

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

שווה להעתק, כאשר שטח מתח לציר הזמן מחושב כשלילי (אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרוך).
 - השטח מתחת לגרף של התאוצה כולות בזמן שווה לשינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי).

תנועה במרחב (דו ותלת מימד): GOOL

וקטור המיקום: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
וקטור ההעתק: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
וקטור המהירות הממוצעת (velocity): $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
וקטור המהירות הרגעית (velocity): $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
 - וקטור המהירות הרגעית תמיד בכיוון משיק למסלול
וקטור התאוצה הממוצעת: $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
וקטור התאוצה הרגעית: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$
 גודל המהירות (Speed): $|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$, כאשר S זה הדרך.

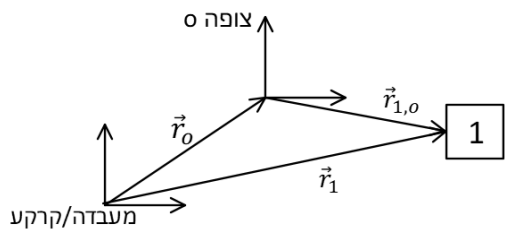
משוואות מסלול (דו מימד): פונקציה מהצורה $y(x)$.
 סרטוט של הפונקציה הוא המסלול של הגוף במישור. ניתן למצוא את המשוואה באמצעות בידוד משתנה הזמן מהפונקציה $x(t)$ והצבה ב $y(t)$.

תאוצה משיקית: $\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{v}$; $\vec{a}_t = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$
 - התאוצה המשיקית היא ההרכיב של התאוצה שמשיק למהירות (או למסלול) והיא משנה רק את גודל המהירות.
תאוצה נורמלית: $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$
 $|\vec{a}_n| = |\vec{a} - \vec{a}_t| = \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$
 - התאוצה הנורמלית היא ההרכיב של התאוצה שמאונך למהירות (או למסלול) והיא משנה רק את כיוון המהירות.
רדיוס עקמומיות: $R = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_n|}$

תנועה יחסית (טרנס' גליליי) GOOL

המיקום, המהירות והתאוצה של גוף 1 ביחס לגוף 2:
 $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$; $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$; $\vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$
 הנוסחה וקטורית אבל אפשר להשתמש לכל ציר בנפרד. שיטה שניה - שימוש בתרשים וקטורים:

- נצייר ראשית ונשרטט את הוקטורים $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_0$ ויצאיים מהראשית לפי האינפורמציה הנתונה בתרגיל (הגודל והכיוון שלהם).
- נצייר ראשית צירים של הצופה בקצה הוקטור $\vec{r}_0$.
- נשרטט את הוקטור $\vec{r}_{1,0}$ מהראשית של הצופה לפי הנתונים בתרגיל וכך שהראש שלו נפגש עם הראש של הוקטור $\vec{r}_1$.
- נעשה טריגו ונמצא את נתוני הוקטורים החסרים.



משפט הקוסינוס (לכל סוגי המשולשים):
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$
 γ - הזווית מול הצלע c (יכולה להיות כל צלע במשולש).
משפט הסינוס (לכל סוגי המשולשים):
 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

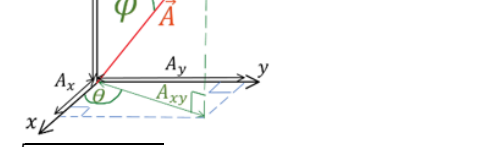
γ הזווית מול הצלע c , β הזווית מול b , α הזווית מול a
המהירות שמודד מד לייזר:
 $\vec{v} = \frac{\dot{x} \cdot \hat{x} + \dot{y} \cdot \hat{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{d}{dt} |\vec{r}|$

- מהירות זו היא הרכיב הרדיאלי של המהירות או הרכיב של המהירות שנקביל לוקטור המיקום של הגוף ביחס לצופה המודד.
קפיצים
חוק הוק - הכוח של קפיץ: $F = -k(x - x_0)$
 כאשר x הוא מיקום הגוף ו- x_0 המיקום שבו הקפיץ רפוי.

חוק הוק - הכוח של קפיץ: GOOL

חיבור במקביל	חיבור בטור
$k_{eff} = k_1 + k_2$	$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
כוח ציפה: פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד. $F_b = \rho_l V g$ כאשר ρ_l היא צפיפות הנוזל ו- V הוא נפח הגוף.	

