

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה:

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

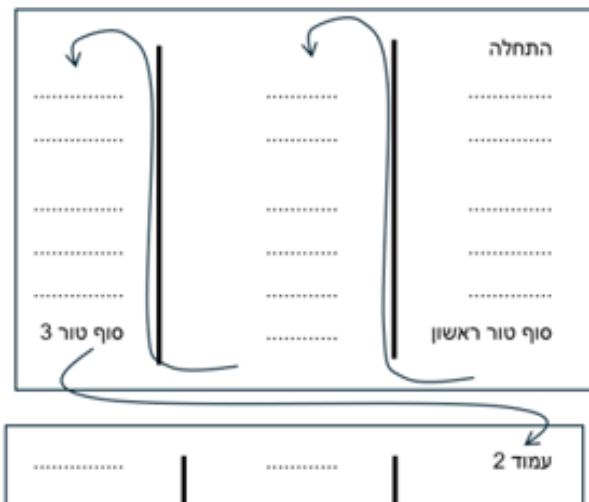
ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את
חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית
ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר
העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים,
תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

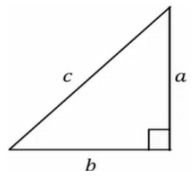
מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.
ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר
מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים
בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.



ניצב שמול יתר
 $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
 ניצב ליד יתר
 $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
 ניצב שמול ליד ניצב
 $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

ניצב ליד ניצב שמול
 $\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan \alpha}$

$a^2 + b^2 = c^2$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$90^\circ - \alpha$
$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$; $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$	
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$90^\circ + \alpha$
$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$; $\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$	
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$180^\circ - \alpha$
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$-\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$	2α
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$	$\alpha \pm \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	

סכום והפרש של פונקציות:

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

פתרון משוואות טריגונומטריות:

$x_1 = \alpha + 2\pi k$	$\sin x = \sin \alpha$
$x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$	
$x_1 = \alpha + 2\pi k$	$\cos x = \cos \alpha$
$x_2 = -\alpha + 2\pi k$	
$x = \alpha + \pi k$	$\tan x = \tan \alpha$

נגזרות ואינטגרליים:

נגזרת של מכפלה:

$y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
 כלל שרשרת: אם y היא פונקציה של x ו- x הוא פונקציה של t אז:

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$
 $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$; $\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$; $\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$; $\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$
 $\frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}$

אינטגרל היא פעולה הפוכה לנגזרת, מבצע סכימה על ערכי הפונקציה ונותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה. אינטגרל לא מסוים- מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל. אינטגרל מסוים- מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל:

$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$
 קואורדינטות גליליות: (r, θ, z)
 $x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$
 $z = z$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$dl = dr/r d\theta$ (טבעת) / dz (קליפה גלילית דקה) / $rd\theta dz$ (דיסקה) / $dr dz$ (גליל מלא או קליפה גלילית עבה)
 $dv = r dr d\theta dz$ (קואורדינטות כדוריות: (r, θ, ϕ))
 $z = r \cos \phi$
 $x = r \sin \phi \cos \theta$
 $y = r \sin \phi \sin \theta$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
 $dl = dr/r \sin \phi d\theta / r d\phi$
 $ds = r^2 \sin \phi d\theta d\phi$ (כדור מלא / קליפה כדורית עבה)
 צפיפות נפחית/משטחית/אורכית:
 $\rho = \frac{M}{V}$; $\sigma = \frac{M}{S}$; $\lambda = \frac{M}{l}$
 V, S, l הם נפח, שטח ואורך הגוף.
 אלמנט מסה אינפיניטסימלי אורכי/משטחי/נפחי:
 $dm = \lambda dl / \sigma ds / \rho dv$

דל/דס/דו - ראו קואורדינטות וקטורים

פירוק לרכיבים:

 $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$
 $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$
 $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

כפל בסקלר: $\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$
 מכפלה סקלרית: שתי דרכים לביצוע המכפלה:
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$
 זווית בין הוקטורים.
 תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
 מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת, זו דרך לבדוק האם וקטורים מאונכים.
 פתיחת סוגרים והעלאה בריבוע:

$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
 $(\vec{A} + \vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$
 זווית בין שני וקטורים:
 $\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$

וקטור יחידה:

וקטור בשלושה מימדים:
 $0 \leq \varphi \leq \pi$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

$A_z = |\vec{A}| \cos \varphi$
 $A_x = |\vec{A}| \sin \varphi \cos \theta$
 $A_y = |\vec{A}| \sin \varphi \sin \theta$

פירוק לרכיבים:
 $A_{xy} = |\vec{A}| \sin \varphi$; $A_z = |\vec{A}| \cos \varphi$
 $A_x = |\vec{A}| \sin \varphi \cos \theta$; $A_y = |\vec{A}| \sin \varphi \sin \theta$
 מכפלה וקטורית:
 דרך 1 לעשות את המכפלה עם דטרמיננטה:
 $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

דרך 2 לפי גודל וכיוון בנפרד:
 $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| |\sin \alpha|$
 גודל המכפלה הוא:
 וכיוון לפי כלל יד ימין:

שימו לב שאתם עם יד ימין!!
 בתמונה השמאלית, קודם לעשות אקדח ואחר כך לפתוח את האמה!

גרדיאנט בקרטזיות:
 $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$
 גרדיאנט בגליליות:
 $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$
 בכדוריות (*):
 $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
 רוטור (Rot/Curl) בקרטזיות:

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$
 בגליליות:

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$
 בכדוריות (*):
 $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (F_\theta \sin \phi) - \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cdot F_\theta) \right) \hat{\phi}$

שימו לב שהזווית ϕ עם ציר ה-z והזווית θ עם ציר ה-x (תנועה בקו ישר (מימד אחד))

מהירות רגעית:
 $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
 מהירות ממוצעת:
 $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$
 תאוצה רגעית:
 $a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$
 תאוצה ממוצעת:
 $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$
 קשרים הפוכים:
 $x(t) = \int v(t) dt$
 $v(t) = \int a(t) dt$

את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות).
 מיקום ומהירות כתלות בזמן בתאוצה קבועה בלבד:

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$; $v(t) = v_0 + a t$
 שטחים מתחת לגרף הפונקציה (גם בתאוצה משתנה):
 השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות כתלות בזמן שווה להעתק, כאשר שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי (אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרך).
 השטח מתחת לגרף של התאוצה כתלות בזמן שווה לשינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי).

תנועה במרחב (דו ותלת מימד):

וקטור המיקום:
 $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
 וקטור ההעתק:
 $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

וקטור המהירות הממוצעת (velocity):
 $\bar{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

וקטור המהירות הרגעית (velocity):
 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

וקטור התאוצה הממוצעת:
 $\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

וקטור התאוצה הרגעית:
 $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

גודל המהירות (Speed): $|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$, כאשר s זה הדרך.

משוואת מסלול (דו מימד): פונקציה מהצורה $y(x)$.
 סרטוט של הפונקציה הוא המסלול של הגוף במישור. ניתן למצא את המשוואה באמצעות בידוד משתנה הזמן מהפונקציה $x(t)$ והצבה ב $y(t)$.

תנועה יחסית (טרנס' גליליי)

המיקום, המהירות והתאוצה של גוף 1 ביחס לגוף 2:
 $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$; $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$; $\vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$
 הנוסחה וקטורית אבל אפשר להשתמש לכל ציר בנפרד.
 שיטה שנייה- שימוש בתרשים וקטורים:

- נצייר ראשית ונשרטט את הוקטורים $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_0$ יוצאים מהראשית לפי האינפורמציה הנתונה בתרגיל (הגודל והכיוון שלהם).
- נצייר ראשית צירים של הצופה בקצה הוקטור $\vec{r}_0$.
- נשרטט את הוקטור $\vec{r}_{1,0}$ מהראשית של הצופה לפי הנתונים בתרגיל וכך שהראש שלו נפגש עם הראש של הוקטור $\vec{r}_1$.
- נעשה טריגו ונמצא את נתוני הוקטורים החסרים.

צופה 0

 מעבדה/קרקע

משפט הקוסינוס (לכל סוגי המשולשים):

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$

γ – הזווית מול הצלע c (יכולה להיות כל צלע במשולש).

משפט הסינוסים (לכל סוגי המשולשים):

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

γ הזווית מול הצלע c , β הזווית מול b , α הזווית מול a

קפיצים

חוק הוק – הכוח של קפיץ:
 $\vec{F} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0)$

כ"ל לגבי y ו- z , לחישוב dm הסתכלו במבוא המתמטי.

מומונט התמד **GOOL**

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)

מומונט התמד של מערכת גופים נקודתיים: $I = \sum m_i r_i^2$

משפט שטיינר: $I' = I_{c.m.} + md^2$

באשר d המרחק בין הצירים ו m היא המסה הכוללת של הגוף.

הרה: משפט שטיינר פועל רק לצירים מקבילים, עובר אחד הצירים עובר במרכז המסה.

אדטיביות: ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק

וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל. $I_T = I_1 + I_2$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו:

$$I = mR^2$$

טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי:

$$I_{c.m.} = mR^2$$

דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z-אנך לדיסקה

$$I_{c.m.} = \frac{1}{2} mR^2$$

דיסקה במרכז מסה סביב ציר x-במישור הדיסקה

$$I_{c.m.} = \frac{1}{4} mR^2$$

מוט במרכז המסה

$$I_{c.m.} = \frac{1}{12} mL^2$$

מוט בקצה

$$I = \frac{1}{3} mL^2$$

כדור מלא במרכז מסה

$$I_{c.m.} = \frac{2}{5} mR^2$$

תיבה או לוח במרכז מסה

$$I_{c.m.} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$$

נוסחה המקשרת בין צירים שונים: $I_z = I_x + I_y$

אם $I_x = I_y$ (בדרכי מסמטריה) אז $I_z = 2I_x$

מבנה הגוף סימטרי לאורך ציר z: מומנט ההתמד של

הגוף סביב ציר z יהיה כמו של גוף משטחי במישור xy.

לדוגמה מומנט ההתמד של גליל יהיה כמו של דיסקה

ומומנט ההתמד של קוביה יהיה כמו של מלבן שהוא בסיס

הקוביה.

חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח: $I = \int r^2 dm$

כאשר r הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא

מהאשית). אם ציר הסיבוב הוא ציר z: $r^2 = x^2 + y^2$

מומנט כוח

מומנט כוח: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה מועל

הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או

באמצעות גודל וכיוון)

גודל המומנט: $|\vec{\tau}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| r_{\perp}$

כאשר $r_{\perp}$ הוא הרכיב של $\vec{r}$ המאונך לכוח

כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

תנע זוויתי (תנ"ז)

תנ"ז: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{r}$ הוא וקטור המיקום של הגוף, $\vec{p}$ התנע הקווי

עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי:

$|\vec{L}| = mvd$

כאשר d זה המרחק האפקטיבי.

v - המהירות.

הקשר בין תנ"ז

למומנט כוח: $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

חוק שימור התנע הזוויתי:

אם $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ אז התנע הזוויתי נשמר

תנ"ז של תנועה משולבת, מערכת גופים שמסתובבים סביב

מרכז מסה שני: $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר $\vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$ זה התנע הזוויתי של מרכז המסה

כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת

ו- $\vec{L}_{c.m.}$ התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר

סך התנ"ז של הגופים במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת

מרכז המסה.

פרציה (פניפה):

לתנע הזוויתי יש רכיב במישור xy שמתוכם סביב ציר z. נגזרת בזמן של הרכיב הזה נותנת לנו את מומנט הכוח שפועל על המערכת.

גוף קשיח

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל נקודות על הגוף

מבצעות תנועה מעגלית באותה מהירות הזוויתית (אך לא

באותה מהירות קווית)

תנע קווי של גוף קשיח:

תנ"ז:

גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים

בגוף אותה מהירות קווית): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$

תנ"ז גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע: $\vec{L} = I \vec{\omega}$

כאשר I מומנט ההתמד ביחס לציר

תנ"ז של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב

מרכז המסה): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר $\vec{L}_{c.m.}$ הוא התנ"ז ביחס לציר העובר במרכז המסה

ושווה ל- $\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.} \vec{\omega}$

אנרגיה קינטית סיבובית:

סביב ציר קבוע כלשהו:

תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה):

תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (*):

$E_k = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + m \vec{r}_{c.m.,o} \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$

כאשר I_0 מומנט ההתמד ביחס לציר, $\vec{v}_0$ היא המהירות

הציר ו- $\vec{r}_{c.m.,o}$ הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר.

השימוש בנוסחה מאוד נדיר

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

תנועה סיבובית	תנועה בקו ישר
θ	x
$\omega = \dot{\theta}$	$v = \dot{x}$
$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$	$a = \dot{v} = \ddot{x}$
I	m
L	p
τ	F

לגולל ללא החלקה: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח

מתאפסת (ביחס למשטח) $v_{c.m.} = \omega R$; $a_{c.m.} = aR$

- בגל"ה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.

א"ר נגשים לשאלות?

חוקי שימור

דרך כוחות ומומנטים

עושים:

1. אנרגיה אם כל הכוחות משמרים.

2. תנע קווי אם סכום הכוחות החיצוניים מתאפס.

3. תנ"ז אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס.

תנועה הרמונית פשוטה

משוואת התנועה:

$-k(x - x_0) = m\ddot{x}$

k ו- m הם קבועים חיוביים כלשהם.

x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.

$\ddot{x}$ - נגזרת שנייה של המשתנה.

חיובי להיות מינוס לפני k.

פתרון המשוואה:

$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma \vec{F} = 0$.

A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משיווי המשקל.

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - תדירות זוויתית

ϕ - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא

אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

של המקדם $\sqrt{\frac{k}{m}}$

של המקדם $\sqrt{\frac{x}{\ddot{x}}}$

ϕ , A מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית:

$v_{max} = \omega A$

מטוטלת פיזיקאלית:

גוף קשיח שתולים בנקודה כלשהי

$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$

I_0 - מומנט ההתמד בנקודת

התליה

האנרגיה: $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m A^2$

- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך

האמפליטודה.

- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית,

הפוטנציאלית מקסי בקצוות והקינטית בשיווי משקל.

תנועה הרמונית מרוסנת

בנוסף לכוח הקפיץ נוסף כוח מרוסן מהצורה: $F = -\lambda v$

v - מהירות הגוף ו- λ קבוע.

משוואת התנועה:

כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$

אין תנודות

$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$

מקרה (II) - ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$

דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

$z(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}$

מקרה (III) - ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא

תדירות התנודות.

$z(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \cos(\tilde{\omega} t + \phi)$; $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא

תדירות התנודות.

תנועה הרמונית ומאולצת

בנוסף לכוח הקפיץ והמרוסן נוסף כוח מאלץ מהצורה:

$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$

Ω ו- F_0 קבועים כלשהם

משוואת התנועה:

פתרון משוואת התנועה:

$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{homog}(t)$

$x_{homog}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת

שמתחלק לשלושת המקרים ...

- במצב עמיד (לאחר זמן רב) נוניח את הפתרון ההומוגני.

$A(\Omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$

$\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$

תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עברה

מקסימאלי. ניתן למצא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω . אם

$\Gamma \ll \omega_0$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות

התנועה ההרמונית ללא כוח מאלץ ומרוסן)

כבידה וכוח מרכזי

כוח מרכזי:

- תלוי רק ב r ובכיוון רדיאלי בלבד.

- כוח משמר (אנרגיה).

- לא מפעיל מומנט כוח ולכן הוא משמר גם תנע זוויתי.

כוח הכובד:

כאשר $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} m^{-3} kg^{-1} s^{-2}$

- קרוב לכדה"א

כאשר $r \approx R_E \approx 6400 km$; $M_E \approx 5.97 \cdot 10^{24} kg$

ו- $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$

האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד:

הצורה הזו של האנרגיה היא צורה כללית שיש לכוחות

נוספים והרבה פעמים רשמים אותה כ: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

$U(r) = -\frac{GMm}{r}$

$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

פירוק לרכיבים: $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$

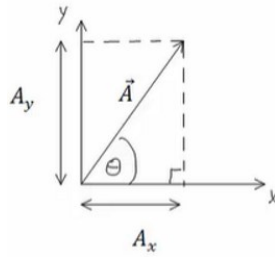
$$A_y = |\vec{A}| \sin \theta$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

כפל בסקלר:

$$\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$$



כאשר $\alpha = GMm$ קבוע כלשהו. עבור הכובד $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ המסלול של גוף תחת כוח הכובד:

כאשר $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{ma^2}}$; $r_0 = \frac{L^2}{ma}$; E היא האנרגיה הכוללת של הגוף ו- L הוא התנאי.

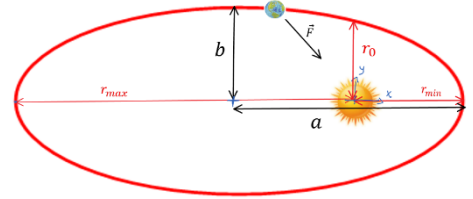
צורת המסלול מתחלקת ל-3 מקרים:

מקרה 1: מעגל $\varepsilon = 0$. במקרה הזה ניתן להשוות את

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \text{ ולקבל ש: } \frac{mv^2}{r}$$

מקרה 2: אליפסה $0 < \varepsilon < 1$

- מקור הכוח נמצא באחד ממוקדי האליפסה.



בד"כ נמצא המהירויות באמצעות שימור אנרגיה ותנאי:

$$v(r_{min}) = v_{max}; \quad v(r_{max}) = v_{min}$$

$$r_{min} = \frac{r_0}{1+\varepsilon}; \quad r_{max} = \frac{r_0}{1-\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{r_0}{1-\varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E}; \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

שטח האליפסה: $S = \pi ab$

מקרה 3: היפרבולה $\varepsilon \geq 1$ (פרבולה כאשר $\varepsilon = 1$):

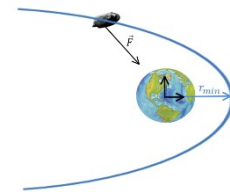
$$v(r_{min}) = v_{max}$$

מהירות מילוט -

המהירות הדרושה להגיע

לאינסוף.

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$



אנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית:

בבעיות שבהן האנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק ב- r ניתן לרשום את האנרגיה הכוללת של הגוף כתלות

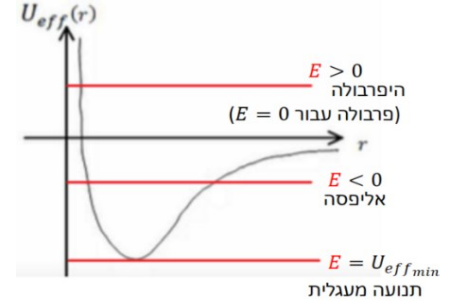
במשתנה r בלבד.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

כאשר:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \text{ נקבל את הגרף הבא עבור } U_{eff}:$$

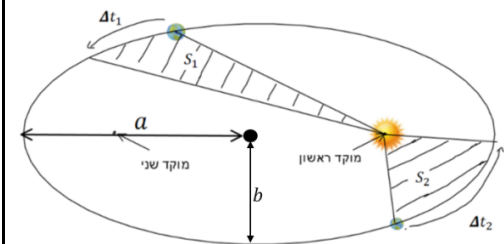


חוק 1 של קפלר: צורת המסלול של כל כוכב לכת סביב השמש היא אליפסה, שהשמש נמצאת באחד ממוקדיה.

החוק 2 - חוק השטחים השווים: הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש (רדיוס המקום) מכסה שטחים שווים במרחקים שווים. מעבר לכך ניתן להגיד שגם אם הזמנים לא שווים היחס של השטח חלקי הזמן קבוע.

$$\frac{S_1}{\Delta t_1} = \frac{S_2}{\Delta t_2} = \frac{S_T}{T}$$

$S_T = \pi ab$ - שטח כל האליפסה, a/b - מחצית הציר הראשי/משני של האליפסה, T - זמן המחזור



$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{GM}$$

חוק 3 קפלר:

M - מסת הכוכב שבמוקד

במקרה של מערכת בינארית שבה שני הכוכבים זזים

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

הנוסחה היא: