C) + F(k+C)}{2}$	
$FT[f(x) \sin(Cx)] = \frac{F(k-C) - F(k+C)}{2i}$	

נוסחת הכינון והזזת:	$FT[f(ax+b)] = \frac{1}{ a } e^{i\frac{kb}{a}} F\left(\frac{k}{a}\right)$
נוסחת הגזרת: אם $f(x), f'(x) \in G$ ו- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$	
אז:	$FT[f'(x)] = ikF(k)$
נוסחת המומנט: אם $xf(x) \in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו- $FT[xf(x)] = i \frac{d}{dk} F(k)$	

מבוא לגלים GOOL	
גלים רוחביים: ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות (מיתר)	
גלים אורכיים: ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות (קול)	
תווך: החומר בו מתקדמת ההפרעה	
פונקציית הגל: $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.	
אנרגיה של גל: $A, E \propto A^2$ היא האמפליטודה (משרעת)	
משוואת הגלים במימד אחד:	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$
כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.	
התאבכות: סכימה של גלים שנפגשים	
זווית גל: אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן	
גלים מחזוריים:	$\lambda = v \cdot T$
λ - אורך הגל; T -זמן המחזור; v - מהירות הגל	
- תדירות (מספר המחזורים בשנייה):	$f = \frac{1}{T}$
- גל הרמוני:	$y(x,t) = A \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$
- מספר הגל:	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

- קשרים בין הגדלים השונים:	$\omega = vk = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
גל עומד: מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים	
$y(x,t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \varphi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \varphi))$	
- נקודות צומת (node): נקודות שלא זזות. אין מהירות גל.	
- נקודת טבור (antinode): אמפליטודה מקסימאלית. פעימות: בפעימות אנחנו מחברים שני גלים בעלי אותה אמפליטודה ומקבלים גל בתוך מעטפת (פעימה).	
$\Psi_1(t) = A \cos(\omega_1 t) \quad \Psi_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$	
$\Psi_T(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = 2A \cos(\varepsilon t) \cos(\Omega t)$	
$\varepsilon = \frac{\omega_f - \omega_s}{2}$	
$\Omega = \frac{\omega_f + \omega_s}{2}$	

תדירות הפעימה היא 2ε	
--	--

פעימה אחת	
------------------	--

אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר):

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$
 - תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק).
 פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$
מעבר לייצוג קופלקסי:

$$\cos(kx - \omega t) = \text{Re}[e^{i(kx - \omega t)}]$$
 - כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב- $t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.
 יחס הדיספרסיה:

$$\omega = uk$$
 - אם היחס לא ליניארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:

$$u_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad u_g = \frac{d\omega}{dk}$$
GOOL **גל אלקטרומגנטי מישורי:**
 הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$
 כאשר $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$
וקטור הגל:

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$$
 - הערות - תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.
 יחס הדיספרסיה בגל:

$$\omega = u|k| = u \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$
 - כיוון $\vec{k}$ בכיוון התקדמות הגל, בגל מישורי תמיד $\vec{E} \perp \vec{k}$
 - כיוון $\vec{E}$ (מסומן בדרכי ב- $\hat{n}$) נקרא כיוון הקיטוב של הגל.
 - כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל.
 - התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי (אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B} = \frac{1}{u} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$
העכבה של התווך:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$
בריק:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E} \quad ; \quad \vec{E} = -\eta \hat{k} \times \vec{H}$$
וקטור פוינטינג (כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן):

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$
 - בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.
 - הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).
 - ממוצע הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא **העוצמה של הגל**):

$$\vec{S}_{Avg} = \langle \vec{S} \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{E} \times \vec{H}^*}{2} \right\}$$

$\vec{E}$ ו- $\vec{H}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.
המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$$
GOOL **קיטוב מעגלי ואליפטי:**

הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב: מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב לינארי: כיוון השדה קבוע.
קיטוב מעגלי ימני: רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב- 90° (הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\frac{\pi}{2}$)
 - השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z .
קיטוב מעגלי שמאלי: רכיב y מקדים את רכיב x ב- 90° ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$)
 - השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z .
קיטוב אליפטי: מתקבל כאשר הפרש הפאזה שונה מ- 90° או אם האמפליטודה של הרכיבים שונה.

GOOL **פגיעה ישירה בתווך דיאלקטרי:**
 כאשר גל הניע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר.
 תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקור.
 אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה:

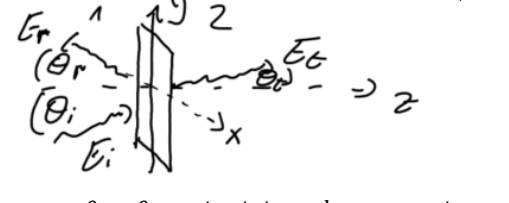
$$B_{2\perp} = B_{1\perp} \quad ; \quad D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free}$$

$$H_{2\parallel} - H_{1\parallel} = k_{free} \quad ; \quad E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$$
 - σ_{free} - צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה.
 - k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה.
 בפגיעה ישירה (או פגיעה בניצב) יש לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.
בתווך דיאלקטרי:

$$\sigma_{free} = k_{free} = 0$$
הקשר בין האמפליטודות:

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad ; \quad \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

- השוויון השני נכון רק אם: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים). לא לבלבל בין n ל- η .
מקדם העברה: $\tau = \frac{E_t}{E_0}$. **מקדם החזרה:** $\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$
פגיעה ישירה בתווך דיאלקטרי: $1 + \Gamma = \tau$
GOOL **פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי:**
 מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
 מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים ו- $\theta_i = \theta_r$
חוק סנל:

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t}$$
 - אם $n_i > n_t$ אז קיימת זווית קריטית.
 - אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר (תהיה החזרה מלאה):

$$\theta_c = \text{shiftsin} \left(\frac{n_t}{n_i} \right)$$
משוואות פרנל עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך למישור הפגיעה):

$$\Gamma^\perp = \frac{E_{r0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau^\perp = \frac{E_{t0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$
עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל למישור הפגיעה):

$$\Gamma^\parallel = \frac{E_{r0}^\parallel}{E_{i0}^\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau^\parallel = \frac{E_{t0}^\parallel}{E_{i0}^\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^\parallel = \tau^\parallel \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$
זווית ברוסטר הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).
זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:

$$\sin^2 \theta_B^\parallel = \frac{1 - \frac{\mu_t \epsilon_i}{\mu_i \epsilon_t}}{1 - \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon_i} \right)^2}$$
 - אם $\mu_2 \approx \mu_1$ אז: $\tan \theta_B^\parallel = \frac{n_t}{n_i}$; $\tan \theta_B^\parallel = \frac{1}{1 + \epsilon_i / \epsilon_t}$
 - בקיטוב אנכי (מאוד נדיר בטבע):

$$\sin^2 \theta_B^\perp = \frac{1 - \frac{\mu_i \epsilon_t}{\mu_t \epsilon_i}}{1 - \left(\mu_i / \mu_t \right)^2}$$

מעבר של יותר מתווך אחד: נציב את תנאי השפה עבור כל נקודת מעבר.