

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את
חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית
ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר
העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים,
תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

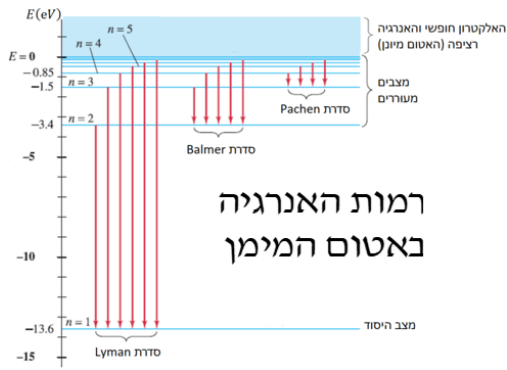
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר
מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים
בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.



רמות האנרגיה באטום המימן

פונקציית הגל של החומר:

ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:

$$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

נרמול: כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

מיקום ממוצע: המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

שונות: כאשר -

עקרון אי הוודאות של הייזנברג:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

אי ודאות מיקום תנע:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.

2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.

4. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

אי ודאות זמן אנרגיה:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.

2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי:

$$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$$

משוואת שרדינגר:

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \Psi(x,t)$$

תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$$

בתלת מימד: משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$

כאשר: $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי:

פונקציית הגל, חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$

חבילת גלים: $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$

בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות לציור פונקציית גל:

1. ציור את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.

2. עבור המצב ה-n ציור גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).

3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולחיפך).

4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.

5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

הניסוי הפוטואלקטרי:

תדירות סף W_0 (פונקציית העבודה של המתכת): $hf_0 = W_0$

אנרגיה קינטית מקסי של האלקטרונים: $E_k = hf - W_0$

מתח עצירה: $eV_0 = E_{kmax}$

השוואה לתורה הגלית: לפי התורה הפוטונית

1. עוצמת האור קשורה למספר האלקטרונים ולא אנרגיה של כל אחד מהם.

2. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלקטרונים הנפלט אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם.

3. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

אנרגיה של פוטון יחיד: $E = hf$

תנע של פוטון: $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$

מסת מנוחה של פוטון: $m = 0$

אפקט קומפטון:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

הסחת קומפטון: λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

ה - אורך גל של האלקטרון החופשי.

אנרגיות של פוטונים ויצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען

2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .

3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.

4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

אורך גל דה ברויל של חלקיק: $\lambda = \frac{h}{p}$

$p = mv$ לא יחסותי, $p = m\gamma v$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום:

אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן: $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$

קבוע Rydberg: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$

אורך הגל

1875 nm

820 nm

656 nm

486 nm

410 nm

Lyman

Balmer

Paschen

אולטרה סגול (UV)

נראה

אינפורה אדום (IR)

בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:

1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.

2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

מודל האטום של בוהר:

הנחות המודל:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים אורביטלים.

2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים מצבים יציבים.

אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

$$hf = E_U - E_L$$

הנחה על התנע הזוויתי (n=1,2,3...): $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$

הרדיוסים האפשריים (Z - מספר הפרוטונים): $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n: $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 \text{ eV}}{n^2}$

GOOL

גלים והתאבכות גלים

מהירות גל מחזורי: $v = \lambda f$

λ - אורך הגל. f - תדירות הגל.

חוק השבירה: $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$

θ - הזווית בין הקרן הפוגעת/ מוחזרת לאנך למשטח.

n - מקדם השבירה של כל תווך.

v - מהירות הגל בכל תווך.

גל עומד במיתר שקצותיו קשורים: $\ell = n \frac{\lambda}{2}$

ℓ - אורך המיתר. n - מספר נקודות הקמר (מקסי/מיני) קווי מקסימום ראשיים בהתאבכות משני מקורות (ויותר) שווי-מופע: $\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{d}$

θ_n - זווית הסטייה של האור המגיע לנק' המקסימום ביחס לכיוון המאונך למישור החריצים.

X_n - המרחק בין אמצע הלוח והמקסימום מסדר n .

L_n - המרחק בין המרכז של החריצים למקסימום מסדר n .

d - סדר קו המקסימום. λ - אורך הגל.

d - המרחק בין החריצים.