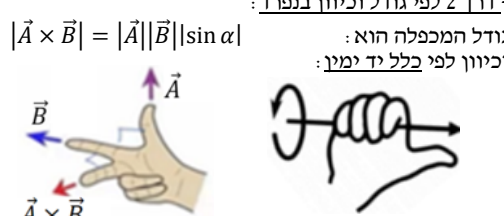
$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
 $(\vec{A} + \vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$
 $\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$
זווית בין שני וקטורים:
וקטור יחידה:
וקטור בשלושה מימדים:
 $0 \leq \varphi \leq \pi$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$



$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$; $\cos \varphi = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$
פירוק לרכיבים: A_{xy} ; $A_z = |\vec{A}| \cos \varphi$
 $|\vec{A}| \sin \varphi$

$A_x = |\vec{A}| \sin \varphi \cos \theta$; $A_y = |\vec{A}| \sin \varphi \sin \theta$
מכפלה וקטורית:
דרך 1 לעשות את המכפלה עם דטרמיננטה:

$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$
דרך 2 לפי גודל וכיוון בנפרד:
 גודל המכפלה הוא:
 וכיוון לפי כלל יד ימין:



שימו לב שאתם עם יד ימין!!
 - בתמונה השמאלית, קודם לעשות אקדח ואחר כך לפתוח את האמה!

גרדיאנט בקרטזיות: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$
גרדיאנט בגליליות: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$
בכדוריות (*): $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$
רטור (Rot/Curl) בקרטזיות:

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$
 בגליליות:

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$
 בכדוריות (*):

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\theta) \right) \hat{\varphi}$

שימו לב שהזווית phi עם ציר z-הו הזווית theta עם ציר x

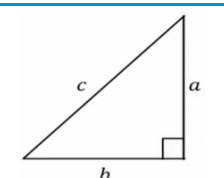
תנועה בקו ישר (מימד אחד) GOOL

מהירות רגעית: $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
מהירות ממוצעת: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$
תאוצה רגעית: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$
תאוצה ממוצעת: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$
קשרים הפוכים: $x(t) = \int v(t) dt$
 $v(t) = \int a(t) dt$

- את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות).
מיקום ומהירות כולות בזמן בתאוצה קבועה בלבד:
 $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$; $v(t) = v_0 + a t$
שטחים מתחת לגרף הפונקציה (גם בתאוצה משתנה):
 - השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות כולות בזמן

מבוא מתמטי GOOL

ניצב שמול יתר: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
ניצב ליד יתר: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
ניצב שמול ליד ניצב: $\tan \alpha = \frac{a}{b}$
ניצב ליד: $\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan \alpha}$
 $a^2 + b^2 = c^2$



$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$90^\circ - \alpha$
$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$; $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$	
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$90^\circ + \alpha$
$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$; $\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$	
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$180^\circ - \alpha$
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$-\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	2α
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$	
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	$\alpha \pm \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	

סכום והפרש של פונקציות:

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

פתרון משוואות טריגונומטריות:

$x_1 = \alpha + 2\pi k$	$\sin x = \sin \alpha$
$x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$	
$x_1 = \alpha + 2\pi k$	$\cos x = \cos \alpha$
$x_2 = -\alpha + 2\pi k$	
$x = \alpha + \pi k$	$\tan x = \tan \alpha$

נגזרות ואינטגרליים:

נגזרות של מכפלה: $y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

- כלל שרשרת: אם y היא פונקציה של x ו- x הוא פונקציה של t אז:

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$
נגזרות נוספות: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$; $\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$; $\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$; $\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$
 $\frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}$

- אינטגרל היא פעולה הפוכה לנגזרת, מבצע סכימה על ערכי הפונקציה ונותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה. אינטגרל לא מסוים - מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל. אינטגרל מסוים - מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

צפיפות נפחית/משטחית/אורכית:

$\rho = \frac{M}{V}$; $\sigma = \frac{M}{S}$; $\lambda = \frac{M}{l}$
 V, S, l הם נפח, שטח ואורך הגוף.

אלמנט מסה אינפיניטסימלי אורכי/משטחי/נפחי:

$dm = \lambda dl / ds / dv$ - ראו קואורדינטות

וקטורים GOOL

פירוק לרכיבים:
 $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$
 $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$
 $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

כפל בסקלר: $\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$
מכפלה סקלרית: שתי דרכים לביצוע המכפלה:
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$
 α - זווית בין הוקטורים.
 - תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת, זו דרך לבדוק האם וקטורים מאונכים.
פתיחת סוגרים והעלאה בריבוע:

כוח גרר וכוח ציפה

GOOL

כוח גרר הוא כוח מהצורה: $\vec{F} = -k\vec{v}$
כאשר $\vec{v}$ היא מהירות הגוף ו- k הוא קבוע כלשהו.
משוואת תנועה - משוואה הכוללת את x , v ו- a . בדרכ מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.
מהירות סופית - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)
כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על **כדור בתוך נוזל**:
 $\vec{F}_v = -6\pi\eta R\vec{v}$ - צמיגות הנוזל, R - רדיוס הכדור
תנועה מעגלית (ברדיוס קבוע) **GOOL**

הדרך בתנועה מעגלית: $S = \Delta\theta \cdot R$
- הדרך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל. $\Delta\theta$ היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!
גודל המהירות הקווית הרגעית (speed): $v(t) = \frac{ds}{dt}$
- כיוון המהירות תמיד משיק למעגל
מהירות זוויתית: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
- f - התדירות, T - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)
קשר בין המהירות הקווית לזוויתית: $v = \omega R$
תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל): $a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

הכוחות למרכז המעגל: $\Sigma F_{\text{למרכז}} = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$
תאוצה זוויתית: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
תאוצה משיקית (רק בתנועה לא קצובה): $a_\theta = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \alpha R$
הגובה במעגל אנכי: $h = R(1 - \cos \theta)$
- כאשר h ו- θ נמדדים מתחתית המעגל.
הכוח הצנטריפוגלי: $F_r = m\omega^2 R$
- בכיוון החוצה מהמעגל.
- שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

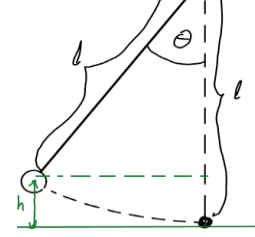
וקטור המיקום: $\vec{r} = R \cos \theta \hat{x} + R \sin \theta \hat{y}$
הקשר בכללי בין המהירות לזוויתית: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית: $\vec{a}_\theta = \vec{\alpha} \times \vec{r}$
כוחות מדומים **GOOL**
כוח מדומה מופיעים רק כאשר **הצופה** נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אין כוחות מדומים ולא תלוי בתנועת הגוף. החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה:

$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\Sigma} \vec{F}_{\text{אמיתיים}}$
 $\vec{a}$ היא תאוצת הגוף **ביחס לצופה**.
 $\vec{\Sigma} \vec{F}$ הם כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.
" $\vec{a}_0$ - הנמדד ו- $\vec{a}_0$ היא תאוצת הצופה.
כוחות מדומים הנוספים במקרה של צופה מסתובב במהירות זוויתית קבועה:
הכוח הצנטריפוגלי: $\vec{F} = m\omega^2 r \hat{r}$
או בצורה יותר כללית $\vec{F} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
כוח קוריוליס: $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$
כאשר $\vec{v}'$ בשתי הנוסחאות ω הוא של הצופה (ולא של הגוף) $\vec{v}'$ - מהירות הגוף ביחס לצופה.
 $\vec{r}'$ וקטור המיקום של הגוף

GOOL

עבודה ואנרגיה **GOOL**
העבודה שמבצע כוח קבוע או כוח ממוצע: $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \Delta x \cos \alpha$
כאשר α היא הזווית בין הכוח להעתק
- כוח שפועל במאונך לתנועה (למהירות) אינו מבצע עבודה.
- אם הגוף לא נע העבודה אפס (לכן חיכוך סטטי אינו מבצע עבודה).
אנרגיה קינטית: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
העבודה הכוללת (כולל הכוחות המשמרים) שווה לשינוי באנרגיה קינטית: $W_{\Sigma F} = \Delta E_k$
האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית: $U_g = mgh$
 h זה הגובה של הגוף. ניתן לבחור גובה אפס איפה שרוצים.
העבודה שמבצע כוח הכובד שווה לשינוי באנרגיה הפוטנציאלית הכובדית: $W_g = -\Delta U_g$
האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית (האנרגיה של קפיץ): $U_{el} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$
 k הוא קבוע הקפיץ
 Δx היא התארכות מהמצב הרפוי (לפעמים מסומן ב Δl)
האנרגיה הכללית היא האנרגיה הקינטית של הגוף ועוד סך כל האנרגיות הפוטנציאליות: $E = E_k + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$

