

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

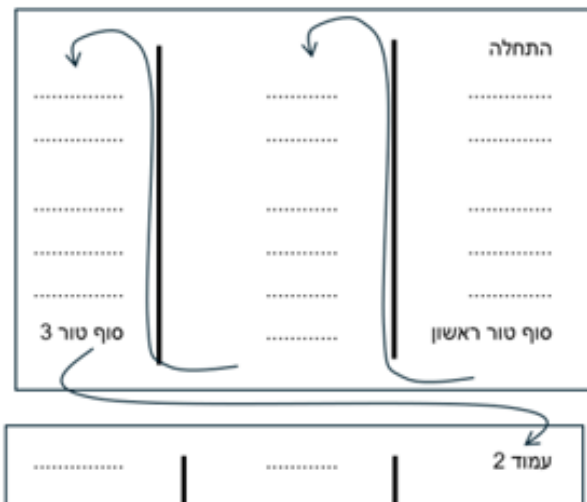
את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את
חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית
ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר
העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים,
תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.
אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.
ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר
מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים
בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על כדור בתוך נוזל:

$$\vec{F}_v = -6\pi\eta R\vec{v}$$

הנעה מעגלית (ברדיוס קבוע)

הדרך בתנועה מעגלית: $S = \Delta\theta \cdot R$
הדרך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל. $\Delta\theta$ היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!

גודל המהירות הקווית הרגעית (speed): $v(t) = \frac{ds}{dt}$
כיוון המהירות תמיד משיק למעגל

מהירות זוויתית: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
 f - התדירות, T - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)

קשר בין המהירות הקווית לזוויתית: $v = \omega R$
תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל): $a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

הכוחות למרכז המעגל: $\Sigma F_{\text{למרכז}} = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$
תאוצה זוויתית: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

תאוצה משיקית (רק בתנועה לא קצובה): $a_\theta = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \alpha R$
הגובה במעגל אנכי: $h = R(1 - \cos\theta)$

כאשר h ו- θ נמדדים מתחתית המעגל.
הכוח הצנטריפוגלי: $F_r = m\omega^2 R$

בכיוון החוצה מהמעגל.
שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

וקטור המיקום: $\vec{r} = R \cos\theta \hat{x} + R \sin\theta \hat{y}$
הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית: $\vec{a}_\theta = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

כוחות מדומים

כוח מדומה מוסיפים רק כאשר **הצופה** נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אין כוחות מדומים ולא תלוי בתנועת הגוף. החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה:

$$-m\vec{a}_0 + \Sigma \vec{F}_{\text{אמיתיים}} = m\vec{a}'$$

$\vec{a}'$ היא תאוצת הגוף ביחס לצופה.

אמיתיים $\Sigma \vec{F}$ הם כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.

" $-m\vec{a}_0$ " - הנמדד ו- $\vec{a}_0$ היא תאוצת הצופה.
הכוחות מדומים הנוספים במקרה של צופה מסתובב במהירות זוויתית קבועה:

הכוח הצנטריפוגלי: $\vec{F} = m\omega^2 r\hat{r}$
או בצורה יותר כללית

כוח קוריאוлис: $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$
כאשר בשתי הנוסחאות ω הוא של הצופה (ולא של הגוף)

$\vec{v}'$ - מהירות הגוף ביחס לצופה.
 $\vec{r}$ - וקטור המיקום של הגוף

עבודה ואנרגיה

עבודה של כוח קבוע: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos\alpha = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$
כאשר α היא הזווית בין הכוח להעתק.

העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.
אם הגוף לא זז אז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).

הקשר בין העבודה כוללת לאנרגיה קינטית: $\Delta E_k = W_{\Sigma F}$
העבודה של כל הכוחות שפועלים על הגוף

כוח משמר: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
העבודה שמבצע כוח משמר אינה תלויה במסלול, היא תלויה רק בנקודות ההתחלה והסיום של התנועה.

העבודה במסלול סגור מתאפסת.
יש לו אנרגיה פוטנציאלית כך ש:

האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית: $W_c = -\Delta U$
האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית: $U_g = mgh$

כאשר x ההתארכות הקפיץ ממצב רפו ו- k קבוע הקפיץ.
חץ מ- U_g ו- U_{el} יכולים להיות עוד כוחות משמרים ועבורם יהיו עוד אנרגיות פוטנציאליות

אנרגיה (מכאנית) כללית: $E = E_k + U$
סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בבעיה.

משפט עבודה אנרגיה: $E_i + W_{NC} = E_f$
העבודה של כל הכוחות הלא משמרים

חוק שימור האנרגיה: $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$
אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת

העבודה של כוח לא קבוע: $E_i + W_{NC} = E_f$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

בשביל הנוסחה צריך גם משוואה של המסלול.
דוגמה ב-2D מימד: נתון $y(x) = x^5$, באמצעות המשוואה עוברים למשתנה אחד. בדוגמה, נציב באינטגרל במקום y את x^5 ו- dx נגזרת $dy = 5x^4 dx$. בדוגמה $dy = 5x^4 dx$. הגבולות של המשתנה אליו עברנו (בדוגמה גבולות של x)

אין בודקים אם כוח הוא משמר: $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ או $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$
אם ורק אם $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$, אז הכוח משמר.

