

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

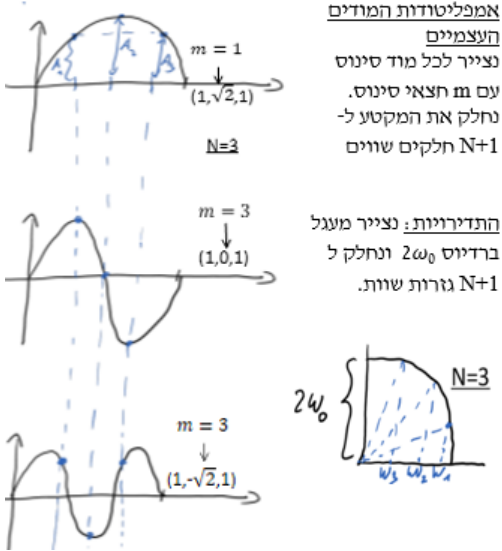
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.



GOOL **משתנה רציף**

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi(z,t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \Psi(z,t)}{\partial z^2}$$

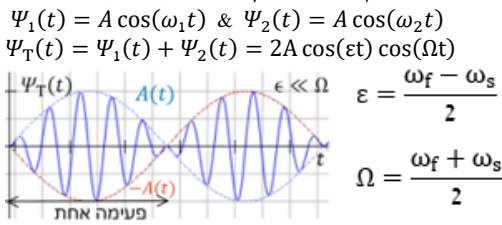
z - מיקום המסה; Ψ - העתק משווי משקל
 ρ - צפיפות המסה של המערכת, כאשר Δz הוא המרווח בין שתי מסות בשווי משקל (הולך לאפס)
 $E = k\Delta z$ - מודול האלסטיות.

GOOL **מבוא לגלים**

גלים רוחביים: ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות (מיתר)
גלים אורכיים: ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות (קול)
תנוד: החומר בו מתקדמת ההפרעה
פונקציית הגל: $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.
אנרגיה של גל: A , $E \propto A^2$ היא האמפליטודה (משרעת)
משוואת הגלים במימד אחד:
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$
 כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.

התאבכות: סכימה של גלים שנפגשים
חזית גל: אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן
גלים מחזוריים:
 $\lambda = v \cdot T$ - אורך הגל; T - זמן המחזור; v - מהירות הגל
תדירות (מספר המחזורים בשנייה):
 $f = \frac{1}{T}$
גל הרמוני:
 $y(x,t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi)$
מספר הגל:
 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

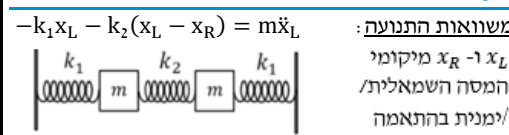
קשרים בין הגדלים השונים:
 $\omega = vk = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
גל עומד: מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים
 $y(x,t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \phi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \phi))$
נקודות צומת (node): נקודות שלא זזות. אין מהירות גל.
נקודת טבור (antinode): אמפליטודה מקסימאלית.
פעילות: בפעילות אחת מחברים שני גלים בעלי אותה אמפליטודה ומקבלים גל בתוך מעטפת (פעילה).
 $\Psi_1(t) = A \cos(\omega_1 t)$ & $\Psi_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$
 $\Psi_T(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = 2A \cos(\omega t) \cos(\Omega t)$



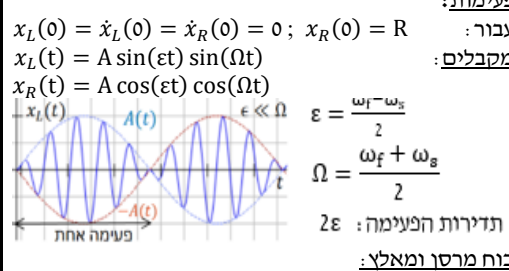
GOOL **גלים רוחביים במיתר**

משוואת הגלים:
 $\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$
 T - המתיחות במיתר, ρ - צפיפות המסה ליחידת אורך,
 ψ - פונקציית הגל, ההעתק הרוחבי של כל חתיכה במיתר.
מהירות הגל:
 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$
פתרון המשוואה:
 $\psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$
 - אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזוויות טריגונומטריות)
 $\psi(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t$

$\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$
תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלית. ניתן למצוא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω . אם $\Gamma \ll \omega_0$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות התנועה הרמונית ללא כוח מאלץ ומרסך)
מערכת של שתי מסות

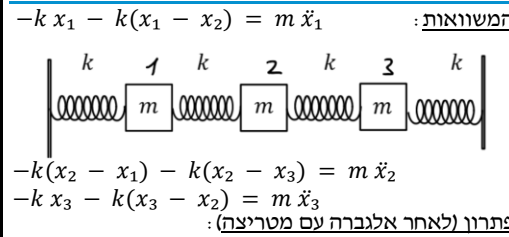


משוואות התנועה:
 $-k_1 x_L - k_2(x_L - x_R) = m \ddot{x}_L$
 $-k_1 x_R - k_2(x_R - x_L) = m \ddot{x}_R$
החלפת משתנים:
 $x_s = x_L + x_R$; $x_f = x_L - x_R$
פתרון (מודים עצמיים):
 $x_s(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$
 $x_f(t) = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)$
כאשר -
 $\omega_s = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ ו- $\omega_f = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$
פעילות:
 עבור: $x_L(0) = \dot{x}_L(0) = \dot{x}_R(0) = 0$; $x_R(0) = R$
מקבלים:
 $x_L(t) = A \sin(\epsilon t) \sin(\Omega t)$
 $x_R(t) = A \cos(\epsilon t) \cos(\Omega t)$



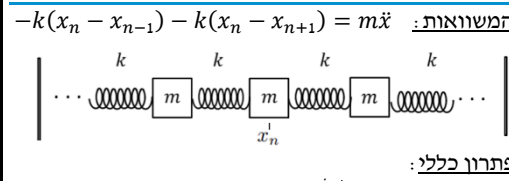
תדירות הפעימה: 2ϵ
כוח מרסן ומאלץ:
 - המשוואות והפתרונות עבור x_s ו- x_f הן אלו של תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת
 - במקרה $\Gamma \ll 2\omega$ (תדירות הכוח המאלץ, Γ מקדם הכוח המרסן)
 - אם $\omega \approx \omega_s$ אז $A_f \gg A_s$ ו- $x_L \approx x_R$ כלומר רק המוד (1,1) מתעורר
 - אם $\omega \approx \omega_f$ אז $A_s \gg A_f$ ו- $x_L \approx -x_R$ כלומר רק המוד (1,-1) מתעורר.

GOOL **מערכת של שלוש מסות**



משוואות:
 $-k x_1 - k(x_1 - x_2) = m \ddot{x}_1$
 $-k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) = m \ddot{x}_2$
 $-k x_3 - k(x_3 - x_2) = m \ddot{x}_3$
פתרון (לאחר אלגברה עם מטריצה):
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_m t + \phi_m) + A_f \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_f t + \phi_f) + A_s \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_s t + \phi_s)$
 כאשר - $\omega_s = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \omega_0$; $\omega_m = \sqrt{2} \omega_0$
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\sqrt{2 - \sqrt{2}} \omega_0$

GOOL **מערכת N מסות**



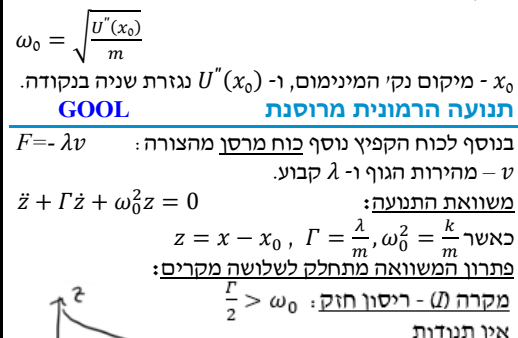
משוואות:
 $-k(x_n - x_{n-1}) - k(x_n - x_{n+1}) = m \ddot{x}_n$
פתרון כללי:
 $x_n(t) = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) e^{i\omega t} = C_1 \cos(n\theta) \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin(n\theta) \cos(\omega t + \phi_2)$
 כאשר - $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_0^2} \right)$
בתנאי שפה קבועים (קירות):
 $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$
 $x_n(t) = \sum_{m=1}^N C_m \sin\left(\frac{n\pi m}{N+1}\right) \cos(\omega_m t + \phi_m)$
 $\theta_m = \frac{\pi m}{N+1}$; $\omega_m = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{2(N+1)}\right)$
 כלומר יש N מודים עצמיים (בתדירויות ω_m) ו- x_n הם קומבינציות לינאריות של המודים האלו. המקדמים C_m ו- ϕ_m נקבעים מתנאי ההתחלה של כל ה- x_n

GOOL **תנועה הרמונית פשוטה**

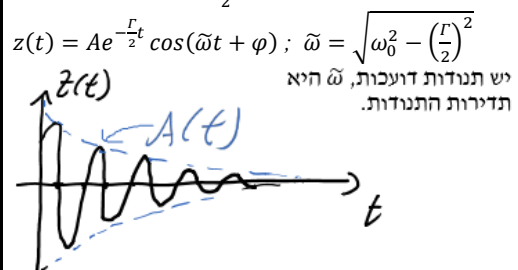
משוואת התנועה:
 $-k(x - x_0) = m \ddot{x}$
 k ו- m הם קבועים **חיוביים** כלשהם.
 x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
 x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.
 $\ddot{x}$ - נגזרת שנייה של המשתנה.
 חייב להיות מינוס לפני k .
פתרון המשוואה:
 $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0$
 x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma \vec{F} = 0$.
 A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משווי המשקל.
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - תדירות זוויתית
 ϕ - פאזה.
מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.
של המקדם x
של המקדם x
 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{x}{\ddot{x}}}$
 מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית:
 $v_{max} = \omega A$
האנרגיה:
 $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m A^2$
 - האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
 - חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.
בור פוטנציאלי: כאשר גוף נע בסביבה קרובה מאוד למינימום של הפוטנציאל (האנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית במינימום) אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$
 x_0 - מיקום נק' המינימום, ו- $U''(x_0)$ נגזרת שנייה בנקודה.
תנועה הרמונית מרוסנת
בנוסף לכוח הקפיץ נוסף כוח מרסן מהצורה:
 $F = -\lambda v$
 v - מהירות הגוף ו- λ קבוע.
משוואת התנועה:
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
 כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:



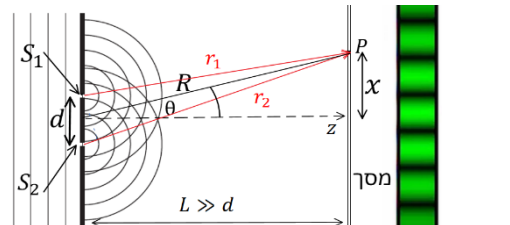
מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
 אין תנודות
מקרה (II) - ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$
 $z(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}$
 דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.
מקרה (III) - ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$
 $z(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \cos(\tilde{\omega} t + \phi)$; $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$
 יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.



GOOL **תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת**

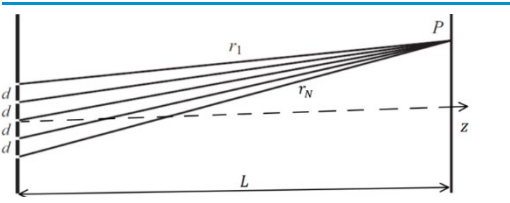
בנוסף לכוח הקפיץ והמרסן נוסף כוח מאלץ מהצורה:
 $\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$
 F_0 ו- Ω קבועים כלשהם
משוואת התנועה:
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$
פתרון משוואת התנועה:
 $x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{homog}(t)$
 $x_{homog}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים...
 - במצב עמיד (לאחר זמן רב) נוניח את הפתרון ההומוגני.
 $A(\Omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$

אמפליטודה בגלים גליליים: $A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$
 אמפליטודה בגלים כדוריים: $A \propto \frac{1}{r}$
 ניסוי שני הסדקים:



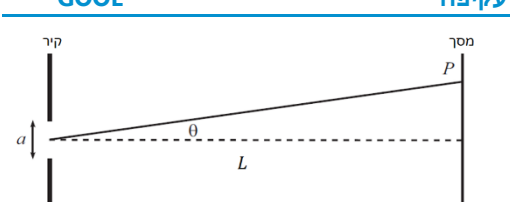
קירוב השדה הרחוק $L \gg d$:
 1. $A_1 \approx A_2 \leftarrow \Delta r \ll r$
 2. $\Delta r = d \sin \theta \leftarrow r_1 \approx r_2$
 העוצמה היחסית:
 $\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2 \left(\frac{k d \sin \theta}{2} \right)$
 קירוב זוויות קטנות:
 $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{x}{L}$
 בגלל התלות של האמפליטודה במרחק, צריך להכפיל את התוצאה לעוצמה בקוסינוס סטה עבור גלים גליליים ובקוסינוס ברביע עבור גלים כדוריים. התוספת הזו קשורה למבנה של המסך והיא לא תופיע במסך עגול. בדרכי מניחים קירוב זוויות קטנות ואז היא זניחה.

התאבכות ב N סדקים



קירוב השדה הרחוק:
 $A_1 \approx A_2 \approx A_3 \approx A_4 \leftarrow \Delta r \ll r$
 $\Delta r = d \sin \theta \leftarrow r_1 \approx r_2 \approx r_3 \approx r_4$
 $\alpha = kd \sin \theta$; $\frac{I_{tot}(\alpha)}{I_{tot}(0)} \approx \left(\frac{\sin(N\frac{\alpha}{2})}{N \sin(\frac{\alpha}{2})} \right)^2$
 פיק גדול (מתרחש כשהמכנה מתאפס): $\alpha_n = 2\pi n$
 נקודות התאפסות (כשהמונה מתאפס והמכנה לא): $\alpha_n = \frac{2\pi n}{N}$
 פיק קטן (נגזרת שווה לאפס ומכנה לא מתאפס, עבור $N \gg 1$): $\alpha_n = \frac{2\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right)$
 מספר הפיקים באחד הצדדים (ללא הפיק המרכזי): $\frac{kd}{2\pi}$
 (לעגל למטה).
 מספר הפיקים (הגדולים) הכולל שווה למספר הפיקים באחד הצדדים כפול 2 ועוד 1 (המרכזי)

עקיפה



קירוב השדה הרחוק $L \gg a$:
 $\frac{I(\beta)}{I(0)} = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\beta)}{\frac{1}{2}\beta} \right)^2$
 $\beta = ka \sin \theta$
 נק' התאפסות: $\beta_n = 2\pi n$
 אם $\lambda > a$ אז רוחב הפיק המרכזי גדול מאינסוף ולא יהיו נק' התאפסות, הסדק מתנהג כמקור אור נקודתי.
 אם $\lambda \gg a$ מקבלים עוצמה קבועה ברוחב הסדק, מתאים למקרה הקלאסי בו מניחים שהאור נע בקווים ישרים.
 מקסימום מקומי (נגזרת מתאפסת): $\beta_n \approx 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)$

הקשר לפורייה:
 האמפליטודה הכוללת על המסך כתלות בזווית:
 $A_{tot}(\theta) = 2\pi FT[B(x)](k')$; $k' = k \sin \theta$
 כאשר $B(x)$ היא האמפליטודה ליחידת אורך בסדק.

$k_n = \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right)$; $n = 0, 1, 2, 3 \dots$
 $\lambda_n = \frac{2L}{(n + \frac{1}{2})}$; $f_n = \frac{v}{2L} (n + \frac{1}{2})$
 $\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$
 מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים:
 $\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$
 $\lambda_n = \frac{2L}{n}$; $f_n = \frac{vn}{2L}$; $k_n = \frac{\pi n}{L}$; $n = 0, 1, 2, 3 \dots$
 $\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$

גלי קול בצינור

גל אורכי: תנועת המולקולות בכיוון ההתקדמות הגל $\Psi(x, t)$ - פונקציית ההעתק של מולקולות הגז משיווי משקל. x מציין את מיקום המולקולות בשיווי משקל ולא את המיקום שלהן כתלות בזמן.
 $\Psi_p(x, t)$ - פונקציית הלחץ העודף access pressure.
 $\Delta p(x, t)$ - פונקציית השינוי בצפיפות.
 נק' צומת בפונקציית ההעתק היא נק' טבור בפונקציות הצפיפות והלחץ ולהפך.
 גז אידיאלי בתהליך אדיאטי: $PV^\gamma = const$
 P - לחץ. V - נפח. γ - קבוע הקשור לסוג הגז.
 הקשר בין פונקציית ההעתק לפונקציית הלחץ:
 $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma P_0} \Psi_p$ (P0 - הלחץ בשיווי משקל)
 מקדם האלסטיות של הגז: $B_a = \gamma P_0$
 משוואת הגלים: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$
 אותה המשוואה מתקיימת גם עבור Ψ_p ו- Δp
 מהירות הגלים (מהירות הקול, לפעמים כתובה באות c):

$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$
 באוויר בתנאים סטנדרטיים: $v \approx 340 \text{ m/s}$
 הקשר בין הצפיפות לפונקציית ההעתק: $\Delta \rho = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}$
 עכבה של גל קול מישורי ליחידת שטח: $\frac{Z}{A} = \rho_0 v$
 צפיפות המסה בשיווי משקל A - שטח החתך של הצינור. v - מהירות הקול בחומר.
 האנרגיה הכוללת ליחידת אורך:
 $\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} A \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right] = A \rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2$
 השוויון האחרון הוא עבור גלים נעים בלבד.
 אנרגיה פוטנציאלית וקינטית ממוצעת בזמן ליחידת אורך:
 $\bar{U}_{dx} = \bar{E}_{kdx} = \frac{1}{4} \rho_0 A \omega^2 \Psi_{max}^2$
 אנרגיה כוללת ממוצעת בזמן ליחידת אורך:
 $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho_0 A \omega^2 \Psi_{max}^2$

Ψ_{max} - האמפליטודה של פונקציית ההעתק - קבוע.
 ω - התדירות הזוויתית.
 הספק של גל קול נע (כמה אנרגיה עוברת דרך שטח חתך ביחידת זמן) בכיוון החיובי/שלילי:
 $P(x, t) = \pm v \varepsilon(x, t)$ (לא לבלבל עם P של לחץ)
 עוצמה של הגל (ההספק ליחידת שטח):
 $I(x, t) = \frac{|P(x, t)|}{A} = v \rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2$
 עוצמה ממוצעת בזמן:
 $\bar{I} = \frac{1}{2} v \rho_0 \omega^2 \Psi_{max}^2$
 מדידת עוצמה בסולם לוגריתמי:
 $I_a = I_0 \cdot 10^a$; $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.
 a - היא העוצמה ב B (בל).
 1B = 10 dB (זה דציבל)
 עוצמה בגל כדורי:
 $I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$
 תנאי שפה בצינור:
 - קצה סגור $\Psi = 0$ (כמו קצה קשור במיתר)
 - קצה פתוח $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$ (כמו קצה חופשי במיתר)
 ערך RMS של פונקציית סינוס/קוסינוס הוא הערך המסכימי חלקי $\sqrt{2}$
 מטריצת מומנט ההתמד:
 $I_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} + i \cdot j)$
 כאשר k, i, j מקבלים את הערכים x, y, z

התאבכות בשני סדקים

עיקרון הווייגנס: ניתן להתייחס לכל נקודה בחזית הגל כמקור נקודתי של גל חדש.

$B_4 \sin kx \sin \omega t = C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2)$
 שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.
 פתרון במספרים מרוכבים:

$\psi(x, t) = A_1 e^{i(kx + \omega t)} + A_2 e^{i(kx - \omega t)} + A_3 e^{-i(kx + \omega t)} + A_4 e^{-i(kx - \omega t)}$
 אם הפונקציה ממשיית, אז $A_4 = A_2^*$ ו- $A_3 = A_1^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של $\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)}$
 יחס הדיספרסיה:
 $\omega = v \cdot k$
 פתרון באמצעות נוסחת ד'אלמבר:
 $\psi(x, t) = \frac{1}{2} [\psi(x - vt, 0) + \psi(x + vt, 0)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \dot{\psi}(x', 0) dx'$

החזרה והעברה

תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב-0=x:
 1. רציפות הפונקציה: $\psi_L(0, t) = \psi_R(0, t)$
 2. רציפות הכוח: $F_L = F_R$
 אם המתוחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הנגזרת:
 $\frac{\partial \psi_L}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi_R}{\partial x} \Big|_{x=0}$
 $\psi_L(x, t) = \psi_r(x, t) + \psi(x, t)$; $\psi_r(x, t) = \psi_t(x, t)$
 $\psi_r(x, t) = r \psi(-x, t)$
 $\psi_t(x, t) = t \psi \left(\frac{v_1}{v_2} x, t \right)$; $v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$
 מקדם החזרה:
 $r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$
 מקדם העברה:
 $t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$
 הערה: את הנוסחאות של מקדם העברה והחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.

עכבה

עכבה (impedance): $Z = \sqrt{\rho T} = \frac{T}{v}$
 מתיחות. V' - מהירות הגל
 $|Z| = \frac{|F_y|}{|V_y(t)|}$
 F_y - הכוח על אלמנט מסה
 $V_y(t)$ - מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)
 מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2:
 $r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$, $t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$, $r = 0$ ו- $t = 1$ אם $Z_1 = Z_2$
 תאום עכבות:
 אנרגיה הספק ותנע

אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר:
 $\varepsilon(x, t) = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = \rho v^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2$
 אנרגיה ממוצעת בזמן:
 $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 |A|^2$
 הספק רגעי בנקודה, כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני ביחידת זמן:

$P^\pm = \pm Z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = \pm v \varepsilon(x, t)$
 P[±] הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי
 ההספק הממוצע בזמן:
 $\bar{P}^\pm = \pm \frac{1}{2} Z \omega^2 |A|^2$
 מקדם החזרה של האנרגיה: $R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$
 מקדם העברה של האנרגיה: $T = \frac{P_2^+}{P_1^+} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$
 R + T = 1

גלים עומדים

מיתר חצי אינסופי:
 קצה קשור: $\Psi(x = 0, t) = 0 \Rightarrow \Psi(x, t) = C \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi)$
 קצה חופשי:
 $\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \Psi(x, t) = C \cos(kx) \cos(\omega t + \varphi)$
 מיתר סופי:
 2 קצוות קשורים: $\Psi(x = 0, t) = \Psi(x = L, t) = 0$
 $\lambda_n = \frac{2L}{n}$; $k_n = \frac{\pi n}{L}$; $n = 0, 1, 2, 3 \dots$; $f_n = \frac{vn}{2L}$
 $\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$
 קצה קשור וקצה חופשי:
 $\Psi(x = 0, t) = 0$, $\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$

$hf = E_U - E_L$
 $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$: הנחה על התנע הזוויתי ($n=1,2,3...$)
 $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$: רדיוסים האפשריים (Z- מספר הפרוטונים)
 $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$
 $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 \text{ eV}}{n^2}$: אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n

רמות האנרגיה באטום המימן

פונקציית הגל של החומר:
החסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:
 $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$
נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$
כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.
מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$
המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).
שוויון: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$
כאשר - $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$

עקרון אי הוודאות של הייזנברג:
 $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$
אי ודאות מיקום תנע:
 $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

- אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בזמנית.
- אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.
- אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בזמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה:
 $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

- ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.
- האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי:
 $\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$

משוואת שרדינגר:
משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:
 $i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \Psi(x,t)$
- תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד:
 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U \psi$
משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$
כאשר: $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{\frac{iEt}{\hbar}}$

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי:
פונקציית הגל, חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$
חבילת גלים: $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$
בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l:
 $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$
 $E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2, n = 1,2,3...$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות לציור פונקציית גל:
1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
2. עבור המצב ה-n ציירו גל עם n-1 נקודות צומת (לא כולל הקצוות).

$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
ההנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום היא
- אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי:
 $E = nhf$
כאשר n הוא המספר הקוונטי
 $n = 1,2,3...$
התיאוריה הפוטואלקטרי והאפקט הפוטואלקטרי:
אנרגיה של פוטון יחיד (f- תדירות האור): $E = hf$
הניסוי הפוטואלקטרי:
תדירות סף (W_0 -פונקציית העבודה של המתכת): $hf_0 = W_0$
אנרגיה קינטית מקסי' של האלקטרונים: $E_k = hf - W_0$
מתח עצירה: $eV_0 = E_{k,max}$
השוואה לתורה הגלית:
- לפי התורה הפוטונית
1. עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא אנרגיה של כל אחד מהם. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלטים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם.
2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.
3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.
- לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית
1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.
2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:
אנרגיה של פוטון יחיד: $E = hf$
תנע של פוטון: $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$
מסת מנוחה של פוטון: $m = 0$
אפקט קומפטון:
הסחת קומפטון: $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$
- λ אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.
- $\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:
תנאים ביצירת זוגות:
1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען
2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש לחוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .
3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.
4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.
דואליות גל חלקיק והאופי הגל של החומר:
אורך גל דה ברוילי של חלקיק: $\lambda = \frac{h}{p}$
 $p = mv$ לא יחסותי, $p = m\gamma v$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום:
אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן: $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$
קבוע Rydberg: $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

אורך הגל: 91 nm, 122 nm, 365 nm, 656 nm, 820 nm, 1875 nm
Lyman סדרת (UV) אולטרה סגול
Balmer סדרת (נראה)
Paschen סדרת (אנרגיה אדום)
בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:
1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.
2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.
מודל האטום של בוהר:
תנחות המודל:
1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.
2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.
אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

התאבכות ועקיפה ביחד
 $I(\theta) = \left(\sin c \left(\frac{ka \sin \theta}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{Nkd \sin \theta}{2} \right)}{N \sin \left(\frac{kd \sin \theta}{2} \right)} \right)^2$
כאשר a הוא רוחב כל סדק, d המרחק בין שני סדקים ו-N מספר הסדקים.

אינטרפרומטריה
האינטרפרומטר של מייקלסון:
הפרש הדרכים: $\delta = 2(L_2 - L_1)$
הפרש הפאזה: $\Delta \varphi = k\delta + \pi$
התאבכות בונה: $\delta = \lambda \left(m + \frac{1}{2} \right)$
התאבכות הורסת: $\delta = \lambda m$
עוצמה: $\frac{I}{I_{max}} = \cos^2 \left(\frac{\Delta \varphi}{2} \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi \delta}{\lambda} \right)$
אינטרפרומטר מאד-זנדר:
 $\delta = d(n-1)$
גלאי 1: $\Delta \varphi = k\delta$
גלאי 2: $\Delta \varphi = k\delta + \pi$
עוצמה: $\frac{I}{I_{max}} = \cos^2 \left(\frac{\Delta \varphi}{2} \right)$
אינטרפרומטר פברי-פרו:
- בין שני קרניים צמודות: $\Delta \varphi = k\delta = k2d \cos \theta$
- d רוחב האינטרפרומטר
- θ - זווית פגיעה.
מקדם החזרה בכל פגיעה:
 $R = r^2 = \left(\frac{A_r}{A_i} \right)^2$

העוצמה: $\frac{I}{I_{max}} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta \varphi}{2} \right)}$
 $I(\Delta \varphi)$
FWHM
R = 0.02, 0.5, 0.9
 $(2\pi + \Delta \varphi_1)$
FWHM - רוחב הפונקציה בחצי גובה (עבור R=0.5)
תוספת הפאזה להגיע לחצי גובה מנקודת המקסימום:
 $\Delta \varphi_1 \approx \frac{1-R}{\sqrt{R}}$

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:
חוק ויינ: $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$
 λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין
נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$
תדירות (Hz): $10^5, 30 \times 10^4, 20 \times 10^4, 10 \times 10^4$
קרינת גוף שחור
כתלות באורך גל ובטמפ'
6000 K, 4500 K, 3000 K
עוצמה
אורך גל (nm): 0 UV, 1000, 2000, 3000 IR, התחום
 $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
קבוע בולצמן:

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{40} = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192} \left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$0 \leq l \leq n-1$ ו- $n=1,2,3,\dots$ שלמים, l ו- n
 $-l \leq m \leq l$ שלם ומקיים: m
 אורתוגונליות:

$$\int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות
 למצא את האלקטרון במרחק r מהגרעין):

$$P_{nl}(r) = |R_{nl}|^2 r^2$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z)$$

התנע הזוויתי:

$$\hat{L}^2 Y_l^m = l(l+1) \hbar^2 Y_l^m$$

$$|L| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

גודל התנ"י יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוהר.
 את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של L_z , משם אפשר
 למצא את $\cos \theta = \frac{L_z}{|L|}$

$$\hat{L}_z Y_l^m = m \hbar Y_l^m$$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!
 צפיפות המצבים: $g(n) = 2n^2$ (ה-2 מגיע מהספין).
 כללי מעבר: א. $n_f > n_i$ ב. $\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$ ג. $\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$
 מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

מומנט כוח על דיפול מגנטי $\vec{\mu}$:
 אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב
 הגרעין:

$$\vec{\mu} = \frac{-e \hbar}{2m_e} \vec{L}$$

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5} \text{ eV}/T$$

המגנטון של בוהר:
 האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסילתי עם
 שדה מגנטי חיצוני: $U = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$ כאשר m

הוא המספר הקוונטי של L_z .
 תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות
 בעקבות אפקט זימן: $\Delta E_z = \mu_B B \Delta m$; $\Delta m = \pm 1, 0$
 התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי
 להתפצל לשלושה קווים.

GOOL ספין ניסוי ושטרן גרלך:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

תנ"י כולל:
 כאשר $\vec{L}$ תנ"י מסילתי, $\vec{S}$ תנ"י כתוצאה מהספין.
 $S = \sqrt{s(s+1)} \hbar$
 S גדולה - גודל התנ"י מהספין. s קטנה - הספין של
 החלקיק, עבור אלקטרון $s = \frac{1}{2}$. עבור חלקיקים אחרים
 ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי
 $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם
 נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם
 נקראים **בוזונים**.

$$S_z = m_s \hbar$$

$-s < m_s < s$ בקפיצות של 1
 עבור אלקטרון:
 $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
 מומנט מגנטי מהספין:
 $\vec{\mu}_s = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$

פקטור g, עבור אלקטרון $g \approx 2.0023 \dots$
אטומים מורכבים והטבלה המחזורית: GOOL

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי
 המספרים הקוונטים: n, l, m_l, m_s . בגלל
 האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות
 תלויות ב- n וגם ב- l .
עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני
 אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים:
 n, l, m_l, m_s
 ככל ש- l גדל (יש יותר תנ"י מסילתי) האנרגיה גדלה.