קווי מינימום בהתאבכות משני מקורות שווי-מופע: $\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$

θ_n - זווית הסטייה של האור המגיע לנק' המינימום ביחס לכיוון המאונך למישור החריצים.

X_n - המרחק בין אמצע הלוח והמינימום מסדר n .

L_n - המרחק בין המרכז של החריצים למינימום מסדר n .

d - אורך הגל. d - המרחק בין החריצים.

נוסחת יאנג: $\frac{\Delta X}{L} = \frac{\lambda}{d}$

ΔX - רוחב פס האור. L - מרחק האנך למסך מהחריצים.

λ - אורך הגל. d - המרחק בין החריצים.

קווי מקסימום בהתאבכות בסריג עקיפה: $\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{d} = n N \cdot \lambda$

θ_n - הזווית למקסימום מסדר n .

d - המרחק בין שני חריצים צמודים. N - קבוע הסריג.

קווי צומת בעקיפה בסדר יחיד: $\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{w}$

θ_n - הזווית למינימום מסדר n .

X_n - מרחק מרכז המינימום מסדר n למרכז המקסימום המרכזי.

L_n - המרחק בין החריץ למינימום מסדר n .

w - רוחב החריץ.

עוצמה של גלי קול ביחס לסף השמיע: $\frac{I_a}{I_0} = 10^{\left(\frac{\alpha}{10}\right)}$

כאשר I_a היא עוצמת הקול של α דציבל. I_0 סף השמיע של אדם.

ניתן לרשום גם את היחס בין העוצמות של שני דציבלים שונים α ו- β :

$$\frac{I_a}{I_b} = 10^{\left(\frac{\alpha - \beta}{10}\right)}$$

האנרגיה של גל קול: $E = I \cdot S \cdot t$

E - האנרגיה הכוללת של גל הקול. I - העוצמה בדציבל.

S - שטח החתך בו הגל פועל.

t - משך הזמן שחקול פועל בטטח החתך.

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:

חוק בוין: $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$

λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$

תדירות (Hz)

קרינת גוף שחור

כתלות באורך גל ובטמ' 6000 K

4500 K

3000 K

0 UV 1000 IR 2000 3000

התחום

אורך גל (nm)

עוצמה

קבוע בולצמן: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

קבוע פלאנק: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

התנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום היא $E_{min} = hf$

אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי: $E = nhf$

כאשר n הוא המספר הקוונטי $n = 1, 2, 3, \dots$

התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי:

אנרגיה של פוטון יחיד (f - תדירות האור): $E = hf$

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\theta(\theta)\phi(\varphi)=\\=\varepsilon\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

$$\varepsilon=\begin{cases}(-1)^m&m>0\\1&m\leq 0\end{cases}l\geq 0$$

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|}P_l(x)$$

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l(x^2-1)^l$$

$$Y_0^0=\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}};\;Y_2^0=\left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(3\cos^2\theta-1)$$

$$Y_1^0=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta; \;Y_2^{\pm 1}=\mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta\,e^{\pm i\phi}$$

$$Y_1^{\pm 1}=\mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\phi};$$

$$Y_2^{\pm 2}=\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta\,e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_3^0=\left(\frac{7}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$Y_3^{\pm 1}=\mp\left(\frac{21}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)e^{\pm i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 2}=\left(\frac{105}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 3}=\mp\left(\frac{35}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^3\theta\,e^{\pm 3i\phi}$$

$$P_1^0=\cos\theta;\;P_3^0=\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$P_1^1=\sin\theta;\;P_3^1=\frac{3}{2}\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)$$

$$P_2^0=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$$

$$P_3^1=\frac{3}{2}\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)$$

$$P_2^1=3\sin\theta\cos\theta;\;P_3^1=\frac{3}{2}\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)\\P_2^2=3\sin^2\theta\;\;\;\;P_3^3=15\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)$$

אורתונגוליות:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[Y_l^m(\theta,\varphi)\right]^*\left[Y_l^{m'}(\theta,\varphi)\right]\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

המשוואה לחלק הרדיאלי:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r)-E)=l(l+1)$$

$$R(r)=\frac{u(r)}{r}\\-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left[V(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u(r)=Eu(r)$$

פתרון עבור אטום המימן $V(r)=\frac{ke^2}{r}$

$$E_n=-\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{E_1}{n^2}=\frac{-13.6eV}{n^2}$$

$$R_{nl}(r)=\sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}}e^{-\frac{r}{na}}\left(\frac{2r}{na}\right)^lL_{n-l-1}^{l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$

$$a=\frac{\hbar^2}{kme^2}=0.529\cdot 10^{-10}m$$

רדיוס בוהר:

$$L_{q-p}^p(x)=(-1)^p\left(\frac{d}{dx}\right)^pL_q(x)$$

$$L_q(x)=e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^q(e^{-x}x^q)$$

$$R_{10}=2a^{-\frac{3}{2}}exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$R_{20}=\frac{1}{\sqrt{2}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{2}a\frac{r}{a}\right)exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{21}=\frac{1}{\sqrt{24}}a^{-\frac{3}{2}}\frac{r}{a}exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{30}=\frac{2}{\sqrt{27}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{2r}{3a}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{31}=\frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{6}a\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{32}=\frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{40}=\frac{1}{4}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3r}{4a}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

ניוון : כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא מתרחש במימד אחד).
דרגת הניוון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

$\displaystyle \Psi(x,t)=\sum_n\alpha_n\psi_n(x)e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}$
כאשר $\psi_n(x)$ הן פתרונות המצבים העמידים ו- E_n היא האנרגיה של כל מצב. $\alpha_n ^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים. $\alpha_n=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)\Psi(x,0)\,dx$ - אם $\Psi(x,0)$ מנורמלת אז $\Psi(x,t)$ מנורמלת לכל t.
אופרטורים

אם $\hat{Q}\psi=\lambda\psi$ אז ψ היא פייע ו- λ הוא עייע.
פייע של אופרטור התנע: $\psi(x)=Ae^{ikx}$
תעייע של אופרטור התנע: $\hbar k$
פייע של אופרטור המיקום: $\psi(x)=\delta(x-a)$
ועייע: a (המיקום עצמו).
אופרטור ההמילטוניאן (מודר את האנרגיה):

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$$

אופרטורים הרמיטיים

גודל פיזיקאלי ממיד חייב להיות מספר ממשי.
כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים עייי אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה: $(\hat{A}\Psi)^*=\Psi^*\hat{A}$
לכל הפונקציות במרחב,
או $\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1^*\hat{A}\Psi_2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{A}\Psi_1)^*\Psi_2\,dx$
תכונות של אופרטור הרמיטי:
1. ערך התוחלת של אופרטור הרמטי תמיד ממשי.
2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמטי הן אורתוגונליות.
4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל

אם ϕ_n -ו- λ_n הן הפייע ועייע של האופרטור $\hat{A}$ אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

$\Psi(x,t)=\sum\alpha_n\phi_n$

$|\alpha_n|^2$ זה ההסתברות להיות במצב ϕ_n או ההסתברות למדוד את הערך λ_n .
הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

$$\alpha_n=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n^*\Psi(x,t)\,dx$$

במקרה הרציף:

$$|\alpha_n|^2\rightarrow|\alpha(k,t)|^2dk;\;\lambda_n\rightarrow\lambda(k);\;\;\phi_n\rightarrow\phi(k)$$

$$\Psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(k,t)\phi(k)\,dk$$

$$\alpha(k,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\Psi(x,t)\,dx$$

יחס החילוף

$$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.
אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).
יחס החילוף של המיקום עם התנע: $\langle[\hat{x},\hat{p}_x]\rangle=i\hbar$
אם"ם האופרטורים $\hat{A}$ ו- $\hat{B}$ מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.
אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.
אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות
בניהם לפי: $\Delta A\Delta B\geq\frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|$

$\displaystyle \frac{d}{dt}\langle Q\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle+\left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle$
אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.
אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: GOOL

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-r:
ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקציית הגל:

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\theta(\theta)\phi(\varphi)$$

המשוואה ל- $\theta(\theta)$:

$$\frac{1}{\theta(\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\theta(\theta)}{\partial\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=m^2$$

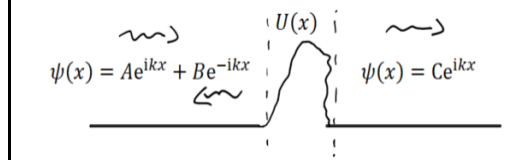
משוואה ל- $\phi(\varphi)$:

$$\frac{\partial^2\phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-m^2\phi(\varphi)$$

פתרון ל- $\theta(\theta)$ ו- $\phi(\varphi)$:

מקדם ההעברה עבור $1<< T$ (ההסתברות לעבור):
$T\approx16\frac{E}{U_0}\left(1-\frac{E}{U_0}\right)e^{-2a\ell}$ $U_0>E$ אורך המחסום, $-\ell$, $\alpha=\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$ הפוטנציאל במחסום.
מקדם החזרה:
אוסילטור הרמוני:
פונקציות הגל: $\psi_1(x)=(\pi b^2)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2b^2}}\;\;\;b=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
$\psi_2(x)=\sqrt{2}(\pi b^2)^{-\frac{1}{4}}\frac{x}{b}e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$
$\psi_3(x)=8\sqrt{3}(\pi b^2)^{-\frac{1}{4}}\left(1-\frac{2x^2}{b^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$
רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ-1: $E_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$
או שאפשר להתחיל את n מאפס ואז $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$
מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה
מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים):

$v_{ph}=\frac{\omega}{k}$
$v_g=\frac{d\omega}{dk}$
מהירות החבורה:
יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל- k
פיזור

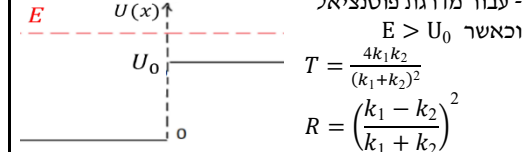


מקדם העברה (ההסתברות לעבור):

$$T=\frac{|C|^2}{|A|^2}$$

אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

$$R=\frac{|B|^2}{|A|^2}$$


- כאשר $E < U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.
- כאשר $E > U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

הגדרות הפונקציה:
או $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$ או $\delta_a(x)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{-x^2/a^2}$ כאשר a הולך לאפס.

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,dx=f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא:

עבור $V(x)=-a\delta(x)$ ו- $0 < E$ נקבל $\psi(x)=\frac{\sqrt{am}}{\hbar}e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$
מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב- a (גודל הבור).

אם $E > 0$:

$$R=\left|\frac{B}{A}\right|^2=\frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

$$T=\left|\frac{C}{A}\right|^2=\frac{1}{1+\beta^2},\;\beta=\frac{am}{\hbar^2k},\;k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

עבור: $V(x)=+a\delta(x)$, E חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

פוטנציאלים תלת מימדים

תיבה תלת מימדית בגודל $a \times b \times c$:

$\psi(x,y,z)=\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{c}z\right)$

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימד:

$$v(x,y,z)=\frac{1}{2}k_yx^2+\frac{1}{2}k_yy^2+\frac{1}{2}k_zz^2$$

$$E=\left(n_x-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x+\left(n_y-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y+\left(n_z-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$$

נורמה: $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$

מכפלה פנימית: $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum \alpha_i^* \beta_i$ כאשר α_i ו- β_i הם המקדמים של פונקציות הגל באותו בסיס

GOOL **אי שוויון שוורץ:**

$$|\langle a | b \rangle|^2 \leq \langle a | a \rangle \langle b | b \rangle$$

זווית מוכללת בין וקטורים: $\cos \theta = \frac{\langle a | b \rangle}{\sqrt{\langle a | a \rangle \langle b | b \rangle}}$

אי שוויון המשולש: $|\langle a | b \rangle| \leq |a| + |b|$

GOOL **אופרטורים בייצוג אלגברי**

אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

- האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i (כפול סקלר כלשהו): $Q_{ij} = \langle e_i | \hat{Q} | e_j \rangle$, שורה i , עמודה j .

- אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

- כתיב נוסף: $\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} \psi_2 \rangle$

$$\langle \hat{Q} \psi | = (\hat{Q} | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | \hat{Q}^\dagger$$

מטריצה משוחלפת: $A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

צמד הרמיטי: $A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & \dots & A_{1n}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & \dots & A_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^* & A_{n2}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$

מטריצת יחידה: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$

כפל מטריצות: $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$

כפל מטריצות הוא לא חילופי: $AB \neq BA$

יחס חילוף בין מטריצות: $[A, B] = AB - BA$

מטריצה ההופכית: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

מטריצה אוניטרית: $U^\dagger = U^{-1}$

זהויות:

$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$; $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(A^\dagger)^\dagger = A$; $(\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$

$(AB)^T = B^T A^T$; $\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$

- הגודל של ע"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.

אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.

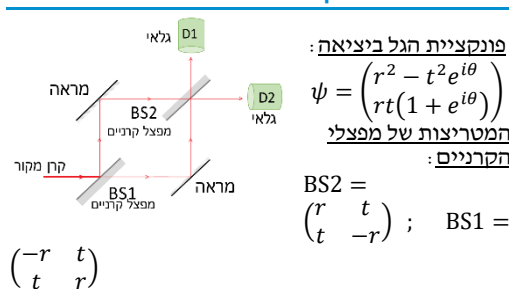
GOOL **אינטרפרומטר מאך זנדר:**

פונקציית הגל ביציאה:

$$\psi = \begin{pmatrix} r^2 - t^2 e^{i\theta} \\ rt(1 + e^{i\theta}) \end{pmatrix}$$

המטריצות של מפצלי הקרניים:

$$BS2 = \begin{pmatrix} r & t \\ t & -r \end{pmatrix}; \quad BS1 = \begin{pmatrix} -r & t \\ t & r \end{pmatrix}$$



$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{4}r + \frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12}r\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

l ו- n שלמים, $0 \leq l \leq n-1$, $n=1,2,3,\dots$

m שלם ומקיים: $-l \leq m \leq l$

אורתוגונליות:

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק r מהגרעין):

$$\int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

התנע הזוויתי: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z)$

$$\hat{L}^2 Y_l^m = l(l+1) \hbar^2 Y_l^m$$

$$|L| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

גודל התנע יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוהר.

את הכיוון נאתר באמצעות הגודל של L_z , משם אפשר למצא את $\cos \theta = \frac{L_z}{|L|}$

$$\hat{L}_z Y_l^m = m \hbar Y_l^m$$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונט!

צפיפות המצבים: $g(n) = 2n^2$ (ה-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר: א. $n_i > n_f$. ב. $\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$. ג. $\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

מומנט כוח על דיפול מגנטי $\vec{\mu}$: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}$$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:

$$\vec{\mu} = \frac{-e\hbar}{2m_e} \vec{L}$$

המגנטון של בוהר: $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני: $U = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$ כאשר m הוא המספר הקוונטי של L_z .

תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן: $\Delta E_z = \mu_B B \Delta m$; $\Delta m = \pm 1, 0$

התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרי להשתפל לשלושה קווים.

GOOL **ספין ניסוי ושרטון גרלך:**

תנ"ז כולל: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

כאשר $\vec{L}$ תנ"ז מסילתי, $\vec{S}$ תנ"ז כתוצאה מהספין.

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

S גדולה - גודל התנ"ז מהספין. s קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון $s = \frac{1}{2}$. עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי: $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם חצי שלם נקראים **בוזונים**.

$$S_z = m_s \hbar$$

$-s < m_s < s$ בקפיצות של 1

עבור אלקטרון: $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

מומנט מגנטי מהספין: $\vec{\mu}_s = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$

פקטור g , עבור אלקטרון $g \approx 2.0023 \dots$

GOOL **אטומים מורכבים והטבלה המחזורית:**

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: n, l, m_l, m_s . בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב- n וגם ב- l .

עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: n, l, m_l, m_s .

ככל ש- l גדל (יש יותר תנ"ז מסילתי) האנרגיה גדלה.

GOOL **ייצוג באמצעות אלגברה לינארית:**

תכונות המכפלה הפנימית:

$\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^*$ סקלר

$\langle v | v \rangle$ תמיד ממשי גדול או שווה לאפס

אם $\langle v | v \rangle = 0$ אז $|v\rangle = |0\rangle$

$\langle v | (\alpha |u\rangle + \beta |k\rangle) = \alpha \langle v | u \rangle + \beta \langle v | k \rangle$

הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל: