

## הוראות לדף הנוסחאות



### הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השולים, לבחור שולים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

### עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות. בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

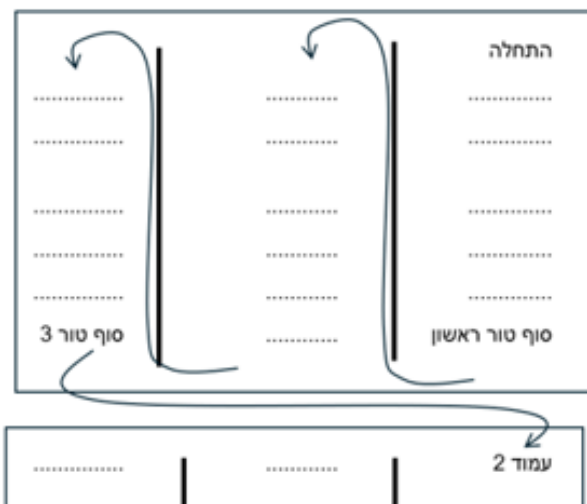
### מבנה הדף:

הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.



כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

תיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות יחסות שונות (אינרציאליות).

**עקרונות יסוד בתורת היחסות:**

- חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.
- האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.
- מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.
- אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור בואיך.
- מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.
- הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם: x, y, z) שעוברת טרנספורמציה.

**פקטור גאמה:**  $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_0}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ;  $\beta = \frac{v_0}{c}$

$\gamma_0$  תמיד גדולה מ 1

טרנספורמצית לורנץ למיקום והזמן:

$x' = \gamma_0(x - v_0 t)$ ;  $y' = y$ ;  $z' = z$   
 $t' = \gamma_0(t - \frac{v_0 x}{c^2})$ ;  $\beta = \frac{v_0}{c}$ ;  $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_0}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

טרנספורמציה הפוכה:

$x = \gamma_0(x' + v_0 t')$ ;  $y = y'$ ;  $z = z'$   
 $t = \gamma_0(t' + \frac{v_0 x'}{c^2})$

- הצירים של המערכות **חייבים** להיות מקבילים.

- בזמן  $t = t' = 0$  **חייבים** שהראשיות מתלכדות.

**המערכת העצמית:**

מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

- **זמן עצמי**  $\tau$  מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

- **אורך עצמי**  $l_0$  האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

**התכווצות האורך:** שינוי האורך ממערכת המנוחה

(העצמית) למערכת נעה

$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$

**התארכות הזמן:** שינוי הזמן ממערכת המנוחה (העצמית)

$\Delta t = \gamma_0 \tau$  (מערכת נעה)

שינוי זווית במדידת אורך:  $\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$

$\theta'$  - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת העצמית

$\theta$  - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת אחרת.

**אפקט דופלר היחסות:**

זמן המחזור של הגל:  $T = \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \tau$

אורך הגל:  $\lambda = \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \lambda'$

תדירות הגל:  $f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f'$

$\lambda'$ ,  $f'$ ,  $\tau$  - הזמן, התדירות ואורך הגל במערכת העצמית

טרנספורמצית לורנץ למהירויות:  $v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$

$v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$ ;  $v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$

**אברציה - שינוי זווית המהירות:**

$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0(\cos \theta - \frac{v_0}{c})}$

שימו לב שפה השינוי הוא בזווית של וקטור המהירות (כיוון התנועה) ולא שינוי זווית של הגוף כמו למעלה.

