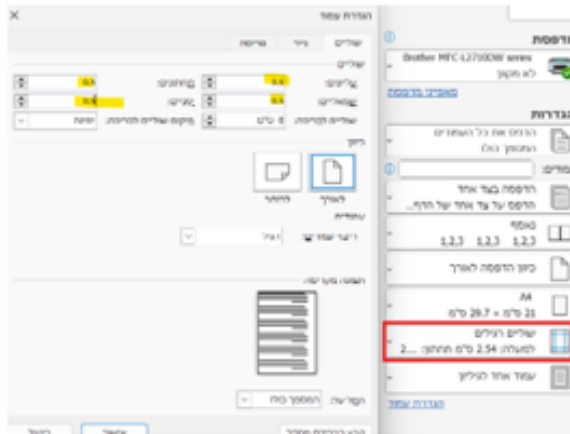


הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השולים, לבחור שולים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

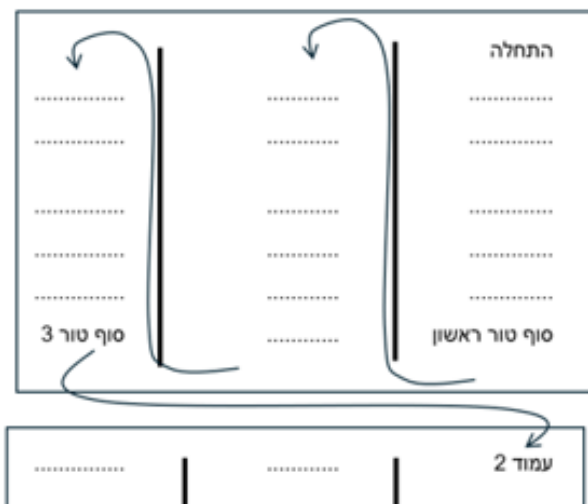
מבנה הדף:

הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.



כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

תנע ואנרגיה יחסותיים: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$; $E = \gamma mc^2$

הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ולא למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות. נוסחאות נוספות:

$E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4$; $|p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot mc$

אנרגיית מנוחה: $E_0 = mc^2$

אנרגיה קינטית: $E_k = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$

ניוטרינו והאנרגיה הקינטית היא: $E = |p|c = h\nu$

ν היא התדירות ו- $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ קבוע פלאנק

טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:

$E' = \gamma_0(E - v_0 p_x)$; $p'_x = \gamma_0(p_x - v_0 E/c^2)$

$p'_y = p_y$; $p'_z = p_z$

וקטור תנע אנרגיה: $(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c})$

"גודל הוקטור" (מינוס באנרגיה) זהה בכל מערכות היחוס:

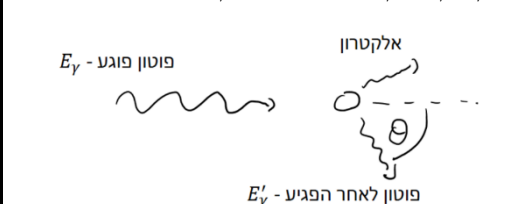
$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = \text{const}$

הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.

עבור גוף יחיד הקבוע הוא: $m^2 c^2$

פיזור קומפטון:

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$

E_γ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה

E'_γ - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה

m_e - מסת אלקטרון

θ - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.

יחידת האלקטרון וולט: $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$

המרת מסת הגופים לאנרגיה:

$m_e | \approx 8.19 \times 10^{-14} \text{ J} (\approx 511 \text{ keV})$

$m_p | \approx 1.50 \times 10^{-10} \text{ J} (\approx 938 \text{ MeV})$

$m_{\text{Uranium}}^{\text{UV}} \approx 3.55 \times 10^{-8} \text{ J} (\approx 225 \text{ GeV})$

ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ- $\frac{m_e v}{c}$

כלומר הכמות (המספר) זהה רק ביחידות נחלק ב- c .

יחסות פרטית

תיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות (אינרציאליות).

עקרונות יסוד בתורת היחסות:

חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.

האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.

מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.

אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור.

בואו אקום. מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.

הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם: x, y, z) שעוברת טרנספורמציה.

