

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את
חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית
ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר
העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים,
תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.
אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.
ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר
מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים
בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

גלים והתאבכות גלים

GOOL

$$v = \lambda f$$

מהירות גל מחזורי:

λ – אורך הגל. f – תדירות הגל.

חוק השבירה:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

θ – הזווית בין הקרן הפוגעת/ מוחזרת לאנך למשטח.

n – מקדם השבירה של כל תווך.

v – מהירות הגל בכל תווך.

גל עומד במיתר שקצותיו קשורים:

$$\ell = n \frac{\lambda}{2}$$

ℓ – אורך המיתר. n – מספר נקודות הקמר (מקסי/ מיני)

קווי מקסימום ראשיים בהתאבכות משני מקורות (ויותר)

$$\sin \theta_n = \frac{x_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{d}$$

שווי-מופע:

θ_n – זווית הסטייה של האור המגיע לנק' המקסימום n

ביחס לכיוון המאונך למישור החריצים.

X_n – המרחק בין אמצע הלוח והמקסימום מסדר n .

L_n – המרחק בין המרכז של החריצים למקסימום מסדר n

n – סדר קו המקסימום. λ – אורך הגל.

d – המרחק בין החריצים.

קווי מינימום בהתאבכות משני מקורות שווי-מופע:

$$\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$$

θ_n – זווית הסטייה של האור המגיע לנק' המינימום n

ביחס לכיוון המאונך למישור החריצים.

X_n – המרחק בין אמצע הלוח והמינימום מסדר n .

L_n – המרחק בין המרכז של החריצים למינימום מסדר n .

λ – אורך הגל. d – המרחק בין החריצים.

נוסחת יאנג:

$$\frac{\Delta X}{L} = \frac{\lambda}{d}$$

ΔX – רוחב פס האור. L – מרחק האנך למסך מהחריצים.

λ – אורך הגל. d – המרחק בין החריצים.

קווי מקסימום בהתאבכות בסריג עקיפה:

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{d} = n N \cdot \lambda$$

θ_n – הזווית למקסימום מסדר n .

d – המרחק בין שני חריצים צמודים. N – קבוע הסריג.

קווי צומת בעקיפה בסדר יחיד:

$$\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{w}$$

θ_n – הזווית למינימום מסדר n .

X_n – מרחק מרכז המינימום מסדר n למרכז המקסימום

המרכז. L_n – המרחק בין החריץ למינימום מסדר n .

w – רוחב החריץ.

GOOL

קבועים

מסות הפרוטון, נויטרון ואלקטרון:

$$m_n \approx m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} ; m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

מטען הפרוטון והאלקטרון:

$$q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = e = -q_e$$

מקדם דיאלקטרי של הריק $k=1$:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} ; \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

GOOL

חוק קולון

חוק קולון: הכוח החשמלי שמפעיל מטען q_1 כלשהו על

מטען q_2 כלשהו:

$$\vec{F} = \frac{k q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = \frac{k q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

$\vec{r}$ – וקטור מ- q_1 אל q_2 , $|\vec{r}| = r$ – מרחק בין המטענים

השדה החשמלי שיוצר מטען q במרחב:

$$\vec{E} = \frac{k q}{r^2} \hat{r} = \frac{k q}{r^3} \vec{r}$$

$\vec{r}$ – וקטור מהמטען q אל הנקודה בה מחשבים את השדה.

שימו לב שבנוסחה הזו המטען הוא זה שיוצר את השדה.

הכוח הפועל על מטען q הנמצא בשדה חשמלי $\vec{E}$:

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

שימו לב שבנוסחה הזו המטען q הוא המטען שמרגיש את

הכוח (המטען בעצמו גם יוצר שדה אבל זה לא רלוונטי

לנוסחה הזו והמטען לא מרגיש את השדה שיוצר)

GOOL

חוק גאוס

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{in} ; Q_{in} = \int \rho dV$$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ – נקרא השטף של השדה החשמלי ומסומן ב- Φ_E

המקרים של חוק גאוס:

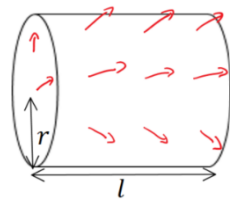
תיל / גליל / מעטפת גלילית אינסופיים:

במקרים האלו נבנה מעטפת גלילית והשטף

יהיה $E 2\pi r l$, כאשר l – אורך ורדיוס המעטפת.

(השטף דרך הבסיסים מתאפס כי השדה מקביל

לשטח הבסיס) שדה של תיל אינסופי:



$$\vec{E} = \frac{\lambda \hat{r}}{2\pi\epsilon_0 r}$$

λ צפיפות מטען ליחידת אורך של התיל.

מישור אינסופי:

במקרים האלו נבנה מעטפת בצורת קובייה והשטף

יהיה $E 2A$, כאשר A זה שטח הפאות המקבילות למשטח.

(השטף דרך הפאות הצדדיות מתאפס כי השדה מקביל לשטח הפאות)

שדה של מישור אינסופי (דק):

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

σ צפיפות מטען ליחידת שטח של הלוח.

כדור / קליפה כדורית:

במקרים האלו נבנה מעטפת כדורית והשטף

יהיה $E 4\pi r^2$, כאשר r זה רדיוס המעטפת.

שדה מחוץ לכדור / קליפה כדורית:

$$\vec{E} = \frac{k Q}{r^2} \hat{r}$$

כמו מטען נקודתי.

חוק גאוס הדיפרנציאלי:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

GOOL

פונקציית הגל של החומר:

ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:

$$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

נרמול: כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.

מיקום ממוצע:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$

(ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).

שונות:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

GOOL

עקרון אי הודאות של הייזנברג:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

אי ודאות מיקום תנע:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.

2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב- X והמיקום ב- Y בו זמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.

2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי:

$$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$$

GOOL

משוואת שרדינגר:

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \Psi(x,t)$$

תנאים נוספים: 1. פסי נורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi + U \Psi$$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$

כאשר:

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{\frac{iEt}{\hbar}}$$

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי:

$$\psi(x) = A \sin(kx)$$

פונקציית הגל, חלקיק חופשי:

$$\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$$

תבילת גלים:

$$\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$$

בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

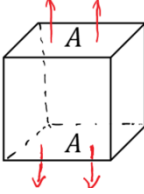
$$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית.

באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית.

עקרונות לציור פונקציית גל:

1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.



2. עבור המצב n -ה ציירו גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).

3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולהפך).

4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.

5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שהפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מהירות גל מחזורי:

λ – אורך הגל. f – תדירות הגל.

חוק השבירה:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

θ – הזווית בין הקרן הפוגעת/ מוחזרת לאנך למשטח.

n – מקדם השבירה של כל תווך.

v – מהירות הגל בכל תווך.

גל עומד במיתר שקצותיו קשורים:

$$\ell = n \frac{\lambda}{2}$$

ℓ – אורך המיתר. n – מספר נקודות הקמר (מקסי/ מיני)

קווי מקסימום ראשיים בהתאבכות משני מקורות (ויותר)

$$\sin \theta_n = \frac{x_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{d}$$

שווי-מופע:

$$\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$$

θ_n – זווית הסטייה של האור המגיע לנק' המקסימום n

ביחס לכיוון המאונך למישור החריצים.

X_n – המרחק בין אמצע הלוח והמקסימום מסדר n .

L_n – המרחק בין המרכז של החריצים למקסימום מסדר n

n – סדר קו המקסימום. λ – אורך הגל.

d – המרחק בין החריצים.

קווי מינימום בהתאבכות משני מקורות שווי-מופע:

$$\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$$

θ_n – זווית הסטייה של האור המגיע לנק' המינימום n

ביחס לכיוון המאונך למישור החריצים.

X_n – המרחק בין אמצע הלוח והמינימום מסדר n

L_n – המרחק בין המרכז של החריצים למינימום מסדר n .

λ – אורך הגל. d – המרחק בין החריצים.

נוסחת יאנג:

$$\frac{\Delta X}{L} = \frac{\lambda}{d}$$

ΔX – רוחב פס האור. L – מרחק האנך למסך מהחריצים.

λ – אורך הגל. d – המרחק בין החריצים.

קווי מקסימום בהתאבכות בסריג עקיפה:

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{d} = n N \cdot \lambda$$

θ_n – הזווית למקסימום מסדר n .

d – המרחק בין שני חריצים צמודים. N – קבוע הסריג.

קווי צומת בעקיפה בסדר יחיד:

$$\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{w}$$

θ_n – הזווית למינימום מסדר n .

X_n – מרחק מרכז המינימום מסדר n למרכז המקסימום

המרכז. L_n – המרחק בין החריץ למינימום מסדר n .

w – רוחב החריץ.

קבועים

מסות הפרוטון, נויטרון ואלקטרון:

$$m_n \approx m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} ; m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

מטען הפרוטון והאלקטרון:

$$q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = e = -q_e$$

מקדם דיאלקטרי של הריק $k=1$:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} ; \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

חוק קולון

חוק קולון: הכוח החשמלי שמפעיל מטען q_1 כלשהו על

מטען q_2 כלשהו:

$$\vec{F} = \frac{k q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = \frac{k$$

$$R_{21}=\frac{1}{\sqrt{24}}a^{-\frac{3}{2}}\frac{r}{a}\exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{30}=\frac{2}{\sqrt{27}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{2r}{3a}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{31}=\frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1r}{6a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{32}=\frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{40}=\frac{1}{4}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3r}{4a}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)\exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{41}=\frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1r}{4a}+\frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\frac{r}{a}\exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{42}=\frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1r}{12a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2\exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{43}=\frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)^3\exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)=R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

l ו- n שלמים, $l=0,1,2,3,\ldots$ ו- $n=1,2,3,\ldots$

m שלם ומקיים:

−
l
≤
m
≤
l

{\displaystyle -l\leq m\leq l}

אורתוגונליות:

$$\int \psi_{nlm}^{*}\psi_{n'l'm'}r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi=\delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק *r* מהגרעין):

$$P_{nl}(r)=|R_{nl}|^2r^2$$

התנע הזוויתי:

L
→

=

r
→

×

p
→

=
(

L

x

,

L

y

,

L

z

)

{\displaystyle {\vec {L}}={\vec {r}}\times {\vec {p}}=(L_{x},L_{y},L_{z})}

$$\hat{L}^2Y_l^m=l(l+1)\hbar^2Y_l^m$$

|

L

|

=

l
(
l
+
1
)
ℏ

{\displaystyle |L|={\sqrt {l(l+1)\hbar }}}

גודל התנאי יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוהר. את הכיוון נבחר באמצעות הגודל של *Lz*, משם אפשר למצא את

cos
⁡
θ
=

L

z

|

L

|

{\displaystyle \cos \theta ={\frac {L_{z}}{|L|}}}

$$\hat{L}_zY_l^m=m\hbar Y_l^m$$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!

צפיפות המצבים:

g
(
n
)
=
2

n

2

{\displaystyle g(n)=2n^{2}}

 (ה-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר: א.

n

i

>

n

f

 ב.

Δ
l
=

l

f

−

l

i

=
±
1

 ג.

Δ
m
=

m

f

−

m

i

=
0
,
±
1

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}$$

מומנט כוח על דיפול מגנטי *μ*: אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

$$\vec{F}=(\vec{\mu}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:

μ
→

=

−

μ

B

ℏ

L
→

{\displaystyle {\vec {\mu }}={\frac {-\mu _{B}}{\hbar }}{\vec {L}}}

המגנטון של בוהר:

μ

B

=

e
ℏ

2

m

e

=
5.788⋅

10

−
5

eV

/

T

{\displaystyle \mu _{B}={\frac {e\hbar }{2m_{e}}}=5.788\cdot 10^{-5}\,eV/T}

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני:

U
=

μ

B

ℏ

L
→

⋅

B
→

=

μ

B

B

m

{\displaystyle U={\frac {\mu _{B}}{\hbar }}{\vec {L}}\cdot {\vec {B}}=\mu _{B}Bm}

 כאשר m הוא המספר הקוונטי של *Lz*.

תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן:

Δ

E

z

=

μ

B

B

Δ
m

;

Δ
m
=
±
1
,
0
;

{\displaystyle \Delta E_{z}=\mu _{B}B\Delta m;\;\;\Delta m=\pm 1,0;\;}

 התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפצל לשלושה קווים.

ספין ניסוי ושטרן גרלך: **GOOL**

$$\vec{j}=\vec{L}+\vec{S}$$

תנאי כולל: כאשר *L* תנאי מסילתי,*S* תנאי כתוצאה מהספין.

$$S=\sqrt{s(s+1)}\hbar$$

S גדולה - גודל התנאי מהספין. *s* קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון *s*=

1
2

{\displaystyle s={\frac {1}{2}}}

. עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי

s
=
0
,

1
2

,
1
,

3
2

,
…

{\displaystyle s=0,{\frac {1}{2}},1,{\frac {3}{2}},\ldots }

. חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם נקראים **בוזונים**.

$$S_{z}=m_{s}\hbar$$

−

s

<

m

s

<

s

{\displaystyle -s<m_{s}<s}

 בקפיצות של 1

עבור אלקטרון:

m

s

=
−

1
2

,

1
2

{\displaystyle m_{s}=-{\frac {1}{2}},{\frac {1}{2}}}

מומנט מגנטי מהספין:

μ

s

=
−
g

μ

B

ℏ

S
→

{\displaystyle {\vec {\mu }}_{s}=-g{\frac {\mu _{B}}{\hbar }}{\vec {S}}}

פקטור g, עבור אלקטרון

2
≈
2.0023
…

{\displaystyle g\approx 2.0023\ldots }

אטומים מורכבים והטבלה המחזורית: GOOL

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: *m_l*, *l*, *n*. בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב-*n* וגם ב-*l*.

אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: GOOL

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-*r*: **ניתן** לעשות הפרדת משתנים לפונקציית הגל:

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\theta(\theta)\phi(\varphi)$$

המשוואה ל-*θ(θ)*:

$$\frac{1}{\theta(\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\theta(\theta)}{\partial\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=m^2$$

משוואה ל-*φ(φ)*:

d

2

φ
(
φ
)

d

φ

2

=
−

m

2

φ
(
φ
)

{\displaystyle {\frac {d^{2}\phi(\varphi)}{d\varphi ^{2}}}=-m^{2}\phi(\varphi)}

פתרון ל-*θ(θ)* ו-*φ(φ)*:

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\theta(\theta)\phi(\varphi)=\varepsilon\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

ε
=

{

(
−
1

)

m

m
>
0

1

m
≤
0

l
≥
0

{\displaystyle \varepsilon =\left\{{\begin{matrix}(-1)^{m}&m>0\\1&m\leq 0\end{matrix}}\right.}

 ו-

|
m
|
≤
l

{\displaystyle |m|\leq l}

 שלם.

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\left({d\over dx}\right)^{|m|}P_l(x)$$

$$P_l(x)={1\over 2^ll!}\left({d\over dx}\right)^l(x^2-1)^l$$

$$Y_0^0=\left({1\over 4\pi}\right)^{\frac{1}{2}};\;Y_2^0=\left({5\over 16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(3\cos^2\theta-1)$$

$$Y_1^0=\left({3\over 4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta;\;Y_2^{\pm1}=\mp\left({15\over 8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta\,e^{\pm i\phi}$$

$$Y_1^{\pm1}=\mp\left({3\over 8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\phi};$$

$$Y_2^{\pm2}=\left({15\over 32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta\,e^{\pm2i\phi}$$

$$Y_3^0=\left({7\over 16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$Y_3^{\pm1}=\mp\left({21\over 64\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)e^{\pm i\phi}$$

$$Y_3^{\pm2}=\left({105\over 32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,e^{\pm2i\phi}$$

$$Y_3^{\pm3}=\mp\left({35\over 64\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^3\theta\,e^{\pm3i\phi}$$

$$P_1^0=\cos\theta;\;P_3^0={1\over2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$P_1^1=\sin\theta;\;P_3^1={3\over2}\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)$$

$$P_2^0={1\over2}(3\cos^2\theta-1)$$

$$P_3^1={3\over2}\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)$$

$$P_2^1=3\sin\theta\cos\theta\;;\;P_3^1={3\over2}\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)$$

$$P_2^2=3\sin^2\theta\;\;\;;\;P_3^3=15\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)$$

אורתוגונליות:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}[Y_l^m(\theta,\varphi)]^{*}\left[Y_l^{m'}(\theta,\varphi)\right]\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

המשוואה לחלק הרדיאלי:

$${1\over R(r)}{\partial\over\partial r}\left(r^2{\partial R(r)\over\partial r}\right)-{2mr^2\over\hbar^2}(V(r)-E)=l(l+1)$$

$$R(r)={u(r)\over r}$$

$$-{\hbar^2\over2m}{d^2u(r)\over dr^2}+\left[V(r)+{\hbar^2\over2m}{l(l+1)\over r^2}\right]u(r)=Eu(r)$$

פתרון עבור אטום המימן:

V
(
r
)
=

k

e

2

r

{\displaystyle V(r)={\frac {ke^2}{r}}}

$$E_n=-{\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}}\cdot{\frac{1}{n^2}}={\frac{E_1}{n^2}}=-13.6eV$$

$$R_{nl}(r)=\sqrt{\left({2\over na}\right)^3{\frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}}e^{-{\frac{r}{na}}}\left({2r\over na}\right)^lL_{n-l-1}^{2l+1}\left({2r\over na}\right)}$$

רדיוס בוהר:

a
=

ℏ

2

k

m

e

2

=
0.529⋅

10

−
10

m

{\displaystyle a={\frac {\hbar ^2}{kme^2}}=0.529\cdot 10^{-10}m}

$$L_{p-p}^p(x)=(-1)^p\left({d\over dx}\right)^pL_q(x)$$

$$L_q(x)=e^x\left({d\over dx}\right)^q(e^{-x}x^q)$$

$$R_{10}=2a^{-{\frac{3}{2}}}\exp\left(-{\frac{r}{a}}\right)$$

$$R_{20}={1\over\sqrt{2}}a^{-{\frac{3}{2}}}\left(1-{\frac{1r}{2a}}\right)\exp\left(-{\frac{r}{2a}}\right)$$

$$\psi(x,y,z)=\sqrt{{8\over abc}}\sin\left({n_x\pi\over a}x\right)\sin\left({n_y\pi\over b}y\right)\sin\left({n_z\pi\over c}z\right)$$

$$E={\pi^2\hbar^2\over2m}\left({n_x^2\over a^2}+{n_y^2\over b^2}+{n_z^2\over c^2}\right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x,y,z)={1\over2}k_yx^2+{1\over2}k_yy^2+{1\over2}k_zz^2$$

$$E=\left(n_x-{\frac{1}{2}}\right)\hbar\omega_x+\left(n_y-{\frac{1}{2}}\right)\hbar\omega_y+\left(n_z-{\frac{1}{2}}\right)\hbar\omega_z$$

ניון: כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא מתרחש במימד אחד).

דרגת הניון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

פונקציית הגל כתלות בזמן **GOOL**

$$\Psi(x,t)=\sum_n\alpha_n\psi_n(x)e^{-{\frac{iE_n}{\hbar}}t}$$

כאשר *ψ_n(x)* הן פתרונות המצבים העמידים ו- *E_n* היא האנרגיה של כל מצב.

|

α

n

|

2

{\displaystyle |\alpha _{n}|^2}

 הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

$$\alpha _n=\int _{-\infty }^{\infty }\psi _n^{*}(x)\Psi (x,0)\,dx$$

- אם *Ψ(x,0)* מנורמלת אז *Ψ(x,t)* מנורמלת לכל *t*.

אופרטורים **GOOL**

אם *λψ=ψ^Q*, אז *ψ* היא פ"ע ו-*λ* הוא ע"י"ע.

פ"ע של אופרטור התנע:

ψ
(
x
)
=
A

e

i
k
x

{\displaystyle \psi (x)=Ae^{ikx}}

הע"י"ע של אופרטור התנע:

ℏ
k

{\displaystyle \hbar k}

פ"ע של אופרטור המיקום:

ψ
(
x
)
=
δ
(
x
−
a
)

{\displaystyle \psi (x)=\delta (x-a)}

וע"י"ע: *a* (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מודד את האנרגיה):

$$\hat{H}=-{\hbar^2\over2m}{\partial^2\over\partial x^2}+V(x)$$

אופרטורים הרמיטיים **GOOL**

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי. כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה:

(
A
Ψ
)

∗

=
Ψ

∗

A

{\displaystyle ({\hat {A}}\Psi)^{*}=\Psi ^{*}{\hat {A}}}

 לכל הפונקציות במרחב,

או

∫

−
∞

∞

Ψ

1

∗

A
Ψ

2

d

x
=

∫

−
∞

∞

(
A
Ψ

1

)

∗

Ψ

2

d

x

{\displaystyle \int _{-\infty }^{\infty }\Psi _{1}^{*}{\hat {A}}\Psi _{2}\,dx=\int _{-\infty }^{\infty }({\hat {A}}\Psi _{1})^{*}\Psi _{2}\,dx}

תכונות של אופרטור הרמיטי:

- ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.
- הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.
- הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל **GOOL**

אם *λ_n* ו-*φ_n* הן הפ"ע וע"י"ע של האופרטור *Â* אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

$$\Psi(x,t)=\sum\alpha_n\phi_n$$

|

α

n

|

2

{\displaystyle |\alpha _{n}|^2}

 זה ההסתברות להיות במצב *φ_n* או ההסתברות למדוד את הערך *λ_n*. הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

$$\alpha _n=\int _{-\infty }^{\infty }\phi _n^{*}\Psi (x,t)\,dx$$

במקרה הרצוף:

$$|\alpha _n|^2\rightarrow |\alpha (k,t)|^2dk;\;\lambda _n\rightarrow \lambda (k);\;\;\phi _n\rightarrow \phi (k)$$

$$\Psi (x,t)=\int _{-\infty }^{\infty }\alpha (k,t)\phi (k)\,dk$$

$$\alpha (k,t)=\int _{-\infty }^{\infty }\phi (k)\Psi (x,t)\,dx$$

יחס החילוף **GOOL**

$$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.

אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).

יחס החילוף של המיקום עם התנע:

⟨
[
x
,

p

x

]
⟩
=
i
ℏ

{\displaystyle \langle [\hat{x},\hat{p}_x]\rangle =i\hbar }

אם"ם האופרטורים *Â* ו-*Ĥ* מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.

אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.

אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות בניהם לפי:

$$\Delta A\Delta B\geq {\frac {1}{2}}|\langle [\hat{A},\hat{B}]\rangle |$$

משפט ארנפס **GOOL**

$${d\over dt}\langle Q\rangle ={\frac {i}{\hbar }}\langle [[\hat{H},\hat{Q}]]\rangle +\left\langle {\frac {\partial \hat{Q}}{\partial t}}\right\rangle$$

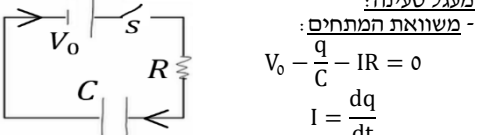
אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים:

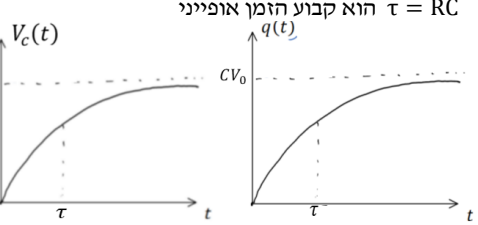
$$n, l, m_l, m_s$$

ככל ש- l גדל (יש יותר תנ"י מסילתי) האנרגיה גדלה.

פריקה וטעינה של קבל



מעגל טעינה:
משוואת המתחים:
 $V_0 - \frac{q}{C} - IR = 0$
 $I = \frac{dq}{dt}$

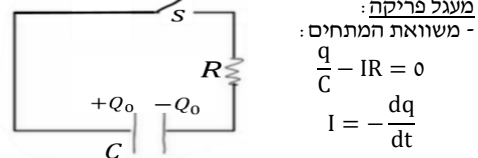


הזרם כתלות בזמן:
 $I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

בהתחלה ($t = 0$) הקבל מתנהג כמו קצר, המתח והמטען על הקבל הם אפס והזרם הוא $\frac{V_0}{R}$.

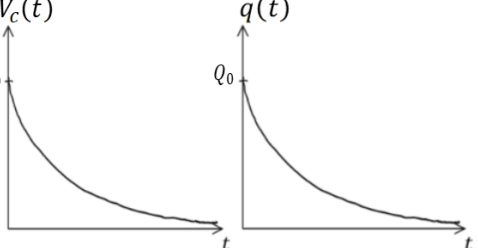
לאחר זמן רב ($t > 5\tau$) הקבל מתנהג כמו נתק, המטען והמתח קבועים והזרם מתאפס.

מעגל פריקה
משוואת המתחים:



המטען והמתח על הקבל כתלות בזמן (בפריקה):

$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$; $V_c(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$; $Q_0 = CV_0$



הזרם כתלות בזמן בפריקה זהה לטעינה:
 $I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

ייצוג באמצעות אלגברה ליניארית:

תכונות המכפלה הפנימית:
 $\langle u|u \rangle = \langle u|u \rangle^*$ סקלר
 $\langle v|v \rangle = 0$ או $\langle v|v \rangle = 1$ אם $|v\rangle = 0$
 $\langle v|(\alpha|u\rangle + \beta|k\rangle) = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|k\rangle$
הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$

נורמה:
 $\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}$

מכפלה פנימית: $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum \alpha_i^* \beta_i$ כאשר $\psi_1 = \sum \alpha_i \phi_i$ ו- $\psi_2 = \sum \beta_i \phi_i$

אי שוויון שורץ:

$|\langle a|b \rangle|^2 \leq \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle$

זווית מוכללת בין וקטורים:
 $\cos \theta = \frac{\langle a|b \rangle}{\sqrt{\langle a|a \rangle \langle b|b \rangle}}$

אי שוויון המשולש:
 $|\langle a| + \langle b| \rangle| \leq |\langle a| | + |\langle b| |$

אופרטורים בייצוג אלגברי

אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i (כפול סקלר כלשהו): $Q_{ij} = \langle e_i | \hat{Q} | e_j \rangle$, שורה j עמודה.

אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז

המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

כתיב נוסף:
 $\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} \psi_2 \rangle$

מטריצה משוחלפת:
 $A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

צמד הרמיטי:
 $A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$

מטריצת יחידה:
 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$

כפל מטריצות:
 $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$

כפל מטריצות הוא לא חילופי:
 $AB \neq BA$

יחס חילוף בין מטריצות:
 $[A, B] = AB - BA$

מטריצה ההופכית:
 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

מטריצה אוניטרית:
 $U^\dagger = U^{-1}$

זהויות:

$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$; $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(A^\dagger)^\dagger = A$; $(\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$

$(AB)^T = B^T A^T$; $\langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$

הגודל של ע"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1. אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.

תנ"י מסילתי והספין:

התנ"י בקואורדינטות כדוריות:

$\hat{L}_z = (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \varphi}$

$\hat{L}_x = -i\hbar \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$

$\hat{L}_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$

$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$

$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$

$\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar \hat{L}_z$

$\hat{L}_- \hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar \hat{L}_z$

יחסי החילוף של התנ"י המסילתי:

$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$; $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$

$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$; $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$

$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm$; $[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$

$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$

$L_\pm Y_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_l^{m \pm 1}$

מטריצות התנ"י עבור $l = 1$:

$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\hat{L}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$

ספין - אותם יחסי חילוף כמו התנ"י:

$\hat{S}_z f = \hbar m_s f$

$\hat{S}^2 f = \hbar^2 S(S+1) f$

$-S \leq m_s \leq S$ - קפיצות של 1
 m_s, S יכולים להיות חצי שלמים.
 S קבוע ותלוי רק בסוג החלקיק. פרמיונים - חצי שלם, בוזונים - ספין שלם.

ספין חצי:
 $S = \frac{1}{2}$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$

$|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\uparrow\rangle$; $|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv |\downarrow\rangle$

$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$

$\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$

פונקציית ספין כללית:
 $|x\rangle = \alpha |x_+\rangle + \beta |x_-\rangle$

המילטוניון פריק:

$\hat{H}(\hat{X}, \hat{P}, \hat{S}) = \hat{H}_0(\hat{X}, \hat{P}) + \hat{H}_S(\hat{S})$

במקרה זה ניתן לפתור את משוואת שרדינגר לספין ולמרחב בנפרד.

חיבור תנ"י:
 $|S_1 - S_2| \leq S < S_1 + S_2$

S הוא של כל המערכת והוא לא קבוע בניגוד לחלקיק בודד.
 $-S \leq m_s \leq S$

$|S, m_s\rangle$ עבור שני חלקיקים עם ספין חצי:
מצבי טריפלט:

$|1, -1\rangle \rightarrow |\downarrow\downarrow\rangle$
 $|1, 1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$

מצב סינגלט:
 $|0, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

תנ"י כולל:
 $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$
אותם יחסי חילוף כמו של התנ"י המסילתי והספין.

$\hat{J}_z f = \hbar m_j f$; $\hat{J}^2 f = \hbar^2 j(j+1) f$

$m_j = m_l + m_s$; $|l - S| \leq j \leq l + S$