תנע ואנרגיה יחסותיים:  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ ;  $E = \gamma mc^2$

- הגודל  $\gamma$  יחסו כשיוויון למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ולא למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות. נוסחאות נוספות:

$E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4$ ;  $|p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot mc$

**אנרגיית מנוחה:**  $E_0 = mc^2$

**אנרגיית קינטית:**  $E_k = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$

עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, ניוטרינו) והאנרגיה הקינטית היא:  $E = |p|c = hv$

$v$  היא התדירות ו-  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  קבוע פלאנק

טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:

$E' = \gamma_0(E - v_0 p_x)$ ;  $p'_x = \gamma_0(p_x - v_0 E/c^2)$

$p'_y = p_y$ ;  $p'_z = p_z$

**וקטור תנע אנרגיה:**

$(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c})$

'גודל הוקטור' (מינוס באנרגיה) זהה בכל מערכות היחסות:

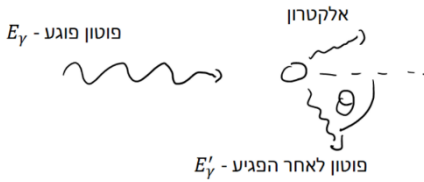
$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - (\frac{E}{c})^2 = const$

- הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.

- עבור גוף יחיד הקבוע הוא:  $m^2 c^2$

**פיזור קומפטון:**

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלס אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$

$E_\gamma$  - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה

$E'_\gamma$  - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה

$m_e$  - מסת אלקטרון

$\theta$  - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.

יחידת האלקטרון וולט:  $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$

המרת מסת הגופים לאנרגיה:

$m_e | \approx 8.19 \times 10^{-14} \text{ J} (\approx 511 \text{ keV})$

$m_p | \approx 1.50 \times 10^{-10} \text{ J} (\approx 938 \text{ MeV})$

$m_{\text{Uranium}} \approx 3.55 \times 10^{-8} \text{ J} (\approx 225 \text{ GeV})$

- ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ-  $\frac{E}{c}$

כלומר הכמות (המספר) וזהה רק ביחידות נחלק ב c.

**כוחות ביחסות פרטית:**  $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m \vec{a}_{||} + \gamma m \vec{a}_{\perp}$

$\vec{a}_{\perp}$ ,  $\vec{a}_{||}$  הרכיב המאונך והמקביל של התאוצה למהירות

גודל הרכיב המקביל של התאוצה:  $a_{||} = \dot{v}$

טרנספורמציה של הכוחות:

$F'_x = F_x - \frac{v_0(F_y v_y + F_z v_z)}{c^2 - v_0 v_x}$

$F'_y = \frac{F_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$ ;  $F'_z = \frac{F_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$

טרנספורמציה הפוכה:

$F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v_x}$

$F_y = \frac{F'_y}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v_x}{c^2})}$ ;  $F_z = \frac{F'_z}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v_x}{c^2})}$

**תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:**

**חוק וויין:**  $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

$\lambda_p$  - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור:  $I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$

קבוע Rydberg:  $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

אורך הגל: Lyman (91 nm, 121 nm), Balmer (486 nm, 656 nm), Paschen (820 nm, 1875 nm)

UV (אולטרה סגול), נראה, IR (אינפרא אדום)

בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:

1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.

2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

**מודל האטום של בוהר:**

**הנחות המודל:**

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.

2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.

אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

$hf = E_U - E_L$

**הנחה על התנע הזוויתי (l=1,2,3...):**  $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$

הרדיוסים האפשריים (Z - מספר הפרוטונים):  $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$

$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n:  $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 \text{ eV}}{n^2}$

אנרגיה של פוטון יחיד (f- תדירות האור):  $E = hf$

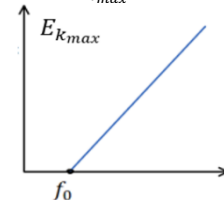
**הניסי הפוטואלקטרי:**

אנרגיה של פוטון יחיד (f- תדירות האור):  $E = hf$

תדירות סף ( $W_0$ - פונקציית העבודה של המתכת):  $hf_0 = W_0$

אנרגיה קינטית מקסי של האלקטרונים:  $E_k = hf - W_0$

$eV_0 = E_{kmax}$



**מתח עצירה:** השוואה לתורה הגלית: **לפי התורה הפוטונית**

1. עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא אנרגיה של כל אחד מהם.

2. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלטים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם.

3. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

**אנרגיה מסה ותנע של פוטון:**

אנרגיה של פוטון יחיד:  $E = hf$

תנע של פוטון:  $p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$

מסת מנוחה של פוטון:  $m = 0$

**אפקט קומפטון:**

**חסות קומפטון:**  $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$

$\lambda$  - אורך הגל של הקרן הפוגעת.  $\lambda'$  - אורך הגל של הקרן המפוזרת.  $\theta$  - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

$\frac{h}{m_e c}$  - אורך גל של האלקטרון החופשי.

**אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:**

**תנאים ביצירת זוגות:**

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען

2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק  $mc^2$ .

3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.

4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

**דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:**

אורך גל דה ברולי של חלקיק:  $\lambda = \frac{h}{p}$

$p = mv$  לא יחסותי,  $p = mv\gamma$  יחסותי

**מודלים מוקדמים של האטום:**

אורכי הגל הנפלטים מאטום המימן:  $\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2})$

קבוע Rydberg:  $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

אורך הגל: Lyman (91 nm, 121 nm), Balmer (486 nm, 656 nm), Paschen (820 nm, 1875 nm)

UV (אולטרה סגול), נראה, IR (אינפרא אדום)

בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:

1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.

2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

**מודל האטום של בוהר:**

**הנחות המודל:**

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.

2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.

אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

$hf = E_U - E_L$

**הנחה על התנע הזוויתי (l=1,2,3...):**  $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$

הרדיוסים האפשריים (Z - מספר הפרוטונים):  $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$

$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n:  $E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 \text{ eV}}{n^2}$

אנרגיה של פוטון יחיד (f- תדירות האור):  $E = hf$

**הניסי הפוטואלקטרי:**

אנרגיה של פוטון יחיד (f- תדירות האור):  $E = hf$

תדירות סף ( $W_0$ - פונקציית העבודה של המתכת):  $hf_0 = W_0$

אנרגיה קינטית מקסי של האלקטרונים:  $E_k = hf - W_0$

**נירן:** כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה (לא מורחש במימד אחד).  
דרגת הנירן מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

**פונקציית הגל כתלות בזמן**

**GOOL**  

$$\Psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar}$$

כאשר  $\psi_n(x)$  הן פתרונות המצבים העמידים  $n=1, 2, 3, \dots$  היא האנרגיה של כל מצב.  
 $|\alpha_n|^2$  הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

אם  $\Psi(x, 0)$  מנורמלת אז  $\Psi(x, t)$  מנורמלת לכל  $t$ .  
**אופרטורים**  
**GOOL**

אם  $\hat{Q}\psi = \lambda\psi$  אז  $\psi$  היא פנייה  $\lambda$ -ר הוא עייע.  
 פנייה של אופרטור התנע:  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$   
 פנייה של אופרטור המיקום:  $\hat{x} = x$   
 פנייה של אופרטור המיקום (עצמו):  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$   
 אופרטור ההמילטוניאן (מוודד את האנרגיה):  

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

**אופרטורים הרמיטיים**

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי.  
 כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים עייע אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה:  $(\hat{A}\psi)^* = \psi^* \hat{A}$  לכל הפונקציות במרחב,  
 או  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \psi_1)^* \psi_2 dx$   
 תכונות של אופרטור הרמיטי:  
 1. ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.  
 2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.  
 3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.  
 4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.

**הפירוש הסטטיסטי המוכלל**

אם  $\lambda_n$  ו- $\phi_n$  הן הפנייה ועייע של האופרטור  $\hat{A}$  אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

$$\Psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \phi_n$$
  
 זוהי ההסתברות להיות במצב  $\phi_n$  או ההסתברות למדוד את הערך  $\lambda_n$ . הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

במקרה הרציף:  
 $|\alpha_n|^2 \rightarrow |\alpha(k, t)|^2 dk; \lambda_n \rightarrow \lambda(k); \phi_n \rightarrow \phi(k)$

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k, t) \phi(k) dk$$

$$\alpha(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) \Psi(x, t) dx$$

**יחס החילוף**

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.  
 אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).