פקטור גאמא: $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$; $\beta = \frac{v_0}{c}$

γ_0 תמיד גדולה מ-1

טרנספורמציה לורנץ למיקום והזמן:

$x' = \gamma_0(x - v_0 t)$; $y' = y$; $z' = z$

$t' = \gamma_0\left(t - \frac{v_0 x}{c^2}\right)$; $\beta = \frac{v_0}{c}$; $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

טרנספורמציה הפוכה:

$x = \gamma_0(x' + v_0 t')$; $y' = y$; $z' = z$

$t = \gamma_0\left(t' + \frac{v_0 x'}{c^2}\right)$

הצירים של המערכות חייבים להיות מקבילים.

בזמן $t = t' = 0$ חייבים שהראשיות מתלכדות.

המערכת העצמית:

מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

זמן עצמי τ מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

אורך עצמי l_0 האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

התכונות האורך: שינוי האורך ממערכת המנוחה

(העצמית) למערכת נעה

התארכות הזמן: שינוי הזמן ממערכת המנוחה (העצמית)

למערכת נעה: $\Delta t = \gamma_0 \tau$

שינוי זווית במדידת אורך: $\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$

זווית ביחס לציר ה- x (ציר התנועה) במערכת העצמית

θ - זווית ביחס לציר ה- x (ציר התנועה) במערכת אחרת.

אפקט דופלר היחסותי:

זמן המחזור של הגל: $T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tau$

אורך הגל: $\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda'$

תדירות הגל: $f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f'$

λ', f', τ , הזמן, התדירות ואורך הגל במערכת העצמית

טרנספורמציה לורנץ למהירויות:

$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$; $v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$; $v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$

אברציה - שינוי זווית המהירות:

$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0(\cos \theta - \frac{v_0}{c})}$

שימו לב שפה השינוי הוא בזווית של וקטור המהירות (כיוון התנועה) ולא שינוי זווית של הגוף כמו למעלה.

כוחות ביחסות פרטית: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma^3 \vec{a}_{||} + m\gamma \vec{a}_{\perp}$

הרכיב המאונך והמקביל של התאוצה למהירות

גודל הרכיב המקביל של התאוצה:

טרנספורמציה של הכוחות:

$F'_x = F_x - \frac{v_0(F_y v_y + F_z v_z)}{c^2 - v_0 v_x}$

$F'_y = \frac{F_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$; $F'_z = \frac{F_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$

טרנספורמציה הפוכה:

$F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v'_x}$

$F_y = \frac{F'_y}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$; $F_z = \frac{F'_z}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$

גלים והתאבכות גלים

מהירות גל מחזורי:

$v = \lambda f$

λ - אורך הגל. f - תדירות הגל.

חוק השבירה:

$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$

θ - הזווית בין הקרן הפוגעת/מוחזרת לאנך למשטח.

n - מקדם השבירה של כל תווך.

v - מהירות הגל בכל תווך.

גל עומד במיתר שקצותיו קשורים:

$\ell = n \frac{\lambda}{2}$

ℓ - אורך המיתר. n - מספר נקודות הקמר (מקסי/מיני)

קווי מקסימום ראשיים בהתאבכות משני מקורות (ויותר)

שווי-מופע: $\sin \theta_n = \frac{x_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{d}$

θ_n - זווית הסטייה של האור המגיע לנק' המקסימום

ביחס לכיוון המאונך למישור החריצים.

X_n - המרחק בין אמצע הלוח והמקסימום מסדר n .

L_n - המרחק בין המרכז של החריצים למקסימום מסדר n

d - המרחק בין החריצים.

קווי מינימום בהתאבכות משני מקורות שווי-מופע:

$\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$

θ_n - זווית הסטייה של האור המגיע לנק' המינימום

ביחס לכיוון המאונך למישור החריצים.

X_n - המרחק בין אמצע הלוח והמינימום מסדר n .

L_n - המרחק בין המרכז של החריצים למינימום מסדר n .

d - המרחק בין החריצים.

נוסחת יאנג:

$\frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{d}$

Δx - רוחב פס האור. L - מרחק האנך למסך מהחריצים.

λ - אורך הגל. d - המרחק בין החריצים.

קווי מקסימום בהתאבכות בסריג עקיפה:

$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{d} = nN \cdot \lambda$

θ_n - הזווית למקסימום מסדר n .

d - המרחק בין שני חריצים צמודים. N - קבוע הסריג.

קווי צומת בעקיפה בסדר יחיד:

$\sin \theta_n = \frac{x_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{w}$

θ_n - הזווית למינימום מסדר n .