נוסחת הרוטור בפרק וקטורים.
הערה: צריך שכל רכיב יתאפס בנפרד.

נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר: $\Sigma \vec{F} = 0$ או $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$
שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתזוזה קטנה): $U''_x > 0$

שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתזוזה קטנה): $U''_x < 0$
שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה

אם יש כמה ממדים אז $\vec{\nabla} U = 0$
שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס

שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס
אוכף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס

הספק ונצילות

הספק ממוצע: $P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$
הספק רגעי: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos\alpha$

$\vec{F}$ - הכוח שפועל על הגוף ו- $\vec{v}$ היא מהירות הגוף.
נצילות: $\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{W_{out}}{E_{in}}$

כאשר out מציין את החלק המנוצל על ידי המערכת ו-in מציין את כל מה שמושקע.
הספק (P): העבודה שנעשית ביחידת זמן.

ההספק של כוח קבוע או ההספק ממוצע: $P = \frac{w}{\Delta t}$
היחידה הסטנדרטית של ההספק היא Watt (W) והיא שווה לגאול חלקי שניה.

יחידת נוספת היא כוח סוס (Hp): $1 \text{ Hp} = 746 \text{ Watt}$
נוסחה נוספת להספק: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

בנוסחה יש מכפלה סקלרית של הכוח במהירות הגוף.
הנוסחה נכונה גם להספק רגעי (ולא רק להספק ממוצע או קבוע)

מתקף ותנע

התנע של גוף: $\vec{p} = m\vec{v}$
הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון: $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

המתקף של כוח: $\vec{J} = \int \vec{F} dt$
המתקף הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות בזמן (לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות במיקום).

המתקף הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:
חוק שימור התנע: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.

הנוסחה משימור תנע: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$
בד"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.

התנגשות אלסטית: יש גם שימור אנרגיה ונוסף למשוואת התנע את המשוואה: $m_1u_1^2 + m_2u_2^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2$
אם ההתנגשות חזיתית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרשום:

התנגשות אלסטית לא חזיתית בין שני גופים בעלי מסות שוות ואחר היתנגשות: $v_1 + u_1 = v_2 + u_2$
התנגשות אלסטית לא חזיתית בין שני גופים בעלי מסות שונות ואחר היתנגשות: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$

בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה.
התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.

התנגשויות פלסטיות (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות): $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$

בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה.
התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.

התנגשויות פלסטיות (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות): $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$

בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה.
התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.

התנגשויות פלסטיות (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות): $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$

בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה.
התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.

מסה משתנה

הנוסחה $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ לא נכונה עבור גוף שהמסה שלו משתנה. נעבור לניסוח הכללי יותר של חוק שני: $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

נוסחה כללית לתנועה גופים שפולטים מסה:
 $\Sigma \vec{F}_{ext} = M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt}$

כאשר $\frac{dm}{dt}$ הוא קצב הפליטה (חיובי כאשר חומר יוצא מהגוף ושלילי אם חומר נכנס לגוף).

$\vec{v}_{rel}$ - מהירות החומר שנפלט ביחס לגוף (אם החומר נפלט אחורה אז היא צריכה להיות שלילית)

ext - הכוונה לסכום הכוחות החיצוניים

מרכז מסה

מיקום מרכז המסה: $\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$
ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x:

$x_{c.m.} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$
מהירות מרכז המסה: $\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

תאוצת מרכז המסה: $\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$
עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממשיכה בהתאמה.

מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים): עושים מרכז מסה בין מרכזי המסה.

גוף עם חור: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מרכז מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.

תאוצת מרכז המסה תלויה רק בכוחות החיצוניים: $\Sigma F_{ext} = ma_{c.m.}$
אם אין כוחות חיצוניים (ומרכז המסה במנוחה בהתחלה) אז מיקום מרכז המסה נשמר. ניתן לעשות "שימור מרכז מסה" לחשב אותו בהתחלה ובסוף ולהשוות.

מומנט התמד

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית (אז לא באותה מהירות קווית)

מומנט התמד של מערכת גופים נקודתיים: $I = \Sigma m_i r_i^2$
משפט שטיינר: $I' = I_{c.m.} + md^2$

כאשר d הוא המרחק בין הצירים ו- m היא המסה הכוללת של הגוף. הערה: משפט שטיינר פועל רק לצירים מקבילים, ורק כאשר אחד הצירים עובר במרכז המסה.

אדטיביביות: ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל. $I_T = I_1 + I_2$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו: $I = mR^2$
טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי: $I_{c.m.} = mR^2$

דיסקה/גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z-אנך לדיסקה: $I_{c.m.} = \frac{1}{2}mR^2$

דיסקה במרכז מסה סביב ציר x-במישור הדיסקה: $I_{c.m.} = \frac{1}{4}mR^2$

מוט במרכז המסה: $I_{c.m.} = \frac{1}{12}mL^2$

מוט בקצה: $I = \frac{1}{3}mL^2$

כדור מלא במרכז מסה: $I_{c.m.} = \frac{2}{5}mR^2$

תיבה או לוח במרכז מסה: $I_{c.m.} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$

נוסחה המקשרת בין צירים שונים: $I_z = I_x + I_y$
אם $I_x = I_y$ (בדרי"כ מסימטריה) אז $I_z = 2I_x$

מבנה הגוף סימטרי לאורך ציר z: מומנט ההתמד של הגוף סביב ציר z יהיה כמו של גוף משטחי במישור xy.

לדוגמה מומנט ההתמד של גליל יהיה כמו של דיסקה

ומומנט ההתמד של קוביה יהיה כמו של מלבן שהוא בסיס הקוביה.

חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח: $I = \int r^2 dm$

כאשר r הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית). אם ציר הסיבוב הוא ציר z : $r^2 = x^2 + y^2$

מומנט כוח

מומנט כוח: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)

גודל המומנט: $|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}|r_{\perp}$

כאשר $r_{\perp}$ הוא הרכיב של $\vec{r}$ המאונך לכוח כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

תנע זוויתי (תנ"ז)

תנ"ז: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{r}$ - הוא וקטור המיקום של הגוף, $\vec{p}$ - התנע הקווי עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי:

$|\vec{L}| = mvd$

כאשר d זה המרחק האפקטיבי.

v - מהירות.

הקשר בין תנ"ז למומנט כוח: $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

חוק שימור התנע הזוויתי: אם $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ אז התנע הזוויתי נשמר

תנ"ז של תנועה משולבת, מערכת גופים שמסתובבים סביב מרכז מסה שנע: $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר $\vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$ זה התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת ו- $\vec{L}_{c.m.}$ התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר סך התנ"ז של הגופים במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.

גוף קשיח

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל נקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה מהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)

תנע קווי של גוף קשיח: $\vec{p} = M\vec{v}_{c.m.}$

תנ"ז:

גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$

- תנ"ז גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

כאשר I מומנט ההתמד ביחס לציר

- תנ"ז של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב מרכז המסה): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר $\vec{L}_{c.m.}$ הוא התנ"ז ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל- $\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.}\vec{\omega}$

אנרגיה קינטית סיבובית:

- סביב ציר קבוע כלשהו: $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

- תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה): $E_k = \frac{1}{2}mv_{c.m.}^2 + \frac{1}{2}I_{c.m.}\omega^2$

- תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (*): $E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 + m\vec{r}_{c.m.o} \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$

כאשר I_0 מומנט ההתמד ביחס לציר, $\vec{v}_0$ היא מהירות הציר ו- $\vec{r}_{c.m.o}$ הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר. (*השימוש בנוסחה מאוד נדיר

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

תנועה סיבובית	תנועה בקו ישר
θ	x
$\omega = \dot{\theta}$	$v = \dot{x}$
$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$	$a = \dot{v} = \ddot{x}$
I	m
L	p
τ	F

לגולל ללא החלקה: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח מתאפסת (ביחס למשטח) $\leftarrow a_{c.m.} = \alpha R$; $v_{c.m.} = \omega R$

- בגל"ה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.

איך נגשים לשאלות?

חוקי שימור | בודקים מה נשמר:

דרך כוחות ומומנטים | עושים:

1. אנרגיה אם כל הכוחות משמרים.
2. תנע קווי אם סכום הכוחות החיצוניים מתאפס.
3. תנ"ז אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס.

תנועה הרמונית פשוטה

משוואת התנועה: $-k(x - x_0) = m\ddot{x}$

k ו- m הם קבועים חיוביים כלשהם.

x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זוויתי או משתנה אחר.

$\ddot{x}$ - נגזרת שנייה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני k .

פתרון המשוואה: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\sum \vec{F} = 0$.

A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משיווי המשקל.

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - תדירות זוויתית

ϕ - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$

ϕ , A מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{max} = \omega A$

מטוטלת פיזיקאלית:

גוף קשיח שתולים בנקודה כלשהי

$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$

I_0 - מומנט ההתמד בנקודת התלייה

האנרגיה: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$

- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.

- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.

תנועה הרמונית מרוסנת

בנוסף לכוח הקפיץ נוסף כוח מרסן מהצורה: $F = -\lambda v$

v - מהירות הגוף ו- λ קבוע.

משוואת התנועה: $\ddot{z} + \Gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$

כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$

אין תנודות

$z(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left(A e^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} t} \right)$

מקרה (II) - ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$

$z(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}$

דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

מקרה (III) - ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

$z(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\tilde{\omega} t + \phi)$; $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת

בנוסף לכוח הקפיץ והמרסן נוסף כוח מאלץ מהצורה: $\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$

Ω ו- F_0 קבועים כלשהם

משוואת התנועה: $\ddot{z} + \Gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$

פתרון משוואת התנועה: $x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...

- במצב עמיד (לאחר זמן רב) נוניח את הפתרון ההומוגני.

$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$

$\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$

תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי. ניתן למצוא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω . אם $\omega_0 \ll \Gamma$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות התנועה ההרמונית ללא כוח מאלץ ומרסן)

תלייה