יחס החילוף של המיקום עם התנע:  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$   
 אם יחס החילוף של אופרטורים  $\hat{A}$  ו- $\hat{B}$  מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.

אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.  
 אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות

ביניהם לפי:  $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |[\hat{A}, \hat{B}]|$

**משפט ארנפס**

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, Q] \rangle + \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle$$

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.  
**אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי:**

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב- $r$ :  
 ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקציית הגל:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

המשוואה ל- $\Theta(\theta)$ :  

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

משוואה ל- $\Phi(\varphi)$ :  

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Phi(\varphi)$$

פתרון ל- $\Theta(\theta)$  ו- $\Phi(\varphi)$ :  

$$\Theta(\theta) = P_l^m(\cos \theta)$$

**מנהור (tunneling):**

מקדם ההעברה עבור  $T < 1$  (ההסתברות לעבור):  

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$$

גובה  $U_0 > E$ , אורך המחסום,  $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$   
 הפוטנציאל במחסום.

מקדם החזרה:  
**אוסילטור הרמוני:**

פונקציות הגל:  $\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-1/4} e^{-x^2/2b^2}$ ,  $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$\psi_2(x) = \sqrt{2}(\pi b^2)^{-1/4} \frac{x}{b} e^{-x^2/2b^2}$

$\psi_3(x) = 8\sqrt{3}(\pi b^2)^{-1/4} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-x^2/2b^2}$

רמות האנרגיה,  $n$  שלם שמתחיל מ-1:  
 $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

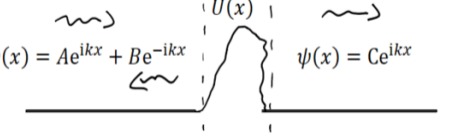
או שאפשר להתחיל את  $n$  מאפס וזאת  $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

**מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה**

מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים):  
 $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$   
 מהירות החבורה:  
 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

יחס דיספרסיה הוא הקשר בין  $\omega$  ל- $k$   
**פיזור**

**GOOL**



מקדם העברה (ההסתברות לעבור):  
 $T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$

אם  $k_2$  בתחום הימני שונה מ- $k_1$  בתחום השמאלי אז:  
 $T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:  
 $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$

עבור מדרגת פוטנציאל  
 וכאשר  $E > U_0$   
 $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$   
 $R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$

כאשר  $E < U_0$  (ההסתברות לעבור):  
 $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$   
 $R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$

**פונקציית דלתא של דיראק**

הגדרת הפונקציה:  
 $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$

או  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$  או  $\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$   
 כאשר  $a$  הולך לאפס.

פירור מפונקציית דלתא:  
 עבור  $E < 0$ ,  $V(x) = -a\delta(x)$

נקבל  $\psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$  ו- $E = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2}$   
 מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב- $a$  (גודל הבור).

אם  $E > 0$ :  
 $R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$

$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1+\beta^2}$ ,  $\beta = \frac{am}{\hbar^2 k}$ ,  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

עבור:  $E > 0$ ,  $V(x) = +a\delta(x)$ , חייב להיות גודל מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר  $E > 0$ .

**פוטנציאלים תלת מימדים**

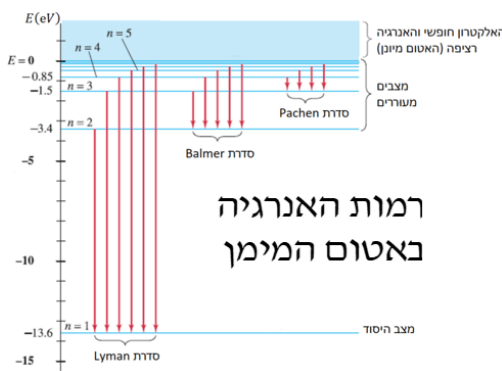
תיבה תלת מימדית בגודל  $a \times b \times c$ :  