*בשוויון השני רשמנו את האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית והאלסטית. תיאורטית יכולות להיות עוד אנרגיות פוטנציאליות אבל זה מאוד נדיר בקורס הזה.
משפט עבודה אנרגיה: $E_i + W_{NC} = E_f$ או $W_{NC} = \Delta E$
 E_i ו- E_f הם האנרגיות הכלליות בהתחלה ובסוף.
 W_{NC} היא העבודה שנעשתה על ידי הכוחות הלא משמרים בתהליך שבין נקודת ההתחלה לסוף.
נוסחה לשינוי בגובה של מוטטלת:
 $h = l(1 - \cos \theta)$
- h הגובה מהתחתית
- l אורך החוט
- θ זווית ביחס לאנך מהתקרה.
חוס (Q): האנרגיה הנוצרת מחיכוך קינטי. - כמות החום שנוצרת בתהליך שווה לעבודה של כוח החיכוך הקינטי (והפוכה בסימן), כי העבודה שמבצע החיכוך הקינטי על הגוף (שליטת)
- ניתן לחשב את החום שנוצר גם מהשינוי באנרגיה הכללית של הגוף.
הספק (P): העבודה שנעשית ביחידת זמן.
ההספק של כוח קבוע או הספק ממוצע: $P = \frac{W}{\Delta t}$
היחידה הסטנדרטית של הספק היא Watt (W) והיא שווה לגאול ולקלי שניה.
יחידת נוספת היא כוח סוס (Hp): $1 \text{ Hp} = 746 \text{ Watt}$
נוסחה נוספת להספק: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$
- בנוסחה יש מכפלה סקלרית של הכוח במהירות הגוף.
- הנוסחה נכונה גם להספק רגעי (ולא רק להספק ממוצע או קבוע).
העבודה של כוח לא קבוע: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$



בשביל הנוסחה צריך גם משוואה של המסלול.
דוגמה בוד-מימד: נתון $x^5 = y(x)$, באמצעות המשוואה עוברים משוואת אחד. בדוגמה, נציב באינטגרל במקום y את x^5 ו- dx נגזרת $dy = 5x^4 dx$.
הגבולות של המשתנה אליו עברנו (בדוגמה גבולות של x)
נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר: $\Sigma \vec{F} = 0$ או $\frac{dU}{dx} = 0$
שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתזוזה קטנה): $U''_x > 0$
שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתזוזה קטנה): $U''_x < 0$
שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה
- אם יש כמה ממדים אז $\vec{\nabla} U = 0$
שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס
שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס
אוכף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס
הספק ונצילות **GOOL**
הספק ממוצע: $P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$
הספק רגעי: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos \alpha$
 $\vec{F}$ - הכוח שפועל על הגוף ו- $\vec{v}$ היא מהירות הגוף.
נצילות: $\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{W_{out}}{W_{in}}$
כאשר out מציין את החלק המנוצל על ידי המערכת ו- in מציין את כל מה שמושקע.

מתקף ותנע **GOOL**
התנע של גוף: $\vec{p} = m\vec{v}$
הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון: $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
המתקף של כוח: $\vec{j} = \int \vec{F} dt$
המתקף הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות בזמן (ולא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות במיקום).
המתקף הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:
 $\vec{j}_{\Sigma \vec{F}} = \Delta \vec{p}$
חוק שימור התנע: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.
הנוסחה משימור תנע: $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$
בד"כ רשמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.
התנגשות אלסטית: יש גם שימור אנרגיה ונוסף למשוואת התנע את המשוואה: $m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$
אם ההתנגשות חזיתית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרשום:
התנגשות אלסטית לא חזיתית בין שני גופים בעלי מסות שוות ואחד הגופים במנוחה לפני ההתנגשות: הזווית בין המהירויות אחרי ההתנגשות תהיה 90 מעלות.
התנגשות פלסטית (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות): $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$
בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה.
התנגשויות שחו לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.

מקדם תקומה: $e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$
בין 0 ל 1, ככל שיותר גבוה יותר אנרגיה נשמרת אך לא ניתן לדעת כמה. שווה 1 באלסטית ו-0 בפלסטית.
התנגשויות ללא שימור תנע: אם בפגיעה הנורמל גדול מאוד אז לא נזיזו אותו ונחשב את המתקף שלו והשינוי בתנע של המערכת כתוצאה מכך. בנוסף גם החיכוך הקינטי יכול להיות מאוד גדול בעקבות הנורמל ונחשב גם בו.
מרכז מסה **GOOL**

מיקום מרכז המסה: $\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$
ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x:
 $x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$
מהירות מרכז המסה: $\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$
תאוצת מרכז המסה: $\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$
עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממשיות בהתאמה. **מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים)**: עושים מרכז מסה בין מרכזי המסה.
גוף עם חור: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מרכז מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.
תאוצת מרכז המסה תלויה רק בכוחות החיצוניים:
 $\Sigma F_{ext} = ma_{c.m.}$
אם אין כוחות חיצוניים (ומרכז המסה במנוחה בהתחלה) אז מיקום מרכז המסה נשמר. ניתן לעשות "שימור מרכז מסה" לחשב אותו בהתחלה ובסוף ולהשוות.
בשביל למצוא מרכז מסה של גוף גדול נשתמש באינטגרל:

$x_{c.m.} = \int x dm$
כנ"ל לגבי y ו- z, לחישוב dm הסתכלו במבוא המתמטי.
תנועה הרמונית פשוטה **GOOL**
משוואת התנועה: $-k(x - x_0) = m\ddot{x}$
- k ו- m הם קבועים **יחידים** כלשהם.
- x_0 קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
- x משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.
- $\ddot{x}$ נגזרת שניה של המשתנה.
חייב להיות מינוס לפני k .
פתרון המשוואה: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0$
- x_0 נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma \vec{F} = 0$.
- A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משיווי המשקל.
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - תדירות זוויתית
- ϕ - פאזה.
מציאת הקבועים בפתרון:
- x_0 אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{של המדקדק}}{\text{של המדקדק}}}$
 ω מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{max} = \omega A$
האנרגיה: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$
- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי בקצוות והקינטית בשיווי משקל.
תנועה הרמונית מרוסנת **GOOL**
בנוסף לכוח הקפיץ נוסף **כוח מרסן** מהצורה: $F = -\lambda v$
- v מהירות הגוף ו- λ קבוע.
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
משוואת התנועה:
כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:
מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
אין תנודות

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 ω מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{max} = \omega A$
האנרגיה: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$
- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי בקצוות והקינטית בשיווי משקל.
תנועה הרמונית מרוסנת **GOOL**
בנוסף לכוח הקפיץ נוסף **כוח מרסן** מהצורה: $F = -\lambda v$
- v מהירות הגוף ו- λ קבוע.
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
משוואת התנועה:
כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:
מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
אין תנודות

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 ω מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{max} = \omega A$
האנרגיה: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$
- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי בקצוות והקינטית בשיווי משקל.
תנועה הרמונית מרוסנת **GOOL**
בנוסף לכוח הקפיץ נוסף **כוח מרסן** מהצורה: $F = -\lambda v$
- v מהירות הגוף ו- λ קבוע.
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
משוואת התנועה:
כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:
מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
אין תנודות

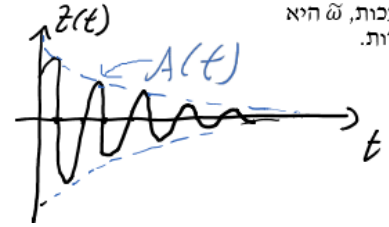
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 ω מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{max} = \omega A$
האנרגיה: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$
- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי בקצוות והקינטית בשיווי משקל.
תנועה הרמונית מרוסנת **GOOL**
בנוסף לכוח הקפיץ נוסף **כוח מרסן** מהצורה: $F = -\lambda v$
- v מהירות הגוף ו- λ קבוע.
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
משוואת התנועה:
כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:
מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
אין תנודות

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 ω מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{max} = \omega A$
האנרגיה: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$
- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי בקצוות והקינטית בשיווי משקל.
תנועה הרמונית מרוסנת **GOOL**
בנוסף לכוח הקפיץ נוסף **כוח מרסן** מהצורה: $F = -\lambda v$
- v מהירות הגוף ו- λ קבוע.
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
משוואת התנועה:
כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:
מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
אין תנודות

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 ω מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{max} = \omega A$
האנרגיה: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$
- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי בקצוות והקינטית בשיווי משקל.
תנועה הרמונית מרוסנת **GOOL**
בנוסף לכוח הקפיץ נוסף **כוח מרסן** מהצורה: $F = -\lambda v$
- v מהירות הגוף ו- λ קבוע.
 $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
משוואת התנועה:
כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:
מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
אין תנודות

$$z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\tilde{\omega}t + \varphi); \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.



תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת GOOL

בנוסף לכוח הקפיץ והמרסן נוסף כוח מאלץ מהצורה:

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

Ω ו- F_0 קבועים כלשהם

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \quad \text{משוואת התנועה:}$$

פתרון משוואת התנועה:

$$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת

שמתחלק לשלושת המקרים ...

- במצב עמיד (לאחר זמן רב) נוניח את הפתרון ההומוגני.

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$

מקסימאלי. ניתן למצא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω . אם

$\omega_0 \ll \Gamma$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות

התנועה ההרמונית ללא כוח מאלץ ומרסן)