

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את
חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית
ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר
העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים,
תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.
אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.
ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר
מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים
בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

מבוא לגלים

GOOL

גלים רוחניים: ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות (מיתר)
גלים אורכיים: ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות (קול)
תווך: החומר בו מתקדמת ההפרעה

פונקציית הגל: $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.
אנרגיה של גל: $E \propto A^2$, A היא האמפליטודה (משרעת)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{משוואת הגלים במימד אחד:}$$

כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.

התאבכות: סיכמה של גלים שנפגשים
חזית גל: אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן

גלים מחזוריים:
 λ - אורך הגל; T - זמן המחזור; v - מהירות הגל

תדירות (מספר המחזורים בשנייה):
 $f = \frac{1}{T}$

גל הרמוני:
 $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

מספר הגל:
 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

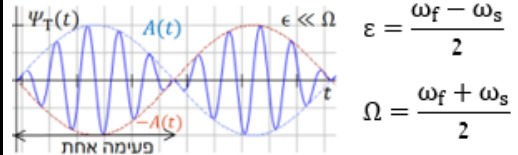
קשרים בין הגדלים השונים:
 $\omega = vk = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

גל עומד: מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים
 $y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \varphi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \varphi))$

נקודות צומת (node): נקודות שלא זזות. אין מהירות גל.
נקודת טבור (antinode): אמפליטודה מקסימאלית.

פעימות: בפעימות אנחנו מחברים שני גלים בעלי אותה אמפליטודה ומקבלים גל בתוך מעטפת (פעימה).

$\Psi_1(t) = A \cos(\omega_1 t)$ & $\Psi_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$
 $\Psi_T(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = 2A \cos(\epsilon t) \cos(\Omega t)$



תדירות הפעימה היא 2ϵ
גלים רוחביים במיתר

GOOL

משוואת הגלים:
 $\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$

T - המתחיות במיתר, ρ - צפיפות המסה ליחידת אורך,
 ψ - פונקציית הגל, ההעתק הרוחבי של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל:
 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

פתרון המשוואה:
 $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$

- אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזוויות טריגונומטריות)

$\psi(x, t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t$

$= C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2)$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.
פתרון במספרים מרוכבים:

$\psi(x, t) = A_1 e^{i(kx + \omega t)} + A_2 e^{i(kx - \omega t)} + A_3 e^{-i(kx + \omega t)} + A_4 e^{-i(kx - \omega t)}$

אם הפונקציה ממשיה, אז $A_4 = A_3^*$ ו- $A_2 = A_1^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)}$

יחס הדיפרסיה:
 $\omega = v \cdot k$
פתרון באמצעות נוסחת ד'אלמבר:

$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [\psi(x - vt, 0) + \psi(x + vt, 0)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \dot{\psi}(x', 0) dx'$

GOOL

החזרה והעברה
תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב- $x=0$:

1. רציפות הפונקציה: $\psi_L(0, t) = \psi_R(0, t)$
 2. רציפות הכוח: $F_L = F_R$

אם המתחיות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הנגזרת:

$\frac{\partial \psi_L}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi_R}{\partial x} \Big|_{x=0}$
 $\psi_L(x, t) = \psi_r(x, t) + \psi(x, t); \psi_R(x, t) = \psi_t(x, t)$
 $\psi_r(x, t) = r\psi(-x, t)$

החזרה והעברה
 $\psi_t(x, t) = t\psi\left(\frac{v_1}{v_2}x, t\right); v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}, v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} \quad \text{מקדם החזרה:}$$

$$t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} \quad \text{מקדם העברה:}$$

הערה: את הנוסחאות של מקדם ההעברה והחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.

$$Z = \sqrt{\rho T} = \frac{T}{v} \quad \text{עכבה (impedance):}$$

T - מתחיות. V - מהירות הגל

$$|Z| = \frac{|F_y|}{|V_y(t)|}$$

F_y - הכוח על אלמנט מסה
 $V_y(t)$ - מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)

מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2:

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

אנרגיה הספק ותנע
אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר:

$$\epsilon(x, t) = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = \rho v^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2$$

אנרגיה ממוצעת בזמן:
 $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 |A|^2$

הספק רגעי בנקודה, כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני ביחידת זמן:

$$P^\pm = \pm Z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = \pm v \epsilon(x, t)$$

$P^\pm$ הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי
ההספק הממוצע בזמן:

$$\bar{P}^\pm = \pm \frac{1}{2} Z \omega^2 |A|^2$$

מקדם החזרה של האנרגיה:
 $R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$

מקדם העברה של האנרגיה:
 $T = \frac{P_2^+}{P_1^+} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

תנע: התנע הוא אפס.
גלים עומדים

מיתר חצי אינסופי:
קצה קשור:
 $\Psi(x=0, t) = 0 \Rightarrow \Psi(x, t) = C \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi)$

קצה חופשי:
 $\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \Psi(x, t) = C \cos(kx) \cos(\omega t + \varphi)$

מיתר סופי:
2 קצוות קשורות: $\Psi(x=0, t) = \Psi(x=L, t) = 0$
 $\lambda_n = \frac{2L}{n}; k_n = \frac{\pi n}{L}; n = 0, 1, 2, 3, \dots; f_n = \frac{vn}{2L}$

$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$

קצה קשור וקצה חופשי:

$\Psi(x=0, t) = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$

$k_n = \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right); n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\lambda_n = \frac{2L}{(n + \frac{1}{2})}; f_n = \frac{v}{2L} (n + \frac{1}{2})$

$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$

מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים:

$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$

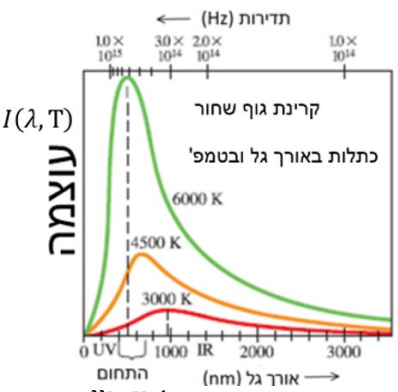
$\lambda_n = \frac{2L}{n}; f_n = \frac{vn}{2L}; k_n = \frac{\pi n}{L}; n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:
חוק בוין:
 $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור:
 $I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k T} - 1}$



קבוע בולצמן:
 $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

קבוע פלאנק:
 $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

התנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום היא $E_{min} = hf$

- אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי:
 $E = nhf$
 כאשר n הוא המספר הקוונטי
 $n = 1, 2, 3, \dots$

התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי:
אנרגיה של פוטון יחיד (f - תדירות האור):
 $E = hf$

תדירות סף (W_0 - פונקציית העבודה של המתכת):
 $hf_0 = W_0$

אנרגיה קינטית מקסי של האלקטרונים:
 $E_k = hf - W_0$

מתח עצירה:
 $eV_0 = E_{kmax}$

השוואה לתורה הגלית:
לפי התורה הפוטונית

1. עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא לאנרגיה של כל אחד מהם.

2. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם.

3. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

- לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:
GOOL

אנרגיה של פוטון יחיד:
 $E = hf$

תנע של פוטון:
 $p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$

מסת מנוחה של פוטון:
 $m = 0$

אפקט קומפטון:
GOOL

הסחת קומפטון:
 $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

- אורך גל של האלקטרון החופשי.
אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:
GOOL

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען

2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסית לכל חלקיק mc^2 .

3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.

4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

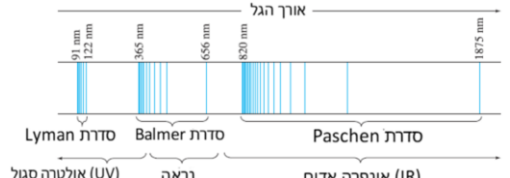
אורך גל דה ברולי של חלקיק:
 $\lambda = \frac{h}{p}$

$p = mv$ לא יחסותי, $p = mv\gamma$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום:
GOOL

אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן:
 $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$

קבוע Rydberg:
 $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$



בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:

1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.

2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

GOOL

חיבור תנ"ז:

חיבור שני ספינים: $|S_1 - S_2| \leq S < S_1 + S_2$
 S הוא של כל המערכת והוא לא קבוע בניגוד לחלקיק בודד.
 $-S \leq m_S \leq S$
 $|S, m_S\rangle$ עבור שני חלקיקים עם ספין חצי:
 מצבי טריפלט: $|1, -1\rangle \rightarrow |\downarrow\downarrow\rangle$
 $|1, 1\rangle \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle$; $|1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$
 מצב סינגלט: $|0, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$
 תנ"ז כולל: $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$
 אותם יחסי חילוף כמו של התנ"ז המסילתי והספין.
 $\hat{J}_z f = \hbar m_j f$; $\hat{J}^2 f = \hbar^2 j(j+1) f$
 $m_j = m_l + m_s$; $|l - S| \leq j \leq l + S$

$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$; $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
 $(A^\dagger)^\dagger = A$; $(\langle\psi_1|A^\dagger|\psi_2\rangle)^* = \langle\psi_2|A|\psi_1\rangle$
 $(AB)^T = B^T A^T$; $\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = \langle A^\dagger\psi_1|\psi_2\rangle$
 - הגודל של עי"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.
 אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים
 נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.
פונקציות של אופרטורים והפרופוגטור GOOL
 אם $f(x) = \sum_n \alpha_n x^n$ אז ניתן להגדיר $f(\hat{A}) = \sum_n \alpha_n \hat{A}^n$
 אם ורק אם $\hat{A}$ אלכסונית ו- a_i הם הע"ע שלה
 כלומר אם $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$
 אז:
 $\hat{B} = f(\hat{A}) = \begin{pmatrix} f(a_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(a_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$
 זהויות:
 אם $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ אז $[\hat{A}, f(\hat{B})] = 0$
 אם $[\hat{A}, \hat{B}] = cI$ כאשר I היא מטריצת יחידה ו- c קבוע. אז
 $[\hat{A}, f(\hat{B})] = c \frac{df(\hat{B})}{d\hat{B}}$
 אם $f(x)$ ממשי (ואנליטית), כלומר ניתן לפתח אותה לטור)
 אז $f^\dagger(\hat{A}) = f(\hat{A}^\dagger)$
 הפרופוגטור:
 $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$
 $\hat{U}(t) = \sum_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |E_n\rangle \langle E_n| = e^{-i\frac{\hat{H} t}{\hbar}}$
 הפרופוגטור הוא אופרטור אוניטרי ולכן הנורמה של
 פונקציית הגל נשמרת במהלך ההתפתחות בזמן.

GOOL

תנ"ז מסילתי והספין:

התנ"ז בקואורדינטות כדוריות:
 $\hat{L}_z = (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \varphi}$
 $\hat{L}_x = -i\hbar \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$
 $\hat{L}_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$
 $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$
 $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$
 $\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar \hat{L}_z$
 $\hat{L}_- \hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar \hat{L}_z$
 יחסי החילוף של התנ"ז המסילתי:
 $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$; $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$
 $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$; $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$
 $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm$; $[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$
 $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$
 $L_\pm Y_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_l^{m \pm 1}$
 מטריצות התנ"ז עבור $l = 1$:
 $\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $\hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{L}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 ספין - אותם יחסי חילוף כמו התנ"ז:

$\hat{S}_z f = \hbar m_s f$
 $\hat{S}^2 f = \hbar^2 S(S+1) f$
 $-S \leq m_s \leq S$ קפיצות של 1
 m_s, S יכולים להיות חצי שלמים.
 S קבוע ותלוי רק בסוג החלקיק. פרמיונים - חצי שלם,
 בוזונים - ספין שלם.
 ספין חצי:
 $S = \frac{1}{2}$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$
 $|x_+\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\uparrow\rangle$; $|x_-\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\downarrow\rangle$
 $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$
 $\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$
 פונקציית ספין כללית:
 $|x\rangle = \alpha |x_+\rangle + \beta |x_-\rangle$
 המילטוניון פריק:
 $\hat{H}(\hat{X}, \hat{P}, \hat{S}) = \hat{H}_0(\hat{X}, \hat{P}) + \hat{H}_S(\hat{S})$
 במקרה זה ניתן לפתור את משוואת שרדינגר לספין
 ולמרחב בנפרד.