

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

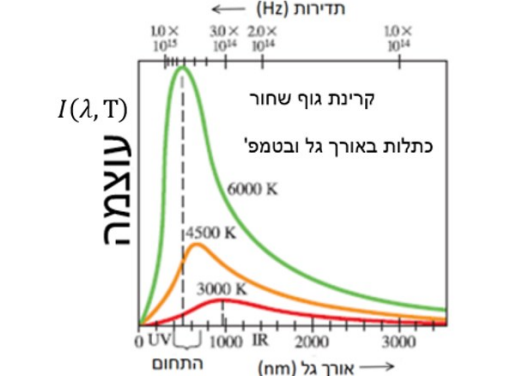
הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:

חוק בוין: $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$

λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$



קבוע בולצמן: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$

קבוע פלאנק: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

התנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של

מטען בתנועה הרמונית באטום היא $E_{min} = hf$

- אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך

המינימלי: $E = nhf$

כאשר n הוא המספר הקוונטי

התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי: $E = hf$

אנרגיה של פוטון יחיד (f - תדירות האור): $E = hf$

הניסוי הפוטואלקטרי: תדירות סף (W_0 - פונקציית העבודה של המתכת): $hf_0 = W_0$

אנרגיה קינטית מקסי' של האלקטרונים: $E_k = hf - W_0$

מתח עצירה: $eV = E_{kmax}$

השוואה לתורה הגלית: לפי התורה הפוטונית

1. עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא

אנרגיה של כל אחד מהם.

הגדלת העוצמה הגדילה את

מספר האלק' הנפלטים אבל

לא את האנרגיה הקינטית שלהם.

2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.

3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

- לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה

תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון: $E = hf$

אנרגיה של פוטון יחיד: $E = hf$

תנע של פוטון: $p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$

מסת מנוחה של פוטון: $m = 0$

אפקט קומפטון: $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$

הסתת קומפטון: $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן

המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

$\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות: $E = hf$

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען

2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית

מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .

3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף

(בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.

4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה

פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר: $\lambda = \frac{h}{p}$

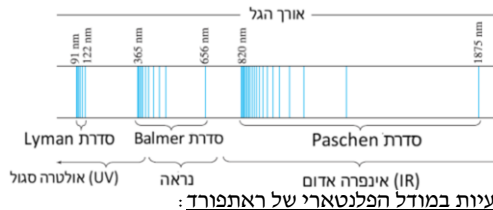
אורך גל דה ברויל של חלקיק: $\lambda = \frac{h}{p}$

$p = mv$ לא יחסותי, $p = \gamma mv$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום: $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$

אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$

קבוע Rydberg: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$



בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:

1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.

2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד

אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

מודל האטום של בוהר: $hf = E_U - E_L$

הנחות המודל:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים

ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים אורביטלים.

2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית

(למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד

אנרגיה במצבים אלו הם נקראים מצבים יציבים.

אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

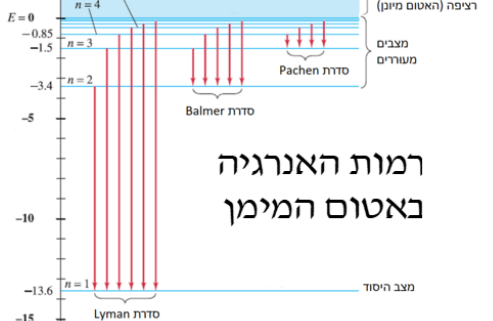
$hf = E_U - E_L$

הנחה על התנע הזוויתי ($n=1,2,3...$): $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$

הרדיוסים האפשריים (Z - מספר הפרוטונים): $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$

$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n: $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 eV}{n^2}$



רמות האנרגיה באטום המימן

טמפ' והתפשטות תרמית: $1u = 1.6605 \cdot 10^{-27} kg \sim m_p$

יחידת מסה אטומית: $m_a \approx A \cdot 1u$

מסת האטום ביחידת מסה אטומית: A - מספר המסה (מסר הפרוטונים והנייטרונים בגרעין)

מעבר מפרנהייט לצלזיוס: $T(^{\circ}C) = \frac{5}{9} [T(^{\circ}F) - 32]$

חוק הגז האידיאלי: $P = \frac{F}{A}$

לחץ: $P = \frac{F}{A}$

F - כוח. A - שטח עליו פועל הכוח.

הלחץ שמפעיל נוזל בנקודה מסוימת: $P = \rho_l gh$

h - גובה הנוזל מעל אותה הנקודה. ρ_l - צפיפות הנוזל.

- הלחץ של נוזל תלוי רק בגובה הנוזל (ובסוג הנוזל) ולא בכמות הנוזל.

לחץ אטמוספרי: $1 atm = 1.013 \cdot 10^5 Pa$

לחץ שלילי (תת לחץ): הוא לחץ יחסי (נמדד ביחס ללחץ

אטמוספרי) ונמדד מהלחץ האטמוספרי.

לחץ אבסולוטי: הוא הלחץ שנמדד ביחס ללחץ אפס

מוחלט (כאשר הכוח הוא אפס).

מעבר מצלזיוס לקלווין: $T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15$

מספר אבוגדרו: $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$

כמות של N_A חלקיקים (אטומים או מולקולות) נקראת

מול (mol) של החומר

מסה מולרית (המסה של מול אחד, או מספר אבוגדרו של

חלקיקים): $M_{mol} = N_A \cdot m_a$

m_a - מסה אטומית. N_A - מספר אבוגדרו.

המסה המולרית שווה למסה האטומית רק בגרם במקום

ביחידת מסה אטומית

הקשר למסת כל החומר: $m = N \cdot m_a = n \cdot M_{mol}$

n - מספר המולים בחומר. N - מספר החלקיקים הכולל

m - מסת כל החומר. M_{mol} - המסה המולרית.

מסה מולקולרית: לפעמים הכוונה למסה של מולקולה

אחת בחומר. ולפעמים למסה של מול אחד של מולקולות

בחומר (כמו המסה המולרית רק של מולקולות).

משוואת המצב של גז האידיאלי: $PV = nRT$ (או $PV = NkT$)

P - לחץ אבסולוטי. V - נפח. T - טמפ' בקלווין.

n - מספר המולים בחומר.