X_n - מרחק מרכז המינימום מסדר n למרכז המקסימום

המרכז. L_n - המרחק בין החריץ למינימום מסדר n .

w - רוחב החריץ.

עוצמה של גלי קול ביחס לסף השמע:

כאשר I_a היא עוצמת הקול של α דציבל. I_0 - סף השמע של אדם.

ניתן לרשום גם את היחס בין העוצמות של שני דציבלים

שונים α ו- β : $\frac{I_a}{I_b} = 10^{\frac{\alpha - \beta}{10}}$

האנרגיה של גל קול: $E = I \cdot S \cdot t$

E - האנרגיה הכוללת של גל הקול. I - העוצמה בדציבל.

S - שטח החתך בו הגל פוגע.

t - משך הזמן שהקול פוגע בשטח החתך.

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:

חוק בוין: $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$

קרינת גוף שחור

כתלות באורך גל ובטמפר



קבוע בולצמן: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

קבוע פלאנק: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

התנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של

מטען בתנועה הרמונית באטום היא

אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך

המינימלי: $E = nhf$

כאשר n הוא המספר הקוונטי

התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי:

אנרגיה של פוטון יחיד (f -תדירות האור): $E = hf$

הניסוי הפוטואלקטרי:

תדירות סף (W_0 -פונקציית העבודה של המתכת): $hf_0 = W_0$

אנרגיה קינטית מקסי של האלקטרונים: $E_k = hf - W_0$

מתח עצירה: $eV_0 = E_{k, \text{max}}$

השוואה לתורה הגלית:

לפי התורה הפוטונית

1. עוצמת האור קשורה

למספר הפוטונים ולא

אנרגיה של כל אחד מהם.

הגדלת העוצמה תגדיל את

מספר האלק' הנפלטים אבל

לא את האנרגיה הקינטית

שלם.

2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.

3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה

תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. תאוריות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

אנרגיה של פוטון יחיד: $E = hf$

תנע של פוטון: $p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$

מסת מנוחה של פוטון:

אפקט קומפטון:

הסחת קומפטון: $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן

המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

$\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען

2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית

מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .

3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף

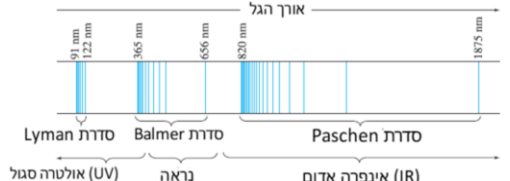
(בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.

4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.
דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

אורך גל דה ברולי של חלקיק: $\lambda = \frac{h}{p}$

$p = mv$ לא יחסותי, $p = mv\gamma$ יחסותי
מודלים מוקדמים של האטום:

אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן: $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$
קבוע Rydberg: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$



בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:
1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.
2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

מודל האטום של בוהר:

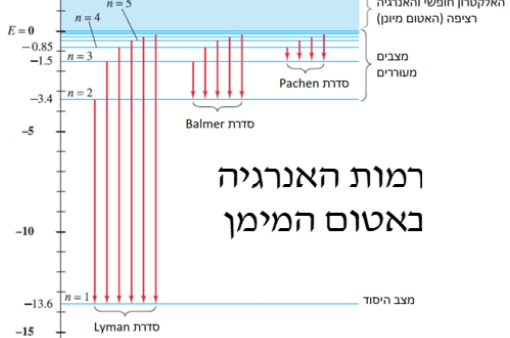
הנחות המודל:
1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.
2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.
אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

$hf = E_U - E_L$
הנחה על התנע הזוויתי ($n=1,2,3,\dots$): $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$

הרדיוסים האפשריים (Z - מספר הפרוטונים): $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$

$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n: $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 eV}{n^2}$



פונקציית הגל של החומר:

ההסתברות שחלקיק נמצא בין x ל-x+Δx היא: $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$

רמול: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$

כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.

מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$

המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).

שונות: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

כאשר - $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$

עקרון אי הודאות של הייזנברג:

אי ודאות מיקום תנע: $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2}$

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בזמנית.
2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-Y והמיקום ב-X בזמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה: $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.
2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי: $\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$

משוואת שרדינגר:
משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \Psi(x,t)$
- תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi + U \Psi$
משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$

כאשר: $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי:

פונקציית הגל, חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$
חבילת גלים:

$\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$
בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l:

$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$

$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית.

באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות לציור פונקציית גל:

1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
2. עבור המצב ה-n ציירו גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).

3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולחיצה).

4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.

5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מנהור (tunneling):

מקדם ההעברה עבור $T \ll 1$ (ההסתברות לעבור): $T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$

$\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$, l - אורך המחסום, $U_0 > E$ גובה הפוטנציאל במחסום.

מקדם החזרה: $R = 1 - T$

אוסילטור הרמוני:

פונקציות הגל: $\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}, b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$\psi_2(x) = \sqrt{2} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$

$\psi_3(x) = 8\sqrt{3} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$

רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ-1: $E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

או שאפשר להתחיל את n מאפס ואז $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

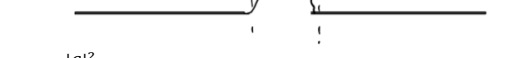
מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה:

מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים): $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$

מהירות החבורה: $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל-k

פזיור:



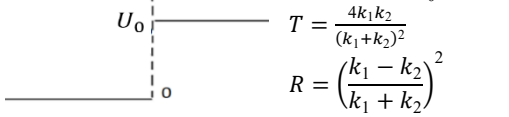
מקדם העברה (ההסתברות לעבור): $T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$

אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה: $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$

- עבור מדרגת פוטנציאל $E > U_0$ וכאשר $U(x) \uparrow$



כאשר $E < U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.

- כאשר $E > U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

פונקציית דלתא של דיראק:

הגדרות הפונקציה: $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$

או $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ או $\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$ כאשר a הולך לאפס.

פיזור מפונקציית דלתא: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$

עבור $E < 0$ $V(x) = -a\delta(x)$

נקבל: $E = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2} \psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2} |x|}$

מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב-a (גודל הבור).

אם $E > 0$: $R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$

$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1}{1+\beta^2}, \beta = \frac{am}{\hbar^2 k}, k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

עבור $E, V(x) = +a\delta(x)$ חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

פוטנציאלים תלת מימדים:

תיבה תלת מימדית בגודל $a \times b \times c$: $\psi(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$

$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$v(x,y,z) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$

$E = \left(n_x - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_z$

ניווט: כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא מתרחש במימד אחד).

דרגת הניווט מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

פונקציית הגל כתלות בזמן:

$\Psi(x,t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$

כאשר $\psi_n(x)$ הן פתרונות המצבים העמידים ו- E_n היא האנרגיה של כל מצב.

$|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x,0) dx$

- אם $\Psi(x,0)$ מנורמלת אז $\Psi(x,t)$ מנורמלת לכל t.

אופרטורים:

אם $\hat{\psi} = \lambda \psi$, אז $\hat{\psi}$ היא פ"ע ו- λ הוא ע"ע.

פ"ע של אופרטור התנע: $\psi(x) = Ae^{ikx}$

הע"ע של אופרטור התנע: $\hbar k$

פ"ע של אופרטור המיקום: $\psi(x) = \delta(x-a)$

וע"ע: a (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מוודד את האנרגיה):

$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$

אופרטורים הרמיטיים:

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי. כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה: $(\hat{A}\psi)^* = \psi^* \hat{A}$ לכל הפונקציות במרחב, או $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \psi_1)^* \psi_2 dx$

תכונות של אופרטור הרמיטי:

1. ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.

2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.

3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.

4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל:

