

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

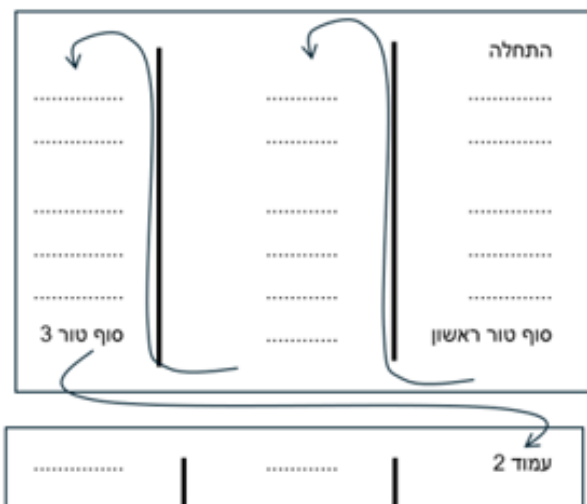
עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

$\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle$ - כתיב נוסף:

$$\langle \hat{Q} \psi | = (\hat{Q} | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | \hat{Q}^\dagger$$
$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משוחלפת:

צמד הרמיטי:

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$

מטריצת יחידה:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

כפל מטריצות: $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$

כפל מטריצות הוא לא חילופי: $AB \neq BA$

יחס חילוף בין מטריצות: $[A, B] = AB - BA$

מטריצה ההופכית: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

מטריצה אוניטרית: $U^\dagger = U^{-1}$

זהויות:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger; \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A; \quad (\langle \psi_1 | \hat{A}^\dagger | \psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$$

$$(AB)^T = B^T A^T; \quad \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

- הגודל של ע"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.

אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.

פונקציות של אופרטורים והפרופוגטור

אם $f(\hat{A}) = \sum_n \alpha_n \hat{A}^n$ אז ניתן להגדיר $f(x) = \sum_n \alpha_n x^n$

אם ורק אם $\hat{A}$ אלכסונית ו- a_i הם הע"ע שלה

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

כלומר אם

אז:

$$\hat{B} = f(\hat{A}) = \begin{pmatrix} f(a_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(a_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

זהויות:

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = 0 \text{ אז } [\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = cI \text{ כאשר } I \text{ היא מטריצת יחידה ו- } c \text{ קבוע. אז}$$

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = c \frac{df(\hat{B})}{dx}$$

אם $f(x)$ ממשיית (ואנליטית, כלומר ניתן לפתח אותה לטור)

$$f^\dagger(\hat{A}) = f(\hat{A}^\dagger)$$

אז הפרופוגטור:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle$$

$$\hat{U}(t) = \sum_n e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} |E_n\rangle \langle E_n| = e^{-i \frac{\hat{H} t}{\hbar}}$$

הפרופוגטור הוא אופרטור אוניטרי ולכן הנורמה של

פונקציית הגל נשמרת במהלך ההתפתחות בזמן.

אופרטור העלאה והורדה באוסילטור הרמוני:

אופרטור ההורדה (או השמדה):

$$\hat{a} |\psi_n\rangle = \sqrt{n} |\psi_{n-1}\rangle; \quad \hat{a} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p}\right)$$

אופרטור ההעלאה (או יצירה):

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p}\right)$$

$$\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\psi_{n+1}\rangle$$

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(\hat{a} \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1; \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n \left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x\right]$$

$$H_0(y) = 1; \quad H_2(y) = -2(1 - 2y^2)$$

$$H_1(y) = 2y; \quad H_3(y) = -12\left(y - \frac{2}{3}y^3\right)$$

וע"ע: a (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מודד את האנרגיה):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

אופרטורים הרמיטיים

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי.

כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה: $(\hat{A}\psi)^* = \psi^* \hat{A}$ לכל הפונקציות במרחב,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \psi_1)^* \psi_2 dx$$

או תכונות של אופרטור הרמיטי:

1. ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.

2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.

3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.

4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל

אם ϕ_n ו- λ_n הן הפ"ע וע"ע של האופרטור $\hat{A}$

אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

$$\Psi(x, t) = \sum \alpha_n \phi_n$$

אם $|\alpha_n|^2$ זה ההסתברות להיות במצב ϕ_n או ההסתברות

למדוד את הערך λ_n . הערכים המדידים היחידים של גודל

מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו

גודל.

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^* \Psi(x, t) dx$$

במקרה הרציף:

$$|\alpha_n|^2 \rightarrow |\alpha(k, t)|^2 dk; \quad \lambda_n \rightarrow \lambda(k); \quad \phi_n \rightarrow \phi(k)$$

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k, t) \phi(k) dk$$

$$\alpha(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) \Psi(x, t) dx$$

יחס החילוף

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.

אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס

החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).

יחס החילוף של המיקום עם התנע:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

אם"ם האופרטורים $\hat{A}$ ו- $\hat{B}$ מתחלפים אז קיים סט של

פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.

אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם

בו זמנית בדיוק אינסופי.

אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |[\hat{A}, \hat{B}]|$$

בניהם לפי:

משפט ארנפס

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת

של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

ייצוג באמצעות אלגברה לינארית:

תכונות המכפלה הפנימית:

$$\langle v | u \rangle = \langle u | v \rangle^*$$

$$\langle v | v \rangle = \langle v | u \rangle \langle u | v \rangle = |\langle u | v \rangle|^2$$

$$\langle v | v \rangle = 0 \text{ אז } |v\rangle = |0\rangle$$

$$\langle v | \alpha | u \rangle + \beta \langle v | k \rangle = \alpha \langle v | u \rangle + \beta \langle v | k \rangle$$

הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$$

נורמה:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum \alpha_i^* \beta_i \text{ כאשר } |\psi_1\rangle = \sum \alpha_i |\psi_i\rangle \text{ ו- } |\psi_2\rangle = \sum \beta_i |\psi_i\rangle$$

המקדמים של פונקציות הגל באותו בסיס

אי שוויון שוורץ:

$$|\langle a | b \rangle|^2 \leq \langle a | a \rangle \langle b | b \rangle$$

$$\cos \theta = \frac{\langle a | b \rangle \langle b | a \rangle}{\langle a | a \rangle \langle b | b \rangle}$$

זווית מוכללת בין וקטורים:

$$|\langle a | \alpha | b \rangle| \leq |\alpha| |\langle a | b \rangle|$$

אי שוויון המשולש:

אופרטורים בייצוג אלגברי

אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

- האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i (כפול סקלר

כלשהו): i, j שורה, $Q_{ij} = \langle e_i | \hat{Q} | e_j \rangle$

- אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז

המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על

האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה

מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים):

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

מהירות החבורה:

יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל- k

פיזור

מקדם העברה (ההסתברות לעבור):

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

$$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$$

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

- עבור מדרגת פוטנציאל

$$E > U_0$$

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

- כאשר $E < U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק

"כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.

- כאשר $E > U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף

ורמות האנרגיה רציפות.

פונקציית דלתא של דיראק

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} \text{ או } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

כאשר a הולך לאפס.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא:

$$E < 0 \text{ ו- } V(x) = -a\delta(x)$$

$$E = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2} \text{ ו- } \psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$$

נקבל מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב- a (גודל הבור).

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$$

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{1}{1 + \beta^2}, \quad \beta = \frac{am}{\hbar^2 k}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

עבור: $V(x) = +a\delta(x)$, $E, V(x)$ חייב להיות גודל מאפס

והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי

כאשר $E > 0$.

פוטנציאלים תלת מימדיים

$$a \times b \times c$$

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}\right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2} k_y x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

$$E = \left(n_x - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_z$$

ננון: כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא

מתרחש במימד אחד).

דרגת הניון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש

לאנרגיה.

פונקציית גל כתלות בזמן

$$\Psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}}$$

כאשר $\psi_n(x)$ הן פתרונות המצבים העמידים ו- E_n היא

האנרגיה של כל מצב.

$|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x, 0) dx$$

- אם $\Psi(x, 0)$ מנורמלת אז $\Psi(x, t)$ מנורמלת לכל t .

אופרטורים

אם $\hat{Q}\psi = \lambda\psi$, אז ψ היא פ"ע ו- λ הוא ע"ע.

פ"ע של אופרטור התנע:

$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

הע"ע של אופרטור התנע:

$$\hbar k$$

פ"ע של אופרטור המיקום:

$$\psi(x) = \delta(x - a)$$