

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את
חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית
ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר
העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים,
תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

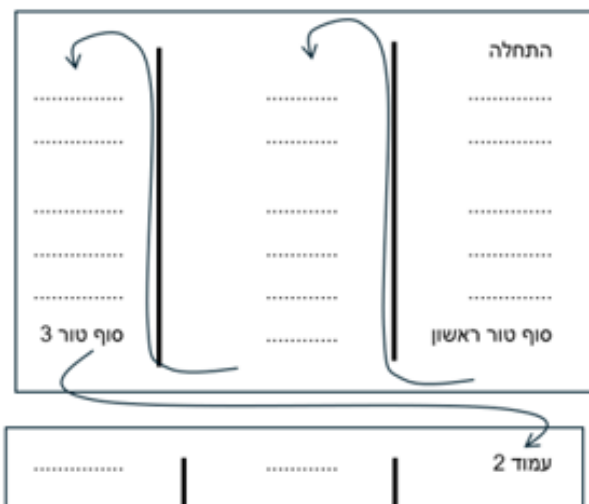
מבנה הדף:

הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר
מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.



כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים
בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

שונות:

σ

2

=
⟨

x

2

⟩
−
⟨
x
⟩

2

{\displaystyle \sigma ^{2}=\langle x^{2}\rangle -\langle x\rangle ^{2}}

כאשר -

⟨

x

2

⟩
=

∫

−
∞

∞

x

2

|
ψ
(
x
)

|

2

d
x

{\displaystyle \langle x^{2}\rangle =\int _{-\infty }^{\infty }x^{2}|\psi (x)|^{2}\,dx}

עקרון אי הוודאות של הייזנברג: **GOOL**

אי ודאות מיקום תנע:

Δ
x
Δ

p

x

≥

ℏ

2

{\displaystyle \Delta x\Delta p_{x}\geq {\frac {\hbar }{2}}}

ℏ
=

h

2
π

=
1.055
⋅

10

−
34

J
⋅
S

{\displaystyle \hbar ={\frac {h}{2\pi }}=1.055\cdot 10^{-34}J\cdot S}

- אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.
- אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.
- אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה:

Δ
E
Δ
t
≥

ℏ

2

{\displaystyle \Delta E\Delta t\geq {\frac {\hbar }{2}}}

1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.
2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי:

Δ

L

z

Δ
θ
≥

ℏ

2

{\displaystyle \Delta L_{z}\Delta \theta \geq {\frac {\hbar }{2}}}

משוואת שרדינגר: **GOOL**

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

i
ℏ

∂
ψ
(
x
,
t
)

∂
t

=
−

ℏ

2

2
m

∂

2

ψ
(
x
,
t
)

∂

x

2

+
U
(
x
,
t
)
ψ
(
x
,
t
)

{\displaystyle i\hbar {\frac {\partial \psi (x,t)}{\partial t}}=-{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {\partial ^{2}\psi (x,t)}{\partial x^{2}}}+U(x,t)\psi (x,t)}

- **תנאים נוספים**:
1. פסי מנורמלת.
2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת.
3. פסי רציפה.
4. הגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד:

i
ℏ

∂
ψ

∂

t

=
−

ℏ

2

∇

2

ψ
+
U
ψ

{\displaystyle i\hbar {\frac {\partial \psi }{\partial t}}=-{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}\nabla ^{2}\psi +U\psi }

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

כאשר:

ψ
(
x
,
t
)
=
ψ
(
x
)

e

i
E
t
ℏ

{\displaystyle \psi (x,t)=\psi (x)e^{\frac {iEt}{\hbar }}}

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי: **GOOL**

פונקציית הגל, חלקיק חופשי:

ψ
(
x
)
=
A
sin
⁡
(
k
x
)

{\displaystyle \psi (x)=A\sin(kx)}

חבילת גלים:

ψ
(
x
)
=

∑

n

A

n

sin
⁡
(

k

n

x
)
+

B

n

cos
⁡
(

k

n

x
)

{\displaystyle \psi (x)=\sum _{n}A_{n}\sin(k_{n}x)+B_{n}\cos(k_{n}x)}

בור פוטנציאל אינסופי ברוחב:

l

{\displaystyle l}

ψ

n

(
x
)
=

2

l

sin
⁡
(

π
n

l

x
)

{\displaystyle \psi _{n}(x)={\sqrt {2\over l}}\sin \left({\frac {\pi n}{l}}x\right)}

E

n

=

ℏ

2

8
m

l

2

n

2

,
n
=
1,2,3...

{\displaystyle E_{n}={\frac {\hbar ^{2}}{8ml^{2}}}n^{2},n=1,2,3..}

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. **עקרונות לציור פונקציית גל**:

1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
2. עבור המצב ה-*n* ציירו גל עם *n* - 1 נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולחיצה).
4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מנהור (tunneling): **GOOL**

מקדם ההעברה עבור 1 << T (ההסתברות לעבור):

T
≈
16

E

U

0

(
1
−

E

U

0

)

e

−
2
α
l

{\displaystyle T\approx 16{\frac {E}{U_{0}}}\left(1-{\frac {E}{U_{0}}}\right)e^{-2\alpha l}}

l , *α* =

ℏ

2
m
(

U

0

−
E
)

{\displaystyle \alpha ={\frac {\sqrt {2m(U_{0}-E)}}{\hbar }}}

גובה הפוטנציאל במחסום.

מקדם החזרה:

R
=
1
−
T

{\displaystyle R=1-T}

אוסילטור הרמוני: **GOOL**

פונקציות הגל:

ψ

1

(
x
)
=
(
π

b

2

)

−

1
4

e

−

x

2

2
b

2

b
=

ℏ

m
ω

{\displaystyle \psi _{1}(x)=(\pi b^{2})^{-{\frac {1}{4}}}e^{-{\frac {x^{2}}{2b^{2}}}}\quad b={\sqrt {\frac {\hbar }{m\omega }}}\quad }

ψ

2

(
x
)
=

2

(
π

b

2

)

−

1
4

x
b

e

−

x

2

2
b

2

{\displaystyle \psi _{2}(x)={\sqrt {2}}(\pi b^{2})^{-{\frac {1}{4}}}{\frac {x}{b}}e^{-{\frac {x^{2}}{2b^{2}}}}}

ψ

3

(
x
)
=
8

3

(
π

b

2

)

−

1
4

(
1
−

2
x

b

2

)

e

−

x

2

2
b

2

{\displaystyle \psi _{3}(x)=8{\sqrt {3}}(\pi b^{2})^{-{\frac {1}{4}}}\left(1-{\frac {2x^{2}}{b^{2}}}\right)e^{-{\frac {x^{2}}{2b^{2}}}}}

רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ 1:

E

n

=
(
n
−

1
2

)
ℏ
ω

{\displaystyle E_{n}=\left(n+{\frac {1}{2}}\right)\hbar \omega }

או שאפשר להתחיל את *n* מאפס ואז

E

n

=
(
n
+

1
2

)
ℏ
ω

{\displaystyle E_{n}=\left(n+{\frac {1}{2}}\right)\hbar \omega }

אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: **GOOL**

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-*r*:
ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקצית הגל:

ψ
(
r
,
θ
,
φ
)
=
R
(
r
)
θ
(
θ
)
φ
(
φ
)

{\displaystyle \psi (r,\theta ,\varphi)=R(r)\theta (\theta)\phi (\varphi)}

המשוואה ל-*θ(θ)*:

1

θ
(
θ
)

sin
⁡
θ

∂

∂
θ

(
sin
⁡
θ

∂
θ

θ

∂
θ

)
+
l
(
l
+
1
)

sin

2

⁡
θ
=

m

2

{\displaystyle {\frac {1}{\theta (\theta)}}\sin \theta {\frac {\partial }{\partial \theta }}\left(\sin \theta {\frac {\partial \theta }{\partial \theta }}\right)+l(l+1)\sin ^{2}\theta =m^{2}}

משוואה ל-*φ(φ)*:

פתרון ל -*φ(φ)* ו-*θ(θ)*:

Y

l

m

(
θ
,
φ
)
=
θ
(
θ
)
φ
(
φ
)
=
ε

(
2
l
+
1
)
(
l
−
|
m
|
)
!

4
π
(
l
+
|
m
|
)
!

P

l

m

(
cos
⁡
θ
)

e

i
m
φ

{\displaystyle Y_{l}^{m}(\theta ,\varphi)=\theta (\theta)\phi (\varphi)=\varepsilon {\frac {(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi (l+|m|)!}}P_{l}^{m}(\cos \theta)e^{im\varphi }}

ε
=

{

(
−
1

)

m

m
>
0

1

m
≤
0

{\displaystyle \varepsilon =\left\{{\begin{matrix}(-1)^{m}&m>0\\1&m\leq 0\end{matrix}}\right.}

שלים *|m|* ≤ *l* ו-*l* ≥ 0

P

l

m

(
x
)
=
(
1
−

x

2

)

|
m
|

2

(

d

d
x

)

|
m
|

P

l

(
x
)

{\displaystyle P_{l}^{m}(x)=(1-x^{2})^{{\frac {|m|}{2}}}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{|m|}P_{l}(x)}

P

l

(
x
)
=

1

2

l
!

l
!

(

d

d
x

)

l

(

x

2

−
1

)

l

{\displaystyle P_{l}(x)={\frac {1}{2^{l}l!}}{\left({\frac {d}{dx}}\right)^{l}}(x^{2}-1)^{l}}

Y

0

0

=
(

1

4
π

)

1
2

;

Y

2

0

=
(

5

16
π

)

1
2

(
3
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle Y_{0}^{0}=\left({\frac {1}{4\pi }}\right)^{\frac {1}{2}};Y_{2}^{0}=\left({\frac {5}{16\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}(3\cos ^{2}\theta -1)}

Y

1

0

=
(

3

4
π

)

1
2

cos
⁡
θ
;

Y

2

±
1

=
∓
(

15

8
π

)

1
2

sin
⁡
θ
cos
⁡
θ

e

±
i
φ

{\displaystyle Y_{1}^{0}=\left({\frac {3}{4\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\cos \theta ;Y_{2}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {15}{8\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi }}

Y

1

±
1

=
∓
(

3

8
π

)

1
2

sin
⁡
θ

e

±
i
φ

;

{\displaystyle Y_{1}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {3}{8\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta e^{\pm i\phi };}

Y

2

±
2

=
(

15

32
π

)

1
2

sin

2

⁡
θ

e

±
2
i
φ

{\displaystyle Y_{2}^{\pm 2}=\left({\frac {15}{32\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{2}\theta e^{\pm 2i\phi }}

Y

3

0

=
(

7

16
π

)

1
2

(
5
cos

3

⁡
θ
−
3
cos
⁡
θ
)

{\displaystyle Y_{3}^{0}=\left({\frac {7}{16\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}(5\cos ^{3}\theta -3\cos \theta)}

Y

3

±
1

=
∓
(

21

64
π

)

1
2

sin
⁡
θ
(
5
cos

2

⁡
θ
−
1
)

e

±
i
φ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 1}=\mp \left({\frac {21}{64\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)e^{\pm i\phi }}

Y

3

±
2

=
(

105

32
π

)

1
2

sin

2

⁡
θ
cos
⁡
θ

e

±
2
i
φ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 2}=\left({\frac {105}{32\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{2}\theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi }}

Y

3

±
3

=
∓
(

35

64
π

)

1
2

sin

3

⁡
θ

e

±
3
i
φ

{\displaystyle Y_{3}^{\pm 3}=\mp \left({\frac {35}{64\pi }}\right)^{\frac {1}{2}}\sin ^{3}\theta e^{\pm 3i\phi }}

P

0

1

=
cos
⁡
θ
;

P

0

3

=

1
2

(
5
cos

3

⁡
θ
−
3
cos
⁡
θ
)

{\displaystyle P_{0}^{1}=\cos \theta ;P_{0}^{3}={\frac {1}{2}}(5\cos ^{3}\theta -3\cos \theta)}

P

1

1

=
sin
⁡
θ
;

P

1

3

=

3
2

sin
⁡
θ
(
5
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{1}^{1}=\sin \theta ;P_{1}^{3}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}

P

2

0

=

1
2

(
3
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{2}^{0}={\frac {1}{2}}(3\cos ^{2}\theta -1)}

P

1

3

=

1
2

sin
⁡
θ
(
5
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{1}^{3}={\frac {1}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}

P

2

1

=
3
sin
⁡
θ
cos
⁡
θ
;

P

1

3

=

3
2

sin
⁡
θ
(
5
cos

2

⁡
θ
−
1
)

{\displaystyle P_{2}^{1}=3\sin \theta \cos \theta ;P_{3}^{1}={\frac {3}{2}}\sin \theta (5\cos ^{2}\theta -1)}

P

2

2

=
3

sin

2

⁡
θ
;

P

3

3

=
15
sin
⁡
θ
(
1
−

cos

2

⁡
θ
)

{\displaystyle P_{2}^{2}=3\sin ^{2}\theta \;\;\;P_{3}^{3}=15\sin \theta (1-\cos ^{2}\theta)}

אורתוגונליות:

∫

0

2
π

∫

0

π

[

Y

l

m

(
θ
,
φ
)

]

∗

[

Y

l

m

′

(
θ
,
φ
)
]
sin
⁡
θ
d
θ
d
φ
=

δ

l
l
′

δ

m
m
′

{\displaystyle \int _{0}^{2\pi }\int _{0}^{\pi }[Y_{l}^{m}(\theta ,\varphi)]^{*}[Y_{l'}^{m'}(\theta ,\varphi)]\sin \theta \,d\theta \,d\varphi =\delta _{ll'}\delta _{mm'}}

המשוואה לחלק הרדיאלי:

1

R
(
r
)

∂

∂
r

(

r

2

∂
R
(
r
)

∂
r

)
−

2
m

r

2

(
V
(
r
)
−
E
)
=
l
(
l
+
1
)

{\displaystyle {\frac {1}{R(r)}}{\frac {\partial }{\partial r}}\left(r^{2}{\frac {\partial R(r)}{\partial r}}\right)-{\frac {2mr^{2}}{\hbar ^{2}}}(V(r)-E)=l(l+1)}

R
(
r
)
=

u
(
r
)
r

{\displaystyle R(r)={\frac {u(r)}{r}}}

−

ℏ

2

2
m

d

2

u
(
r
)

d

r

2

+
[
V
(
r
)
+

ℏ

2

l
(
l
+
1
)

2
m

r

2

]
u
(
r
)
=
E
u
(
r
)

{\displaystyle -{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {d^{2}u(r)}{dr^{2}}}+\left[V(r)+{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {l(l+1)}{r^{2}}}\right]u(r)=Eu(r)}

פתרון עבור אטום המימן:

V
(
r
)
=

k

e

2

r

{\displaystyle V(r)={\frac {ke^{2}}{r}}}

E

n

=
−

m

k

2

e

4

1

2
ℏ

2

⋅

1

n

2

=

E

1

n

2

=

−
13.6
eV

n

2

{\displaystyle E_{n}=-{\frac {mk^{2}e^{4}}{2\hbar ^{2}}}\cdot {\frac {1}{n^{2}}}={\frac {E_{1}}{n^{2}}}={\frac {-13.6eV}{n^{2}}}}

R

n
l

(
r
)
=

(

2

n
a

)

3

(
n
−
l
−
1
)
!

2
n
[
(
n
−
l
)
!

]

3

e

−

r

n
a

(

2
r

n
a

)

l

L

n
−
l
−
1

l

(

2
r

n
a

)

{\displaystyle R_{nl}(r)={\sqrt {\left({\frac {2}{na}}\right)^{3}{\frac {(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^{3}}}e^{-{\frac {r}{na}}}\left({\frac {2r}{na}}\right)^{l}L_{n-l-1}^{l}\left({\frac {2r}{na}}\right)}}

רדיוס בוהר:

a
=

ℏ

2

k
m

e

2

=
0.529
⋅

10

−
10

m

{\displaystyle a={\frac {\hbar ^{2}}{kme^{2}}}=0.529\cdot 10^{-10}m}

L

p
−
p

(
x
)
=
(
−
1

)

p

(

d

d
x

)

p

L

q

(
x
)

{\displaystyle L_{p-p}^{p}(x)=(-1)^{p}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{p}L_{q}(x)}

L

q

(
x
)
=

e

x

(

d

d
x

)

q

(

e

−
x

x

q

)

{\displaystyle L_{q}(x)=e^{x}\left({\frac {d}{dx}}\right)^{q}\left(e^{-x}x^{q}\right)}

R

10

=
2

a

−

3
2

exp
⁡
(
−

r

a

)

{\displaystyle R_{10}=2a^{-{\frac {3}{2}}}\exp \left(-{\frac {r}{a}}\right)}

R

20

=

1

√
2

a

−

3
2

(
1
−

r

2
a

)
exp
⁡
(
−

r

2
a

)

{\displaystyle R_{20}={\frac {1}{\sqrt {2}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{2a}}r\right)\exp \left(-{\frac {r}{2a}}\right)}

R

21

=

1

√
24

a

−

3
2

r

a

exp
⁡
(
−

r

2
a

)

{\displaystyle R_{21}={\frac {1}{\sqrt {24}}}a^{-{\frac {3}{2}}}{\frac {r}{a}}\exp \left(-{\frac {r}{2a}}\right)}

R

30

=

2

√
27

a

−

3
2

(
1
−

2
r

3
a

+

2
27

(

r

a

)

2

)
exp
⁡
(
−

r

3
a

)

{\displaystyle R_{30}={\frac {2}{\sqrt {27}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {2r}{3a}}+{\frac {2}{27}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}

R

31

=

8

27
√
6

a

−

3
2

(
1
−

r

6
a

)
(

r

a

)
exp
⁡
(
−

r

3
a

)

{\displaystyle R_{31}={\frac {8}{27{\sqrt {6}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{6a}}r\right)\left({\frac {r}{a}}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}

R

32

=

4

81
√
30

a

−

3
2

(

r

a

)
exp
⁡
(
−

r

3
a

)

{\displaystyle R_{32}={\frac {4}{81{\sqrt {30}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left({\frac {r}{a}}\right)\exp \left(-{\frac {r}{3a}}\right)}

R

40

=

1
4

a

−

3
2

(
1
−

3
r

4
a

+

1
8

(

r

a

)

2

−

1
192

(

r

a

)

3

)
exp
⁡
(
−

r

4
a

)

{\displaystyle R_{40}={\frac {1}{4}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {3r}{4a}}+{\frac {1}{8}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}-{\frac {1}{192}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{3}\right)\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}

R

41

=

√
5

16
√
3

a

−

3
2

(
1
−

r

4
a

+

1
80

(

r

a

)

2

)

r

a

exp
⁡
(
−

r

4
a

)

{\displaystyle R_{41}={\frac {\sqrt {5}}{16{\sqrt {3}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1r}{4a}}+{\frac {1}{80}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\right){\frac {r}{a}}\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}

R

42

=

1

64
√
5

a

−

3
2

(
1
−

r

12
a

)
(

r

a

)

2

exp
⁡
(
−

r

4
a

)

{\displaystyle R_{42}={\frac {1}{64{\sqrt {5}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left(1-{\frac {1}{12a}}r\right)\left({\frac {r}{a}}\right)^{2}\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}

R

43

=

1

768
√
35

a

−

3
2

(

r

a

)

3

exp
⁡
(
−

r

4
a

)

{\displaystyle R_{43}={\frac {1}{768{\sqrt {35}}}}a^{-{\frac {3}{2}}}\left({\frac {r}{a}}\right)^{3}\exp \left(-{\frac {r}{4a}}\right)}

פתרון כללי:

ψ

n
l
m

(
r
,
θ
,
φ
)
=

R

n
l

(
r
)

Y

l

m

(
θ
,
φ
)

{\displaystyle \psi _{nlm}(r,\theta ,\varphi)=R_{nl}(r)Y_{l}^{m}(\theta ,\varphi)}

n ו-*l* שלמים, *n*=1,2,3... ו-*l* ≤ *n* - 1
m שלם ומקיים: *l* - *l* ≤ *m* ≤ *l*
אורתוגונליות:

∫

ψ

n
l
m

∗

ψ

n
l
′
m
′

r

2

sin
⁡
θ
d
r
d
θ
d
φ
=

δ

n
n
′

δ

l
l
′

δ

m
m
′

{\displaystyle \int \psi _{nlm}^{*}\psi _{n'l'm'}r^{2}\sin \theta \,drd\theta d\varphi =\delta _{nn'}\delta _{ll'}\delta _{mm'}}

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצאת את האלקטרון במרחק *r* מהגרעין):

P

n
l

(
r
)
=

|

R

n
l

|

2

r

2

{\displaystyle P_{nl}(r)=|R_{nl}|^{2}r^{2}}

התנע הזוויתי:

L
→

=

r
→

×

p
→

=
(

L

x

,

L

y

,

L

z

)

{\displaystyle {\vec {L}}={\vec {r}}\times {\vec {p}}=(L_{x