אם ϕ_n ו- λ_n הן הפ"ע וע"ע של האופרטור $\hat{A}$ אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני: U = μ<!-- μ --> B ℓ<!-- ℓ --> ⋅<!-- ⋅ --> B = μ<!-- μ --> B Bm כאשר m {\displaystyle m} הוא המספר הקוונטי של L z תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן: Δ<!-- Δ --> E z = μ<!-- μ --> B BΔ<!-- Δ -->m ; Δ<!-- Δ -->m = ±<!-- ± --> 1 , 0 ; התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפצל לשלושה קווים. ספין ניסוי ושטרן גרלך: תנ"י כולל: f →<!-- → --> = L →<!-- → --> + S →<!-- → --> ; כאשר L →<!-- → --> תנ"י מסילתי, S →<!-- → --> תנ"י כתוצאה מהספין. S = s (s + 1) ℏ<!-- ℏ --> גדולה - גודל התנ"י מהספין. s קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון s = 1 2 . עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי s = 0 , 1 2 , 1 , 3 2 , …<!-- … --> . חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם נקראים פרמיונים וחלקיקים שהספין שלהם שלם נקראים בוזונים. S z = m s ℏ<!-- ℏ --> s m s < s < −<!-- − --> s בקפיצות של 1 עבור אלקטרון: m s = −<!-- − --> 1 2 , 1 2 מומנט מגנטי מהספין: μ<!-- μ --> s = −<!-- − --> g μ<!-- μ --> B ℏ<!-- ℏ --> ; פקטור g, עבור אלקטרון ≈ 2 ... 2.0023 אטומים מורכבים והטבלה המחזורית: GOOL כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: m l , m s , l , n . בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב- n וגם ב- l . עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: m l , m s , l , n . ככל ש- l גדל (יש יותר תנ"י מסילתי) האנרגיה גדלה. ייצוג באמצעות אלגברה לינארית: GOOL תכונות המכפלה הפנימית: ⟨<!-- ⟨ --> u v ⟩<!-- ⟩ --> = ⟨<!-- ⟨ --> v u ⟩<!-- ⟩ --> ∗<!-- ∗ --> סקלר ⟨<!-- ⟨ --> v v ⟩<!-- ⟩ --> = 0 או ⟨<!-- ⟨ --> v v ⟩<!-- ⟩ --> = 0 אם ⟨<!-- ⟨ --> α<!-- α --> u ⟩<!-- ⟩ --> + β<!-- β --> k ⟩<!-- ⟩ --> = α<!-- α --> ⟨<!-- ⟨ --> v u ⟩<!-- ⟩ --> + β<!-- β --> ⟨<!-- ⟨ --> v k ⟩<!-- ⟩ --> הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל: ⟨<!-- ⟨ --> ψ<!-- ψ --> 1 ψ<!-- ψ --> 2 ⟩<!-- ⟩ --> = ∫<!-- ∫ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> ∞<!-- ∞ --> ψ<!-- ψ --> 1 ∗<!-- ∗ --> ψ<!-- ψ --> 2 d x נורמה: v = √<!-- √ --> ⟨<!-- ⟨ --> v v ⟩<!-- ⟩ --> ; מכפלה פנימית: ⟨<!-- ⟨ --> ψ<!-- ψ --> 1 ψ<!-- ψ --> 2 ⟩<!-- ⟩ --> = ∑<!-- ∑ --> α<!-- α --> i β<!-- β --> i כאשר α<!-- α --> i ו- β<!-- β --> i הם המקדמים של פונקציות הגל באותו בסיס אי שוויון שורץ: GOOL ⟨<!-- ⟨ --> a b ⟩<!-- ⟩ --> 2 ≤<!-- ≤ --> ⟨<!-- ⟨ --> a a ⟩<!-- ⟩ --> ⟨<!-- ⟨ --> b b ⟩<!-- ⟩ --> זווית מוכללת בין וקטורים: cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> = ⟨<!-- ⟨ --> a b ⟩<!-- ⟩ --> ⟨<!-- ⟨ --> a a ⟩<!-- ⟩ --> ⟨<!-- ⟨ --> b b ⟩<!-- ⟩ --> ; אי שוויון המשולש: ⟨<!-- ⟨ --> a + b ⟩<!-- ⟩ --> ≤<!-- ≤ --> a + b ; אופרטורים בייצוג אלגברי GOOL אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות: $\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}$ - האיבר Q i j מעביר את הוקטור e j לוקטור e i (כפול סקלר כלשהו): e i , Q i j = ⟨<!-- ⟨ --> e i Q e j ⟩<!-- ⟩ --> שורה, j עמודה. אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור. - כתבי נוסף: ⟨<!-- ⟨ --> ψ<!-- ψ --> 1 Q ψ<!-- ψ --> 2 ⟩<!-- ⟩ --> = ⟨<!-- ⟨ --> ψ<!-- ψ --> 1 Q ψ<!-- ψ --> 2 ⟩<!-- ⟩ --> ⟨<!-- ⟨ --> Q ψ<!-- ψ --> ⟩<!-- ⟩ --> = (Q ψ<!-- ψ --> ⟩<!-- ⟩ -->) †<!-- † --> = ⟨<!-- ⟨ --> ψ<!-- ψ --> Q ^<!-- ^ --> מטריצה משוחלפת: A T = (A 11 A 12 ⋯<!-- ⋯ --> A 1 n A 12 A 22 ⋯<!-- ⋯ --> A 2 n ⋮<!-- ⋮ --> ⋮<!-- ⋮ --> ⋮<!-- ⋮ --> ⋮<!-- ⋮ --> A 1 n A 2 n ⋯<!-- ⋯ --> A n n) ; צמד הרמיטי: A †<!