N - מספר החלקיקים הכולל בגז (אטומים או מולקולות)

$R = 8.314 \frac{J}{mol \cdot K} = 0.0821 \frac{L \cdot atm}{mol \cdot K} = 1.99 \frac{cal}{mol \cdot K}$

קבוע בולצמן: $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

- הנוסחה תקפה כל עוד הלחץ בסדר גודל של לחץ

אטמוספרי או פחות והטמפרטורה רחוקה מהטמפרטורה

בה גז הופך לנוזל (טמפרטורת הרתיחה)

Standard Temperature and Pressure - STP

$T = 0^{\circ}C = 273 K$, $P = 1 atm = 101,325 Pa$

התיאוריה הקינטית של הגזים

האנרגיה הקינטית הממוצעת של מולקולה בגז נמצאת

ביחס ישר לטמפרטורה: $\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$

$\bar{v}^2$ - ממוצע של המהירות בריבוע. m - מסת המולקולה.

T - טמפרטורה. קבוע בולצמן: $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

מהירות rms: $v_{rms} = \sqrt{\bar{v}^2}$

התפלגות מקסוול-בולצמן למהירויות:

$f(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

N - מספר המולקולות הכולל.

- תמיד נדבר על מספר המולקולות בטווח של

מהירויות. השטח מתחת לגרף הפונקציה

בין המהירויות v_1 ל v_2 נותן את מספר

המולקולות עם מהירויות בין v_1 ל v_2

- סך כל המולקולות: $N = \int_0^{\infty} f(v) dv$

v_p - השכיח, המהירות הכי נפוצה.

עבור טמפרטורה גדולה יותר הגרף זז ימינה ומתרחב.

חום וחוק הראשון של התרמודינמיקה

1 cal/1kcal היא כמות החום הדרושה בשביל להעלות

גרם/קילוגרם של מים במעלה אחת (צלזיוס):

1 cal = 4.186 J

1 kcal = 4.186 kJ (או Cal עם C גדולה)

אנרגיה פנימית - סך האנרגיות של כל המולקולות בחומר.

אנרגיה פנימית של גז אידיאלי מונואטומי: $E_{int} = \frac{3}{2} nRT$

אנרגיה פנימית של גז אידיאלי דו-אטומי: $E_{int} = \frac{5}{2} nRT$

n - מספר המולים של החומר. T - טמפרטורה.

חישוב חום: $Q = mc\Delta T$

m - מסת הגוף. c (קטנה) קיבול החום הסגולי (קיבול חום

של יחידת מסה) תלוי רק בסוג החומר. ΔT - שינוי בטמפ'.

C (גדולה) קיבול החום הכולל של הגוף: $C = mc$

קיבול חום סגולי c בטמפרטורה 20°C ובלחץ 1atm

חומר: $c [cal/(g \cdot ^{\circ}C)]$ $c [J/(kg \cdot ^{\circ}C)]$

אלומיניום: 0.22 900

אלכוהול (אתילי): 0.58 2400

נחושת: 0.093 390

זכוכית: 0.20 840

ברזל / פלדה: 0.11 450

עופרת: 0.031 130

שיש: 0.21 860

כספית: 0.033 140

כסף: 0.056 230

עץ: 0.40 1700

קרח (-5°C): 0.50 2100

מים נוזליים (15°C): 1.00 4186

קיטור (110°C): 0.48 2010

גוף האדם (ממוצע): 0.83 3470

חום כמס: חום שהולך לשינוי מצב הצבירה של החומר

ואינו משנה את הטמפרטורה: $Q = m \cdot L$

Q - החום הכמס בחומר. m - מסת הגוף.

משוואת שרדינגר: **GOOL**

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \Psi(x,t)$$

- תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

כאשר:

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי: **GOOL**

$$\psi(x) = A \sin(kx)$$

פונקציית הגל, חלקיק חופשי:

$$\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$$

חבילת גלים:

בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות לציר פונקציית גל:

- ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
- עבור המצב ה- n ציירו גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
- ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולחיצה).
- פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
- פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שהפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מנהור (tunneling): **GOOL**

מקדם ההעברה עבור $T \ll 1$ (ההסתברות לעבור):

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$$

הפוטנציאל במחסום, $U_0 > E$, אורך המחסום, l , $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$

מקדם החזרה:

$$R = 1 - T$$

אוסילטור הרמוני: **GOOL**

$$\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \quad b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{2} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_3(x) = 8\sqrt{3} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ-1:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

או שאפשר להתחיל את n מאפס ואז

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה

מהירות הפאזה (המהירות של אורד גל מסוים):

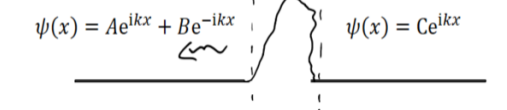
$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

מהירות החבורה:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל- k

פיזור **GOOL**



מקדם העברה (ההסתברות לעבור):

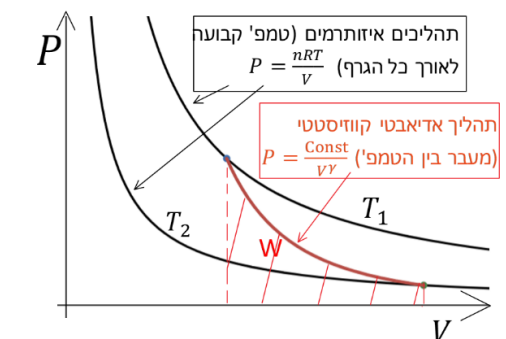
$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

$$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$$

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$



התפשטות חופשית: תהליך שבו גז מתפשט במרחב בצורה אדיאבטית ומבלי לעשות עבודה.

אי אפשר לצייר התפשטות חופשית בדיאגרמת $P-V$ מכיוון שמשני המצב לא מוגדרים במהלך ההתפשטות (הגז עדיין לא תופס את כל הנפח של הכלי והלחץ לא אחיד)

הולכה הסעה וקרינה **GOOL**

הולכה - מעבר אנרגיה על ידי התנגשויות בין המולקולות

$$\frac{dQ}{dt} = kA \frac{(T_1 - T_2)}{l}$$

קצב הולכת חום:

k - מוליכות תרמית - תלוי בסוג החומר

A - שטח חתך. l - אורך

R - value:

- תלוי גם בגודל החומר ולא רק בסוג.

- ערכים גבוהים מסמלים מבודד טוב.

הסעה - מעבר חום באמצעות תנועה של המולקולות בחומר.

קרינה: מועברת דרך גלים אלקטרומגנטיים, אינו דורש תווך.

משוואת סטפן בולצמן (קצב החום הנפלט מגוף ע"י

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon \sigma A T^4$$

קרינה):

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$$

T_1 - הטמפרטורה של הגוף הפולט.

T_2 - הטמפרטורה של הסביבה.

קרינת שמש:

הקבועה סולרי הוא $\frac{1350}{m^2 \cdot s} \frac{W}{m^2 \cdot s}$. האטמוספירה יכולה

לספוג עד 70% מהקרינה. ביום בהיר נעריך את הקבוע כ

1000 וכמות החום שגוף סופג מקרינת השמש:

$$\frac{dQ}{dt} = \left(1000 \frac{W}{m^2 \cdot s}\right) \epsilon A \cos \theta$$

θ - הזווית בין האנך למשטח של הגוף ובין קרני השמש.

פונקציית הגל של החומר: **GOOL**

ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:

$$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

נרמול:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.

מיקום ממוצע:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת

המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$

(ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).

שונויות:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

כאשר -

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

עקרון אי הוודאות של הייזנברג: **GOOL**

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

אי ודאות מיקום תנע:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot s$$

1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו זמן בו זמנית.

2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

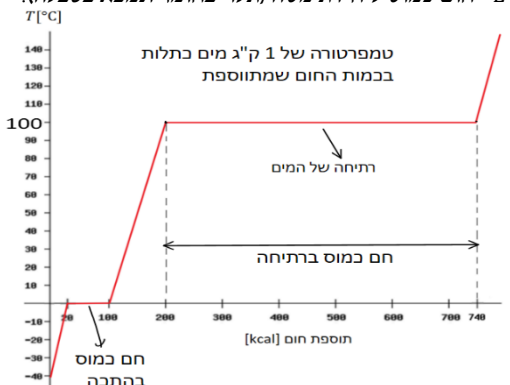
1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.

2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הוודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי:

$$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$$

L - חום כמס ליחידת מסה (תלוי בחומר ונמצא בטבלה).



חומר	נק' היתוך (°C)	L_f היתוך (kJ/kg)	נק' רתיחה (°C)	L_v אידוי (kJ/kg)
חמצן	-219	14	-183	210
חנקן	-210	26	-195.8	200
אתנול	-114	104	78	850
אמוניה	-117	33	-33.4	137
מים	0	333	100	2260
עופרת	327	25	1750	870
כסף	961	88	2193	2300
ברזל	1808	289	3023	6340
טונגסטן	3410	184	5900	4800

החוק הראשון של התרמודינמיקה: $\Delta E_{int} = Q - W$

או בצורה רחבה יותר: $\Delta U + \Delta E_k + \Delta E_{int} = Q - W$

ΔE_{int} - שינוי באנרגיה פנימית.

Q - חום. אם חום נכנס למערכת אז Q חיובי ואם חום יוצא מהמערכת אז Q שלילי

W - עבודה שנעשת מכל סיבה אחרת. אם המערכת מבצעת עבודה אז W יהיה חיובי ואם מתבצעת עבודה על המערכת אז W יהיה שלילי.

תהליך איזותרמי (טמפרטורה קבועה):

מתרחש כאשר המערכת צמודה למאגר חום גדול והתהליך הוא קוויזיסטטי (מאוד איטי)

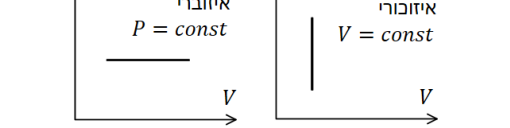
$$T = const \Rightarrow \Delta E_{int} = 0 \Rightarrow Q = W$$

תהליך אדיאבטי (אין מעבר חום $Q = 0$)

מתרחש אם המערכת מבודדת מאוד או אם התהליך מהיר ואז חום (שזורם לאט בדרך"כ) לא מספיק לעבור.

$$Q = 0 \Rightarrow \Delta E_{int} = W$$

תהליך איזוברי (לחץ קבוע) ותהליך איזוכורי (נפח קבוע):



חישובי העבודה שנעשת בשינוי נפח: $W = \int P dV$

- הנוסחה נכונה לגזים, נוזלים ומוצקים.

- העבודה היא גם השטח מתחת לגרף $P(V)$

- בתהליך איזוכורי העבודה מתאפסת (כי אין שינוי נפח).

- בתהליך איזוברי העבודה שווה $P \Delta V$ כי הלחץ קבוע (לא צריך אינטגרל).

- גז בתהליך איזותרמי נעשה אינטגרל ונציב $P = \frac{nRT}{V}$

קיבול חום לגזים:

גזים קיבול החום משתנה בהתאם לתהליך

$$Q_V = nC_V \Delta T$$

$$Q_P = nC_P \Delta T$$

n - מספר המולים של החומר.

C_P/C_V (גדולה C) - קיבול חום בנפח/לחץ קבוע למול

(בניגוד ל C גדולה במוצקים ונוזלים, שם קיבול כל המסה)

$$C_V = m_{mol} c_V ; C_P = m_{mol} c_P$$

c_P/c_V - קיבול חום בנפח/לחץ קבוע (ליחידת מסה)

$$M_T = nm_{mol}$$

הפרש קיבולי החום תמיד קבוע:

$$C_P - C_V = R$$

- גז בתהליך אדיאבטי קוויזיסטטי (מאוד איטי) נעשה אינטגרל ונציב $P = \frac{const}{V^\gamma}$

- עבור מדרגת פוטנציאל

E
>

U

0

{\displaystyle E>U_{0}}

 וכאשר

U
(
x
)
{\displaystyle U(x)}

U
0

{\displaystyle U_{0}}

T
=

4

k

1

k

2

(

k

1

+

k

2

)

2

{\displaystyle T={\frac {4k_{1}k_{2}}{(k_{1}+k_{2})^{2}}}}

R
=

(

k

1

−

k

2

)

2

(

k

1

+

k

2

)

{\displaystyle R={\frac {(k_{1}-k_{2})^{2}}{(k_{1}+k_{2})}}

 כאשר

E
<

U

(
±
∞
)

{\displaystyle E<U(\pm \infty)}

 נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.

- כאשר

E
>

U

(
±
∞
)

{\displaystyle E>U(\pm \infty)}

 נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

פונקציית דלתא של דיראק

הגדרות הפונקציה:

או

∫

−
∞

∞

δ
(
x
)
d
x
=
1

{\displaystyle \int _{-\infty }^{\infty }\delta (x)\,dx=1}

 או

δ

a

(
x
)
=

1

a

√
π

e

−

x

2

/

a

2

{\displaystyle \delta _{a}(x)={\frac {1}{a{\sqrt {\pi }}}e^{-x^{2}/a^{2}}}

 כאשר a הולך לאפס.

פיזור מפונקציית דלתא:

עבור

V
(
x
)
=
−
a
δ
(
x
)

{\displaystyle V(x)=-a\delta (x)}

 ו-

E
<
0

{\displaystyle E<0}

 נקבל

ψ
(
x
)
=

√
a
m

e

−

a
m

ℏ

2

|
x
|

{\displaystyle \psi (x)={\sqrt {am}}e^{-{\frac {am}{\hbar ^{2}}}|x|}}

 ו-

E
=
−

a

2

m

2
ℏ

2

{\displaystyle E=-{\frac {a^{2}m}{2\hbar ^{2}}}}

 מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב-

a

{\displaystyle a}

 (גודל הבור).

אם

E
>
0

{\displaystyle E>0}

R
=

|

B

|

2

|

A

|

2

=

β

2

1
+

β

2

{\displaystyle R={\frac {|B|^{2}}{|A|^{2}}}={\frac {\beta ^{2}}{1+\beta ^{2}}}}

T
=

|

C

|

2

|

A

|

2

=

1

1
+

β

2

,
β
=

a
m

ℏ

2

k

,
k
=

√
2
m
E

ℏ

{\displaystyle T={\frac {|C|^{2}}{|A|^{2}}}={\frac {1}{1+\beta ^{2}}},\beta ={\frac {am}{\hbar ^{2}k}},k={\frac {\sqrt {2mE}}{\hbar }}}

 עבור:

V
(
x
)
,
E
=
+
a
δ
(
x
)

{\displaystyle V(x),E=+a\delta (x)}

 חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר

E
>
0

{\displaystyle E>0}

.

פוטנציאלים תלת מימדים

**תיבה תלת מימדית בגודל

a
×
b
×
c

{\displaystyle a\times b\times c}

:**

ψ
(
x
,
y
,
z
)
=

8

a
b
c

sin
⁡
(

n

x

π

a

x
)
sin
⁡
(

n

y

π

b

y
)
sin
⁡
(

n

z

π

c

z
)

{\displaystyle \psi (x,y,z)={\sqrt[{8}]{\frac {8}{abc}}\sin \left({\frac {n_{x}\pi }{a}}x\right)\sin \left({\frac {n_{y}\pi }{b}}y\right)\sin \left({\frac {n_{z}\pi }{c}}z\right)}

E
=

π

2

ℏ

2

2
m

(

n

x

2

a

2

+

n

y

2

b

2

+

n

z

2

c

2

)

{\displaystyle E={\frac {\pi ^{2}\hbar ^{2}}{2m}}\left({\frac {n_{x}^{2}}{a^{2}}}+{\frac {n_{y}^{2}}{b^{2}}}+{\frac {n_{z}^{2}}{c^{2}}}\right)}

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

v
(
x
,
y
,
z
)
=

1
2

k

y

x

2

+

1
2

k

y

y

2

+

1
2

k

z

z

2

{\displaystyle v(x,y,z)={\frac {1}{2}}k_{y}x^{2}+{\frac {1}{2}}k_{y}y^{2}+{\frac {1}{2}}k_{z}z^{2}}

E
=
(

n

x

−

1
2

)
ℏ

ω

x

+
(

n

y

−

1
2

)
ℏ

ω

y

+
(

n

z

−

1
2

)
ℏ

ω

z

{\displaystyle E=\left(n_{x}-{\frac {1}{2}}\right)\hbar \omega _{x}+\left(n_{y}-{\frac {1}{2}}\right)\hbar \omega _{y}+\left(n_{z}-{\frac {1}{2}}\right)\hbar \omega _{z}}

 ניוו: כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא מתרחש במימד אחד).

דרגת הניוו מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

פונקציית הגל כתלות בזמן

ψ
(
x
,
t
)
=

∑

n

α

n

ψ

n

(
x
)

e

i

E

n

t

ℏ

{\displaystyle \Psi (x,t)=\sum _{n}\alpha _{n}\psi _{n}(x)e^{\frac {iE_{n}t}{\hbar }}}

 כאשר

ψ

n

(
x
)

{\displaystyle \psi _{n}(x)}

 הן פתרונות המצבים העמידים ו-

E

n

{\displaystyle E_{n}}

 היא האנרגיה של כל מצב.

|

α

n

|

2

{\displaystyle |\alpha _{n}|^{2}}

 הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

α

n

=

∫

−
∞

∞

ψ

n

∗
(
x
)
Ψ
(
x
,
0
)
d
x

{\displaystyle \alpha _{n}=\int _{-\infty }^{\infty }\psi _{n}^{*}(x)\Psi (x,0)\,dx}

 אם

Ψ
(
x
,
0
)

{\displaystyle \Psi (x,0)}

 מנורמלת אז

Ψ
(
x
,
t
)

{\displaystyle \Psi (x,t)}

 מנורמלת לכל t.

אופרטורים

אם

λ
ψ
=
λ
ψ
,
Q
ψ
=
Q
ψ

{\displaystyle \lambda \psi =\lambda \psi ,\;Q\psi =Q\psi }

 אז

ψ

{\displaystyle \psi }

 היא פ"ע ו-

λ

{\displaystyle \lambda }

 הוא ע"י"ע.

פ"ע של אופרטור התנע:

ה"ע"ע של אופרטור התנע:

פ"ע של אופרטור המיקום:

ה"י"ע:

a

{\displaystyle a}

 (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מוدد את האנרגיה):

ℏ

H
=
−

ℏ

2

2
m

∂

2

∂

x

2

+
V
(
x
)

{\displaystyle {\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {\partial ^{2}}{\partial x^{2}}}+V(x)}

אופרטורים הרמיטיים

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי.

כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה:

ψ

∗

A
^

ψ

{\displaystyle \psi ^{*}{\hat {A}}\psi }

 לכל הפונקציות במרחב, או

∫

−
∞

∞

ψ

1

∗

A
^

ψ

2

d
x
=

∫

−
∞

∞

(

A
^

ψ

1

)

∗

ψ

2

d
x

{\displaystyle \int _{-\infty }^{\infty }\psi _{1}^{*}{\hat {A}}\psi _{2}\,dx=\int _{-\infty }^{\infty }({\hat {A}}\psi _{1})^{*}\psi _{2}\,dx}

 תכונות של אופרטור הרמיטי:

- ערך התוחלת של אופרטור הרמטי תמיד ממשי.
- הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמטי הן אורתוגונליות.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל

אם

ϕ

n

{\displaystyle \phi _{n}}

 ו-

λ

n

{\displaystyle \lambda _{n}}

 הן הפ"ע וה"י"ע של האופרטור

A
^

{\displaystyle {\hat {A}}}

 אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

Ψ
(
x
,
t
)
=

∑

α

n

ϕ

n

{\displaystyle \Psi (x,t)=\sum \alpha _{n}\phi _{n}}

 זה ההסתברות להיות במצב

ϕ

n

{\displaystyle \phi _{n}}

 או ההסתברות למדוד את הערך

λ

n

{\displaystyle \lambda _{n}}

. הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

α

n

=

∫

−
∞

∞

ϕ

n

∗

Ψ
(
x
,
t
)
d
x

{\displaystyle \alpha _{n}=\int _{-\infty }^{\infty }\phi _{n}^{*}\Psi (x,t)\,dx}

 במקרה הרציף:

|

α

n

|

2

→

|

α
(
k
,
t
)

|

2

d
k
;

λ

n

→
λ
(
k
)
;

ϕ

n

→
ϕ
(
k
)

{\displaystyle |\alpha _{n}|^{2}\rightarrow |\alpha (k,t)|^{2}dk;\;\lambda _{n}\rightarrow \lambda (k);\;\phi _{n}\rightarrow \phi (k)}

Ψ
(
x
,
t
)
=

∫

−
∞

∞

α
(
k
,
t
)
ϕ
(
k
)
d
k

{\displaystyle \Psi (x,t)=\int _{-\infty }^{\infty }\alpha (k,t)\phi (k)\,dk}

α
(
k
,
t
)
=

∫

−
∞

∞

ϕ
(
k
)
Ψ
(
x
,
t
)
d
x

{\displaystyle \alpha (k,t)=\int _{-\infty }^{\infty }\phi (k)\Psi (x,t)\,dx}

יחס החילוף

[
A
^
,
B
^
]
=
A
^
B
^
−
B
^
A
^

{\displaystyle [{\hat {A}},{\hat {B}}]={\hat {A}}{\hat {B}}-{\hat {B}}{\hat {A}}}

.

אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).

יחס החילוף של המיקום עם התנע:

אם"ם האופרטורים

A
^

{\displaystyle {\hat {A}}}

 ו-

B
^

{\displaystyle {\hat {B}}}

 מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.

אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.

אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות

בניהם לפי:

משפט ארנפס

d

d
t

⟨
Q
⟩

=

i
ℏ

⟨
[
H
^
,
Q
^
]
⟩
+

⟨

∂
Q

∂
t

⟩

{\displaystyle {\frac {d}{dt}}\langle Q\rangle ={\frac {i}{\hbar }}\langle [{\hat {H}},{\hat {Q}}]\rangle +\left\langle {\frac {\partial Q}{\partial t}}\right\rangle }

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי:

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-r:

ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקצית הגל:

Ψ
(
r
,
θ
,
φ
)
=
R
(
r
)
θ
(
θ
)
ϕ
(
φ
)

{\displaystyle \Psi (r,\theta ,\varphi)=R(r)\theta (\theta)\phi (\varphi)}

**המשוואה ל-

θ
(
θ
)

{\displaystyle \theta (\theta)}

:**

1

θ
(
θ
)

sin
⁡
θ

∂

∂
θ

(
sin
⁡
θ

∂
θ

∂
θ

(
θ
)

)
+
l
(
l
+
1
)

sin

2

⁡
θ
=

m

2

{\displaystyle {\frac {1}{\theta (\theta)}}\sin \theta {\frac {\partial }{\partial \theta }}\left(\sin \theta {\frac {\partial \theta (\theta)}{\partial \theta }}\right)+l(l+1)\sin ^{2}\theta =m^{2}}

**משוואה ל-

ϕ
(
φ
)

{\displaystyle \phi (\varphi)}

:**

**פתרון ל-

θ
(
θ
)

{\displaystyle \theta (\theta)}

 ו-

ϕ
(
φ
)

{\displaystyle \phi (\varphi)}

:**

Y

l

m

(
θ
,
φ
)
=
θ
(
θ
)
ϕ
(
φ
)
=

ε

√

(
2
l
+
1
)
(
l
−
|
m
|
)
!

4
π
(
l
+
|
m
|
)
!

P

l

m

(
cos
⁡
θ
)

e

i
m
φ

{\displaystyle Y_{l}^{m}(\theta ,\varphi)=\theta (\theta)\phi (\varphi)=\varepsilon {\sqrt[{(2l+1)(l-|m|)!}]{4\pi (l+|m|)!}}P_{l}^{m}(\cos \theta)e^{im\varphi }}

ε
=

{

(
−
1

)

m

m
>
0

1

m
≤
0

{\displaystyle \varepsilon =\left\{{\begin{matrix}(-1)^{m}&m>0\\1&m\leq 0\end{matrix}}\right.}

 שלם.

P

l

m

(
x
)
=
(
1
−

x

2

)

|
m
|

2

(

d

d
x

)

|
m
|

P

l

(
x
)

{\displaystyle P_{l}^{m}(x)=(1-x^{2})^{\frac {|m|}{2}}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{|m|}P_{l}(x)}

P

l

(
x
)
=

1

2

l

!

(

d

d
x

)

l

(

x

2

−
1

)

l

{\displaystyle P_{l}(x)={\frac {1}{2^{l}l!}}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{l}(x^{2}-1)^{l}}

Y

0

0

=
(

1

4
π

)

1
2

;

Y

0

0

=
(

5

16
π

)

1
2

(
3
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle Y_{0}^{0}=\left({\frac {1}{4\pi }}\right)^{\frac {1}{2}};\;Y_{0}^{0}=\left({\frac {5}{16\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}(3\cos ^{2}\theta -1)}

Y

1

0

=
(

3

4
π

)

1
2

cos
⁡
θ
;

Y

2

±
1

=
∓
(

15

8
π

)

1
2

sin
⁡
θ
cos
⁡
θ

e

±
i
φ

{\displaystyle Y_{1}^{0}=\left({\frac {3}{4\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\cos \theta ;Y_{2}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {15}{8\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi }}

Y

1

±
1

=
∓
(

3

8
π

)

1
2

sin
⁡
θ

e

±
i
φ
;

{\displaystyle Y_{1}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {3}{8\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta e^{\pm i\varphi };}

Y

2

±
2

=
(

15

32
π

)

1
2

sin

2

⁡
θ

e

±
2
i
φ

{\displaystyle Y_{2}^{\pm 2}=\left({\frac {15}{32\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{2}\theta e^{\pm 2i\varphi }}

Y

3

0

=
(

7

16
π

)

1
2

(
5

cos

3

⁡
θ
−
3
cos
⁡
θ
)

{\displaystyle Y_{3}^{0}=\left({\frac {7}{16\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}(5\cos ^{3}\theta -3\cos \theta)}

Y

3

±
1

=
∓
(

21

64
π

)

1
2

sin
⁡
θ
(
5

cos

2

⁡
θ
−
1
)

e

±
i
φ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {21}{64\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)e^{\pm i\varphi }}

Y

3

±
2

=
(

105

32
π

)

1
2

sin

2

⁡
θ
cos
⁡
θ

e

±
2
i
φ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 2}=\left({\frac {105}{32\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{2}\theta \cos \theta e^{\pm 2i\varphi }}

Y

3

±
3

=
∓
(

35

64
π

)

1
2

sin

3

⁡
θ

e

±
3
i
φ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 3}=\mp \left({\frac {35}{64\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{3}\theta e^{\pm 3i\varphi }}

P

0

1

=
cos
⁡
θ
;

P

0

3

=

1
2

(
5

cos

3

⁡
θ
−
3
cos
⁡
θ
)

{\displaystyle P_{0}^{1}=\cos \theta ;P_{0}^{3}={\frac {1}{2}}(5\cos ^{3}\theta -3\cos \theta)}

P

1

1

=
sin
⁡
θ
;

P

1

3

=

3
2

sin
⁡
θ
(
5

cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{1}^{1}=\sin \theta ;P_{1}^{3}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}

P

0

2

=

1
2

(
3

cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{2}^{0}={\frac {1}{2}}(3\cos ^{2}\theta -1)}

P

1

3

=

1
2

sin
⁡
θ
(
5

cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{3}^{1}={\frac {1}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}

P

1

2

=
3
sin
⁡
θ
cos
⁡
θ
;

P

3

1

=

3
2

sin
⁡
θ
(
5

cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{1}^{2}=3\sin \theta \cos \theta ;P_{3}^{1}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}

P

2

2

=
3

sin

2

⁡
θ
;

P

3

3

=
15
sin
⁡
θ
(
1
−

cos

2

⁡
θ
)

{\displaystyle P_{2}^{2}=3\sin ^{2}\theta \;;\;P_{3}^{3}=15\sin \theta (1-\cos ^{2}\theta)}

אורתוגונליות:

∫

0

2
π

∫

0

π

[

Y

l

m

(
θ
,
φ
)

]

∗

[

Y

l

m

′

(
θ
,
φ
)
]
sin
⁡
θ
d
θ
d
φ
=

δ

l
l

′

δ

m
m

′

{\displaystyle \int _{0}^{2\pi }\int _{0}^{\pi }[Y_{l}^{m}(\theta ,\varphi)]^{*}\left[Y_{l}^{m'}(\theta ,\varphi)\right]\sin \theta \,d\theta \,d\varphi =\delta _{ll'}\delta _{mm'}}

המשוואה לחלק הרדיאלי:

1

R
(
r
)

∂

∂
r

(

r

2

∂
R
(
r
)

∂
r

)
−

2
m

r

2

ℏ

2

(
V
(
r
)
−
E
)
=
l
(
l
+
1
)

{\displaystyle {\frac {1}{R(r)}}{\frac {\partial }{\partial r}}\left(r^{2}{\frac {\partial R(r)}{\partial r}}\right)-{\frac {2mr^{2}}{\hbar ^{2}}}(V(r)-E)=l(l+1)}

R
(
r
)
=

r

−

ℏ

2

2
m

d

2

u
(
r
)

d

r

2

+
[
V
(
r
)
+

ℏ

2

l
(
l
+
1
)

r

2

]
u
(
r
)
=
E
u
(
r
)

{\displaystyle R(r)={\frac {r}{-\,{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {d^{2}u(r)}{dr^{2}}}+{\left[V(r)+{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {l(l+1)}{r^{2}}}\right]u(r)=Eu(r)}}}

פתרון עבור אטום המימן

E

n

=
−

m

k

2

e

4

1

2
ℏ

2

⋅

1

n

2

=

E

1

n

2

=

−
13.6
e
V

n

2

{\displaystyle E_{n}=-{\frac {mk^{2}e^{4}}{2\hbar ^{2}}}\cdot {\frac {1}{n^{2}}}={\frac {E_{1}}{n^{2}}}={\frac {-13.6eV}{n^{2}}}}

R

n
l

(
r
)
=

√

(

2

n
a

)

3

(
n
−
l
−
1
)
!

2
n
!
(
n
−
l
)

!

3

e

−

r

n
a

(

2
r

n
a

)

l

L

n
−
l
−
1

l

(

2
r

n
a

)

{\displaystyle R_{nl}(r)={\sqrt[{(2{\frac {2}{na}})^{3}}]{\frac {(n-l-1)!}{2n!(n-l)!^{3}}}}e^{-{\frac {r}{na}}}\left({\frac {2r}{na}}\right)^{l}L_{n-l-1}^{l+1}\left({\frac {2r}{na}}\right)}

רדיוס בוהר:

L

p

q
−
p

(
x
)
=
(
−
1

)

p

(

d

d
x

)

p

L

q

(
x
)

{\displaystyle L_{q-p}^{p}(x)=(-1)^{p}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{p}L_{q}(x)}

L

q

(
x
)
=

e

x

(

d

d
x

)

q

(

e

−
x

x

q

)

{\displaystyle L_{q}(x)=e^{x}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{q}\left(e^{-x}x^{q}\right)}

R

10

=
2

a

−

3
2

exp
⁡
(
−

r

a

)

{\displaystyle R_{10}=2a^{-{\frac {3}{2}}}\exp \left(-{\frac {r}{a}}\right)}

R

20

=

1

√
2

a

−

3
2

(
1
−

1
2

r

a

)
exp
⁡
(
−

r

2
a

)

{\displaystyle R_{20}={\frac {1}{\sqrt {2}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{2}}{\frac {r}{a}}\right)\exp \left(-{\frac {r}{2a}}\right)}

R

21

=

1

√
24

a

−

3
2

r

a

exp
⁡
(
−

r

2
a

)

{\displaystyle R_{21}={\frac {1}{\sqrt {24}}}a^{-{\frac {3}{2}}}{\frac {r}{a}}\exp \left(-{\frac {r}{2a}}\right)}

R

30

=

2

√
27

a

−

3
2

(
1
−

2
3

r

a

+

2
27

(

r

a

)

2

)
exp
⁡
(
−

r

3
a

)

{\displaystyle R_{30}={\frac {2}{\sqrt {27}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {2}{3}}{\frac {r}{a}}+{\frac {2}{27}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}

R

31

=

8

27
√
6

a

−

3
2

(
1
−

1
6

r

a

)
(

r

a

)
exp
⁡
(
−

r

3
a

)

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני: $U = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$ כאשר m הוא המספר הקוונטי של L_z .
 תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן: $\Delta E_z = \mu_B B \Delta m$; $\Delta m = \pm 1, 0$; התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפצל לשלושה קווים.
ספין ניסוי ושרן גרלך:

תנ"י כולל: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$
 כאשר $\vec{L}$ תנ"י מסילתי, $\vec{S}$ תנ"י כתוצאה מהספין.

$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$ גדולה - גודל התנ"י מהספין. s קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון $s = \frac{1}{2}$. עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם נקראים **בוזונים**.

$S_z = m_s \hbar$ $s > m_s > -s$ בקפיצות של 1
 עבור אלקטרון: $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
 מומנט מגנטי מהספין: $\vec{\mu}_s = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$
 פקטור g, עבור אלקטרון $g \approx 2.0023 \dots \approx 2$
אטומים מורכבים והטבלה המחזורית: **GOOL**

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: m_l, m_s, l, n . בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב- n וגם ב- l .
עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: m_l, m_s, n .
 ככל ש- l גדל (יש יותר תנ"י מסילתי) האנרגיה גדלה.
ייצוג באמצעות אלגברה לינארית: **GOOL**

תכונות המכפלה הפנימית:
 $\langle u|v \rangle = \langle v|u \rangle^*$ סקלר
 $\langle v|v \rangle$ תמיד ממשי גדול או שווה לאפס
 אם $\langle v|v \rangle = 0$ אז $|v\rangle = |0\rangle$
 אם $\langle v|(\alpha|u\rangle + \beta|k\rangle) = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|k\rangle$
 הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$\langle \psi_1|\psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$
 נורמה: $\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}$
 מכפלה פנימית: $\langle \psi_1|\psi_2 \rangle = \sum \alpha_i^* \beta_i$ כאשר α_i ו- β_i הם המקדמים של פונקציות הגל באותו בסיס

אי שוויון שורר: **GOOL**

$|\langle a|b \rangle|^2 \leq \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle$
 זווית מוכללת בין וקטורים: $\cos \theta = \frac{\sqrt{\langle a|b \rangle \langle b|a \rangle}}{\sqrt{\langle a|a \rangle \langle b|b \rangle}}$
 אי שוויון המשולש: $||\langle a \rangle + \langle b \rangle|| \leq |\langle a \rangle| + |\langle b \rangle|$
אופרטורים בייצוג אלגברי **GOOL**
 אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

- האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i (כפול סקלר כלשהו): $\langle e_i|\hat{Q}|e_j \rangle = Q_{ij}$, שורה, j עמודה.
 - אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של תהיה האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

- כתיב נוסף: $\langle \psi_1|\hat{Q}|\psi_2 \rangle = \langle \psi_1|\hat{Q}\psi_2 \rangle$
 $\langle \hat{Q}\psi| = (\hat{Q}|\psi\rangle)^\dagger = \langle \psi|\hat{Q}^\dagger$
 מטריצה משוחלפת: $A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

צמד הרמיטי: $A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$
 מטריצת יחידה:

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$
כפל מטריצות: $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$
כפל מטריצות הוא לא חילופי: $AB \neq BA$
יחס חילוף בין מטריצות: $[A, B] = AB - BA$

מטריצה ההופכית: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
 מטריצה אוניטרית: $U^\dagger = U^{-1}$
 זהויות:

$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 $(A^\dagger)^\dagger = A$; $(\langle \psi_1|\hat{A}^\dagger|\psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2|\hat{A}|\psi_1 \rangle$
 $(AB)^T = B^T A^T$; $\langle \psi_1|\hat{A}\psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1|\psi_2 \rangle$
 - **הגודל** של ע"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.
אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.

אופרטור העלאה והורדה באוסילטור הרמוני:
 אופרטור ההורדה (או השמדה):

$\hat{a}|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle$; $\hat{a} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$
 אופרטור ההעלאה (או יצירה):

$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$
 $\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle$
 $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right)$
 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$; $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ $n = 0, 1, 2, \dots$

$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$
 $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n \left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x\right]$
 $H_0(y) = 1$; $H_2(y) = -2(1 - 2y^2)$
 $H_1(y) = 2y$; $H_3(y) = -12\left(y - \frac{2}{3}y^3\right)$

תנ"י מסילתי והספין: **GOOL**

תנ"י בקואורדינטות כדוריות: $\hat{L}_z = (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \varphi}$
 $\hat{L}_x = -i\hbar \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$
 $\hat{L}_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$
 $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$
 $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$
 $\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar \hat{L}_z$
 $\hat{L}_- \hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar \hat{L}_z$

יחסי החילוף של התנ"י המסילתי:

$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$; $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$
 $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$; $[\hat{L}_x, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$
 $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm$; $[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$
 $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}_z^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = 0$
 $L_\pm Y_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_l^{m \pm 1}$

מטריצות התנ"י עבור $l = 1$:
 $\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $\hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{L}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 ספין - אותם יחסי חילוף כמו התנ"י:

$\hat{S}_z f = \hbar m_s f$
 $\hat{S}^2 f = \hbar^2 S(S+1) f$
 $-S \leq m_s \leq S$ - קפיצות של 1
 m_s, S יכולים להיות חצי שלמים.
 S קבוע ותלוי רק בסוג החלקיק. פרמיונים - חצי שלם, בוזונים - ספין שלם.

ספין חצי: $S = \frac{1}{2}$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$
 $|x_+\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \equiv |\uparrow\rangle$; $|x_-\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv |\downarrow\rangle$
 $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$
 $\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$
פונקציית ספין כללית: $|x\rangle = \alpha |x_+\rangle + \beta |x_-\rangle$
המילטוניון פריס:

$\hat{H}(\hat{X}, \hat{P}, \hat{S}) = \hat{H}_0(\hat{X}, \hat{P}) + \hat{H}_S(\hat{S})$
 במקרה זה ניתן לפתור את משוואת שרדינגר לספין ולמרחב בנפרד.

נקיפת לרמור: **GOOL**
 ערך התוחלת של S עבור ספין חצי בשדה מגנטי עוושה נקיפה (פרסציה) מסביב לשדה בתדירות $\omega = \gamma B_0$ ובוזוית α ביחס לשדה כאשר $\gamma = g \frac{-e}{2m_e}$.
 g הוא היחס הגיירו מגנטי. α נקבעת מתנאי התחלה. **פונקציית הגל:**

$\chi(t) = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{\gamma B_0 t}{2}}, \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{\gamma B_0 t}{2}}\right)$
חיבור תנ"י: **GOOL**

חיבור שני ספינים: $|S_1 - S_2| \leq S < S_1 + S_2$
 S הוא של כל המערכת והוא לא קבוע בניגוד לחלקיק בודד. $-S \leq m_S \leq S$
 $|S, m_S\rangle$ עבור שני חלקיקים עם ספין חצי:
 $|1, -1\rangle \rightarrow |\downarrow\downarrow\rangle$
מצבי טריפלט: $|1, 1\rangle \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle$; $|1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$

מצב סינגלט: $|0, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$
תנ"י כולל: $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$
 אותם יחסי חילוף כמו של התנ"י המסילתי והספין.
 $\hat{J}_z f = \hbar m_J f$; $\hat{J}^2 f = \hbar^2 j(j+1) f$
 $m_j = m_l + m_s$; $|l - S| \leq j \leq l + S$

אינטראקציית ספין מסלול: **GOOL**

$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e^2 \cdot \vec{S} \cdot \vec{L}}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2 r^3}$
 $\vec{B} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{m_e c^2 r^3} \vec{L}$
 הע"ע של $\vec{S} \cdot \vec{L}$:
 $\frac{1}{2} \hbar^2 (j(j+1) - S(S+1) - l(l+1))$

יחסות פרטית **GOOL**
 תיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות (אינרציאליות).

עקרונות יסוד בתורת היחסות:
 - חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.
 - האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.
 - מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.
 - אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור.
 - בוואקום. מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.
 - הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם: x, y, z) שעוברת טרנספורמציה.

פקטור גאמח: $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$; $\beta = \frac{v_0}{c}$

γ_0 תמיד גדולה מ 1
 טרנספורמצית לורנץ למיקום והזמן:
 $x' = \gamma_0(x - v_0 t)$; $y' = y$; $z' = z$
 $t' = \gamma_0\left(t - \frac{v_0 x}{c^2}\right)$; $\beta = \frac{v_0}{c}$; $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
 טרנספורמציה הפוכה:

$x = \gamma_0(x' + v_0 t')$; $y' = y$; $z' = z$
 $t = \gamma_0\left(t' + \frac{v_0 x'}{c^2}\right)$
 - הצירים של המערכות **חייבים** להיות מקבילים.
 - בזמן $t = t' = 0$ **חייבים** שהראשיות מתלכדות.
המערכת העצמית:
 מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

- **זמן עצמי** τ מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

- **אורך עצמי** l_0 האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

התכווצות האורך: שינוי האורך ממערכת המנוחה $l = \frac{l_0}{\gamma_0}$ (העצמית) למערכת נעה **התארכות הזמן:** שינוי הזמן ממערכת המנוחה (העצמית) למערכת נעה $\Delta t = \gamma_0 \tau$
שינוי זווית במדידת אורך: $\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$
 θ' - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת העצמית θ - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת אחרת.
אפקט דופלר היחסות:

זמן המחזור של הגל: $T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tau$
 אורך הגל: $\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda'$

תדירות הגל: $f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f'$

λ', τ, f' - הזמן, התדירות ואורך הגל במערכת העצמית
טרנספורמציות לורנץ למהירויות: $v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$

$v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$; $v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$
אברציה - שינוי זווית המהירות:

$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0(\cos \theta - \frac{v_0}{c})}$

שימו לב שפה השינוי הוא בזווית של וקטור המהירות (כיוון התנועה) ולא שינוי זווית של הגוף כמו למעלה.

תנע ואנרגיה יחסותיים: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$; $E = \gamma mc^2$

- הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ולא למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות.
נוסחאות נוספות:

$E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4$; $|p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot mc$

אנרגיית מנוחה: $E_0 = mc^2$

אנרגיה קינטית: $E_k = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$

עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, ניוטרינו) והאנרגיה הקינטית היא: $E = |p|c = h\nu$

ν היא התדירות ו- $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ קבוע פלאנק
טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:

$E' = \gamma_0(E - v_0 p_x)$; $p'_x = \gamma_0(p_x - v_0 E/c^2)$

$p'_y = p_y$; $p'_z = p_z$

($p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c}$)
וקטור תנע אנרגיה:

"גודל הוקטור" (מינוס באנרגיה) זהה בכל מערכות היחוס:

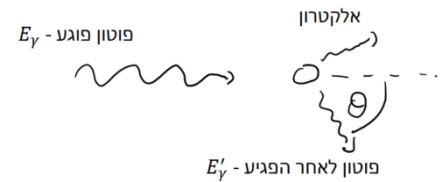
$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = \text{const}$$

- הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.

- עבור גוף יחיד הקבוע הוא: $m^2 c^2$.

פיזור קומפטון:

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



פוטון לאחר הפגיעה - E'_γ

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

E_γ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה

E'_γ - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה

m_e - מסת אלקטרון

θ - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.

יחידת האלקטרון וולט: $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$

המרת מסת הגופים לאנרגיה:

$m_e \approx 8.19 \times 10^{-14} \text{ J} (\approx 511 \text{ keV})$

$m_p \approx 1.50 \times 10^{-10} \text{ J} (\approx 938 \text{ MeV})$

$m_{\text{Uranium}} \approx 3.55 \times 10^{-8} \text{ J} (\approx 225 \text{ GeV})$

- ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ- $\frac{eV}{c}$
כלומר הכמות (המספר) זהה רק ביחידות נחלק ב c.

כוחות ביחסות פרטית: $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma^3 \vec{a}_{||} + m\gamma \vec{a}_{\perp}$

$\vec{a}_{\perp}, \vec{a}_{||}$ הרכיב המאונך והמקביל של התאוצה למהירות

גודל הרכיב המקביל של התאוצה: $a_{||} = \dot{v}$

טרנספורמציה של הכוחות:

$F'_x = F_x - \frac{v_0(F_y v_y + F_z v_z)}{c^2 - v_0 v_x}$

$F'_y = \frac{F_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$; $F'_z = \frac{F_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$
טרנספורמציה הפוכה:

$F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v'_x}$

$F_y = \frac{F'_y}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$; $F_z = \frac{F'_z}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$