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימד:

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

$$E = \left(n_x - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_z$$



**פונקציית הגל של החומר:**

ההסתברות שחלקיק נמצא בין  $x_1$  ל- $x_2$  היא:  

$$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

נרמול:  

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

מיקום ממוצע:  

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

שונות:  

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

כאשר -  

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

**עקרון אי הודאות של הייזנברג:**

אי ודאות מיקום תנע:  

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

- אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.
- אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.
- אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה:  

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

- ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.
- האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי:  

$$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$$

**משוואת שרדינגר:**

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:  

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t)$$

תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד:  

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:  

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$

כאשר:  $\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$

**חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי:**

פונקציית הגל, חלקיק חופשי:  

$$\psi(x) = A \sin(kx)$$

חבילת גלים:  

$$\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$$

בור פוטנציאל אינסופי ברוחב  $l$ :  

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות לציור פונקציית גל:

- ציור את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
- עבור המצב ה- $n$  ציור גל עם  $n-1$  נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
- ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולהיפך).
- פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
- פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$   
 $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$  : נורמה

מכפלה פנימית:  $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum \alpha_i^* \beta_i$  כאשר  $\alpha_i$  ו- $\beta_i$  הם המקדמים של פונקציות הגל באותו בסיס

**GOOL** **אי שוויון שורץ:**

$|(a|b)|^2 \leq (a|a)(b|b)$

זווית מוכללת בין וקטורים:  $\cos \theta = \frac{\langle a|b \rangle}{\sqrt{(a|a)(b|b)}}$

אי שוויון המשולש:  $|(a|+|b|)| \leq |a|+|b|$

**GOOL** **אופרטורים בייצוג אלגברי**

אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

האיבר  $Q_{ij}$  מעביר את הוקטור  $e_j$  לוקטור  $e_i$  (ככול שקלר כלשהו):  $Q_{ij} = \langle e_i | \hat{Q} | e_j \rangle$

אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

כתיב נוסף:  $\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} \psi_2 \rangle$

$\langle \hat{Q} \psi | = (\hat{Q} | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | \hat{Q}^\dagger$

מטריצה משוחלפת:  $A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

צמד הרמיטי:  $A^\dagger = (A^T)^*$

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$

מטריצת יחידה:  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$

כפל מטריצות:  $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$

כפל מטריצות הוא לא חילופי:  $AB \neq BA$

יחס חילוף בין מטריצות:  $[A, B] = AB - BA$

מטריצה ההופכית:  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

מטריצה אוניטרית:  $U^\dagger = U^{-1}$

זהויות:  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ ;  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^\dagger)^\dagger = A$ ;  $(\langle \psi_1 | \hat{A}^\dagger | \psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$

$(AB)^T = B^T A^T$ ;  $\langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$

הגודל של עי"ע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1. אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמלים, כלומר:  $[A, A^\dagger] = 0$

$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$

$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$

$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$

פתרון כללי:  $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$

$0 \leq l \leq n-1$  ו- $l=1,2,3,\dots$  שלמים,  $-l \leq m \leq l$  שלם ומקיים: אורתוגונליות

$\int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$   
 פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק  $r$  מהגרעין):

$P_{nl}(r) = |R_{nl}|^2 r^2$

התנע הזוויתי:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z)$

$\hat{L}^2 Y_l^m = l(l+1) \hbar^2 Y_l^m$

$|L| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$

גודל התנע יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוהר. את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של  $L_z$ , משם אפשר למצא את  $\cos \theta = \frac{L_z}{|L|}$

$\hat{L}_z Y_l^m = m \hbar Y_l^m$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט! צפיפות המצבים:  $g(n) = 2n^2$  (ה-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר: א.  $n_i > n_f$  ב.  $\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$  ג.  $\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$

**מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמלי:**

מומנט כוח על דיפול מגנטי:  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$   
 אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:  $\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:  $\vec{\mu} = \frac{-e\hbar}{2m_e} \vec{L}$

המגנטון של בוהר:  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5} eV/T$

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני:  $U = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$

הוא המספר הקוונטי של  $L_z$ . תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן:  $\Delta m = \pm 1, 0$ ;  $\Delta E_z = \mu_B B \Delta m$

התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטראלי להתפלג לשלושה קווים.

**GOOL** **ספין ניסוי וסטון גרלך:**

תנאי כולל:  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

כאשר  $\vec{L}$  תנאי מסילתי,  $\vec{S}$  תנאי כתוצאה מהספין.

$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar$

$S$  גדולה - גודל התנע מהספין.  $s$  קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון  $s = \frac{1}{2}$ . עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי

נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם נקראים **בוזונים**.

$S_z = m_s \hbar$

$-s < m_s < s$  בקפיצות של 1

עבור אלקטרון:  $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

מומנט מגנטי מהספין:  $\vec{\mu}_s = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$

פקטור  $g$ , עבור אלקטרון  $g \approx 2.0023$

**GOOL** **אטומים מורכבים והטבלה המחזורית:**

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים:  $n, l, m_l, m_s$ . בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב- $n$  וגם ב- $l$ .

**עיקרון האיסור של פאולי**, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים:  $n, l, m_l, m_s$

ככל ש- $l$  גדל (יש יותר תנאי מסילתי) האנרגיה גדלה.

**GOOL** **ייצוג באמצעות אלגברה לינארית:**

תכונות המכפלה הפנימית:  $\langle v | u \rangle = \langle u | v \rangle^*$

$\langle v | v \rangle = 0$  או  $\langle v | u \rangle = 0$  אם  $|v\rangle = |0\rangle$

$\langle v | (\alpha |u\rangle + \beta |k\rangle) = \alpha \langle v | u \rangle + \beta \langle v | k \rangle$

הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$Y_l^m(\theta, \phi) = \theta(\theta) \phi(\phi) = \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$

$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m & m > 0 \\ 1 & m \leq 0 \end{cases} \quad l \geq 0$

$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_l(x)$

$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l$

$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}; Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (3\cos^2\theta - 1)$

$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta; Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\phi}$

$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta e^{\pm i\phi}; Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$

$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$Y_3^{\pm 1} = \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1) e^{\pm i\phi}$

$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\theta \cos\theta e^{\pm 2i\phi}$

$Y_3^{\pm 3} = \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^3\theta e^{\pm 3i\phi}$

$P_1^0 = \cos\theta; P_3^0 = \frac{1}{2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$P_1^{\pm 1} = \sin\theta; P_3^{\pm 1} = \frac{3}{2} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1)$

$P_2^0 = \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1)$

$P_3^{\pm 1} = \frac{3}{2} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1)$

$P_2^{\pm 1} = 3\sin\theta \cos\theta; P_3^{\pm 2} = \frac{3}{2} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1)$

$P_2^{\pm 2} = 3\sin^2\theta; P_3^{\pm 3} = 15\sin\theta (1 - \cos^2\theta)$

אורתוגונליות:  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)] \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$

המשוואה לחלק הרדיאלי:

$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) = l(l+1)$

$R(r) = \frac{u(r)}{r}$

$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[ V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \right] u(r) = E u(r)$

פתרון עבור אטום המימן:  $V(r) = \frac{ke^2}{r}$

$E_n = -\frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} = \frac{-13.6 eV}{n^2}$

$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l} \left(\frac{2r}{na}\right)$

$a = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} m$  רדיוס בוהר:

$L_{q-p}^p(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$

$L_q(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$

$R_{10} = 2a^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$

$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$

$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-\frac{3}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$

$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2r}{3a} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$

$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$

$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$

$R_{40} = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3r}{4a} + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192} \left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$