-- † --> = (A ∗<!-- ∗ -->) T = (A 11 ∗<!-- ∗ --> A 21 ∗<!-- ∗ --> ⋯<!-- ⋯ --> A n1 ∗<!-- ∗ --> A 12 ∗<!-- ∗ --> A 22 ∗<!-- ∗ --> ⋯<!-- ⋯ --> A n2 ∗<!-- ∗ --> ⋮<!-- ⋮ --> ⋮<!-- ⋮ --> ⋮<!-- ⋮ --> ⋮<!-- ⋮ --> A 1 n ∗<!-- ∗ --> A 2 n ∗<!-- ∗ --> ⋯<!-- ⋯ --> A n n ∗<!-- ∗ -->) ; מטריצת יחידה:	 P 2 = 3 sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> ; P 3 = 3 2 sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> (5 cos 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> −<!-- − --> 1) P 2 = 3 sin 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> ; P 3 = 15 sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> (1 −<!-- − --> cos 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ -->) אורתוגונליות: $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[Y_l^m(\theta,\varphi)\right]^*\left[Y_l^{m'}(\theta,\varphi)\right]\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}.$ המשוואה לחלק הרדיאלי: $\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r)-E)=l(l+1)$ $R(r)=\frac{u(r)}{r}$ $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left[V(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u(r)=Eu(r)$ פתרון עבור אטום המימן: V (r) = k e 2 r E n = −<!-- − --> m k 2 e 4 1 2 ℏ<!-- ℏ --> 2 ⋅<!-- ⋅ --> 1 n 2 = E 1 n 2 = −<!-- − --> 13.6 eV n 2 R n l (r) = 2 (2 n a) 3 (n −<!-- − --> l −<!-- − --> 1) ! 2 n ! (n −<!-- − --> l) ! 3 e −<!-- − --> r n a (2 r n a) l L n −<!-- − --> l −<!-- − --> 1 (2 r n a) רדיוס בוהר: a = ℏ<!-- ℏ --> 2 k m e 2 = 0.529 ⋅<!-- ⋅ --> 10 −<!-- − --> 10 m L p −<!-- − --> p (x) = (−<!-- − --> 1) p (d d x) p L q (x) L q (x) = e x (d d x) q (e −<!-- − --> x x q) R 10 = 2 a −<!-- − --> 3 2 exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r a) R 20 = 1 √<!-- √ --> 2 a −<!-- − --> 3 2 (1 −<!-- − --> 1 2 a r) exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r 2 a) R 21 = 1 √<!-- √ --> 24 a −<!-- − --> 3 2 r a exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r 2 a) R 30 = 2 √<!-- √ --> 27 a −<!-- − --> 3 2 (1 −<!-- − --> 2 r 3 a + 2 27 (r a) 2) exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r 3 a) R 31 = 8 27 √<!-- √ --> 6 a −<!-- − --> 3 2 (1 −<!-- − --> 1 6 a r) (r a) exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r 3 a) R 32 = 4 81 √<!-- √ --> 30 a −<!-- − --> 3 2 (r a) 3 2 exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r 3 a) R 40 = 1 4 a −<!-- − --> 3 2 (1 −<!-- − --> 3 r 4 a + 1 8 (r a) 2 −<!-- − --> 1 192 (r a) 3) exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r 4 a) R 41 = √<!-- √ --> 5 16 √<!-- √ --> 3 a −<!-- − --> 3 2 (1 −<!-- − --> 1 4 a r + 1 80 (r a) 2) r a exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r 4 a) R 42 = 1 64 √<!-- √ --> 5 a −<!-- − --> 3 2 (1 −<!-- − --> 12 a r) (r a) 2 exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r 4 a) R 43 = 1 768 √<!-- √ --> 35 a −<!-- − --> 3 2 (r a) 3 exp ⁡<!-- ⁡ --> (−<!-- − --> r 4 a) פתרון כללי: ψ<!-- ψ --> n l m (r , θ<!-- θ --> , ϕ<!-- ϕ -->) = R n l (r) Y l m (θ<!-- θ --> , ϕ<!-- ϕ -->) 0 ≤<!-- ≤ --> l ≤<!-- ≤ --> n −<!-- − --> 1 n = 1, 2, 3 …<!-- … --> n −<!-- − --> 1 ≤<!-- ≤ --> m ≤<!-- ≤ --> l שלם ומקיים: אורתוגונליות: ∫<!-- ∫ --> ψ<!-- ψ --> n l m ψ<!-- ψ --> n ′<!-- ′ --> l ′<!-- ′ --> m ′<!-- ′ --> r 2 sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> d r d θ<!-- θ --> d ϕ<!-- ϕ --> = δ<!-- δ --> n n ′<!-- ′ --> δ<!-- δ --> l l ′<!-- ′ --> δ<!-- δ --> m m ′<!-- ′ --> פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק r מהגרעין): P n l (r) = R n l 2 r 2 התנע הזוויתי: L →<!-- → --> = r →<!-- → --> ×<!-- × --> p →<!-- → --> = (L x , L y , L z) L 2 Y l m = l (l + 1) ℏ<!-- ℏ --> 2 Y l m L = √<!-- √ --> l (l + 1) ℏ<!-- ℏ --> גודל התנ"י יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוהר. את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של L z , משם אפשר למצא את cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> = L z L L z Y l m = m ℏ<!-- ℏ --> Y l m גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט! צפיפות המצבים: g (n) = 2 n 2 (ה-2 מגיע מהספין). כללי מעבר: א. n i > n f ב. Δ<!-- Δ --> l = l f −<!-- − --> l i = ±<!-- ± --> 1 ג. Δ<!-- Δ --> m = m f −<!-- − --> m i = 0 , ±<!-- ± --> 1 מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי: מומנט כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי: τ<!-- τ --> →<!-- → --> = μ<!-- μ --> →<!-- → --> ×<!-- × --> B →<!-- → --> ; אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי: U = −<!-- − --> μ<!-- μ --> →<!-- → --> ⋅<!-- ⋅ --> B →<!-- → --> כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד: F →<!-- → --> = (μ<!-- μ --> →<!-- → --> ⋅<!-- ⋅ --> ∇<!-- ∇ --> →<!-- → -->) B →<!-- → --> מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין: μ<!-- μ --> →<!-- → --> = −<!-- − --> μ<!-- μ --> B ℏ<!-- ℏ --> L →<!-- → --> ; המגנטון של בוהר: μ<!-- μ --> B = e ℏ<!-- ℏ --> 2 m e = 5.788 ⋅<!-- ⋅ --> 10 −<!-- − --> 5 eV / T 	 Ψ (x , t) = ∑<!-- ∑ --> α<!-- α --> n ϕ<!-- ϕ --> n α<!-- α --> n 2 זה ההסתברות להיות במצב ϕ<!-- ϕ --> n או ההסתברות למדוד את הערך λ<!-- λ --> n . הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל. α<!-- α --> n = ∫<!-- ∫ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> ∞<!-- ∞ --> ϕ<!-- ϕ --> n ∗<!-- ∗ --> Ψ (x , t) d x במקרה הרציף: α<!-- α --> n 2 →<!-- → --> α<!-- α --> (k , t) 2 d k ; λ<!-- λ --> n →<!-- → --> λ<!-- λ --> (k) ; ϕ<!-- ϕ --> n →<!-- → --> ϕ<!-- ϕ --> (k) Ψ (x , t) = ∫<!-- ∫ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> ∞<!-- ∞ --> α<!-- α --> (k , t) ϕ<!-- ϕ --> (k) d k α<!-- α --> (k , t) = ∫<!-- ∫ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> ∞<!-- ∞ --> ϕ<!-- ϕ --> (k) Ψ (x , t) d x יחס החילוף GOOL [A ^<!-- ^ --> , B ^<!-- ^ -->] = A ^<!-- ^ --> B ^<!-- ^ --> −<!-- − --> B ^<!-- ^ --> A ^<!-- ^ --> יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו. אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים). יחס החילוף של המיקום עם התנע: ⟨<!-- ⟨ --> [x ^<!-- ^ --> , p ^<!-- ^ --> x] ⟩<!-- ⟩ --> = i ℏ<!-- ℏ --> אם"ם האופרטורים A ^<!-- ^ --> ו- B ^<!-- ^ --> מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם. אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי. אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות Δ<!-- Δ --> A Δ<!-- Δ --> B ≥<!-- ≥ --> 1 2 ⟨<!-- ⟨ --> [A ^<!-- ^ --> , B ^<!-- ^ -->] ⟩<!-- ⟩ --> בניהם לפי: משפט ארנפס GOOL d d t ⟨<!-- ⟨ --> Q ⟩<!-- ⟩ --> = i ℏ<!-- ℏ --> ⟨<!-- ⟨ --> [H ^<!-- ^ --> , Q] ⟩<!-- ⟩ --> + ∂<!-- ∂ --> Q ∂<!-- ∂ --> t אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן. אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: GOOL משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב- r : ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקצית הגל: המשוואה ל- θ<!-- θ --> (θ<!-- θ -->) : $\frac{1}{\theta(\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\theta(\theta)}{\partial\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=m^2$ משוואה ל- ϕ<!-- ϕ --> (ϕ<!-- ϕ -->) : $\frac{\partial^2\phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-m^2\phi(\varphi)$ פתרון ל- θ<!-- θ --> (θ<!-- θ -->) ו- ϕ<!-- ϕ --> (ϕ<!-- ϕ -->) : Y l m (θ<!-- θ --> , ϕ<!-- ϕ -->) = θ<!-- θ --> (θ<!-- θ -->) ϕ<!-- ϕ --> (ϕ<!-- ϕ -->) = ε<!-- ε --> (2 l + 1) (l −<!-- − --> m) ! 4 π<!-- π --> (l + m) ! P l m (cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ -->) e i m ϕ<!-- ϕ --> ε<!-- ε --> = { (−<!-- − --> 1) m m > 0 1 m ≤<!-- ≤ --> 0 } m ≤<!-- ≤ --> l ו- ε<!-- ε --> = 1 m > 0 ε<!-- ε --> = −<!-- − --> 1 m ≤<!-- ≤ --> 0 P l m (x) = (1 −<!-- − --> x 2) m 2 (d d x) m P l (x) P l (x) = 1 2 l ! (d d x) l (x 2 −<!-- − --> 1) l Y 0 = (1 4 π<!-- π -->) 1 2 ; Y 2 0 = (5 16 π<!-- π -->) 1 2 (3 cos 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> −<!-- − --> 1) Y 1 0 = (3 4 π<!-- π -->) 1 2 cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> ; Y 2 ±<!-- ± --> 1 = ∓<!-- ∓ --> (15 8 π<!-- π -->) 1 2 sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> e ±<!-- ± --> i ϕ<!-- ϕ --> Y 1 ±<!-- ± --> 1 = ∓<!-- ∓ --> (3 8 π<!-- π -->) 1 2 sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> e ±<!-- ± --> i ϕ<!-- ϕ --> ; Y 2 ±<!-- ± --> 2 = (15 32 π<!-- π -->) 1 2 sin 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> e ±<!-- ± --> 2 i ϕ<!-- ϕ --> Y 3 0 = (7 16 π<!-- π -->) 1 2 (5 cos 3 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> −<!-- − --> 3 cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ -->) Y 3 ±<!-- ± --> 1 = ∓<!-- ∓ --> (21 64 π<!-- π -->) 1 2 sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> (5 cos 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> −<!-- − --> 1) e ±<!-- ± --> i ϕ<!-- ϕ --> Y 3 ±<!-- ± --> 2 = (105 32 π<!-- π -->) 1 2 sin 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> e ±<!-- ± --> 2 i ϕ<!-- ϕ --> Y 3 ±<!-- ± --> 3 = ∓<!-- ∓ --> (35 64 π<!-- π -->) 1 2 sin 3 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> e ±<!-- ± --> 3 i ϕ<!-- ϕ --> P 1 0 = cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> ; P 3 0 = 1 2 (5 cos 3 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> −<!-- − --> 3 cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ -->) P 1 1 = sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> ; P 3 1 = 3 2 sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> (5 cos 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> −<!-- − --> 1) P 2 0 = 1 2 (3 cos 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> −<!-- − --> 1) P 3 1 = 1 2 sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> (5 cos 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> −<!-- − --> 1)
---	--	--

מטריצה ההופכית: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

מטריצה אוניטרית: $U^\dagger = U^{-1}$

זהויות:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger; \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A; \quad (\langle \psi_1 | \hat{A}^\dagger | \psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$$

$$(AB)^T = B^T A^T; \quad \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

- הגודל של ע"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.

אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים

נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.