

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את
חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית
ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר
העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים,
תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.
אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.
ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר
מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים
בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

מבוא לגלים

GOOL

גלים רוחביים: ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות (מיתר)
גלים ארוכים: ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות (קול)
תווך: החומר בו מתקדמת ההפרעה

פונקציית הגל: $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.
אנרגיה של גל: $E \propto A^2$, A היא האמפליטודה (משרעת)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{משוואת הגלים במימד אחד}$$

כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.

התאבכות: סכימה של גלים שנפגשים
חזית גל: אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן
גלים מחזוריים: λ - אורך הגל; T - זמן המחזור; v - מהירות הגל

תדירות (מספר המחזורים בשנייה): $f = \frac{1}{T}$

גל הרמוני: $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi)$

מספר הגל: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

קשרים בין הגדלים השונים: $\omega = vk = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

גל עומד: מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \phi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \phi))$$

נקודות צומת (node): נקודות שלא זזות. אין מהירות גל.

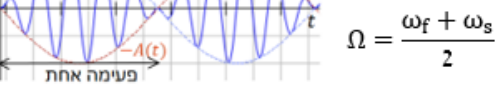
נקודת טבור (antinode): אמפליטודה מקסימאלית.

פעימות: בפעימות אנחנו מחברים שני גלים בעלי אותה אמפליטודה ומקבלים גל בתוך מעטפת (פעימה).

$$\Psi_1(t) = A \cos(\omega_1 t) \quad \& \quad \Psi_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$$

$$\Psi_T(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = 2A \cos(\epsilon t) \cos(\Omega t)$$

$$\epsilon = \frac{\omega_f - \omega_s}{2} \quad \Omega = \frac{\omega_f + \omega_s}{2}$$



תדירות הפעימה היא 2ϵ

גלים רוחביים במיתר

GOOL

משוואת הגלים: $\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$

T - המתוח במיתר, ρ - צפיפות המסה ליחידת אורך,
 ψ - פונקציית הגל, ההעתק הרוחבי של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל: $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

פתרון המשוואה: $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$

- אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזוויות טריגונומטריות)

$$\psi(x, t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t$$

$$= C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2)$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

יחס הדיספרסיה: $\omega = v \cdot k$

GOOL

החזרה והעברה

תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב- $x=0$:

1. רציפות הפונקציה: $\psi_L(0, t) = \psi_R(0, t)$

2. רציפות הכוח: $F_L = F_R$

אם המתוחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הגזרות:

$$\frac{\partial \psi_L}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi_R}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$\psi_L(x, t) = \psi_r(x, t) + \psi(x, t); \quad \psi_R(x, t) = \psi_t(x, t)$$

$$\psi_r(x, t) = r\psi(-x, t)$$

$$\psi_t(x, t) = t\psi\left(\frac{v_1}{v_2}x, t\right); \quad v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$$

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}$$

$$t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

הערה: את הנוסחאות של מקדם ההעברה וההחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.

GOOL

עכבה

$$Z = \sqrt{\rho T} = \frac{T}{v} \quad \text{עכבה (impedance)}$$

T - מתוחות. V - מהירות הגל

$$|Z| = \frac{|F_y|}{|V_y(t)|}$$

F_y - הכוח על אלמנט מסה

$V_y(t)$ - מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)

מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2:

$$r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \quad \text{מקדם החזרה} \quad t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \quad \text{מקדם העברה}$$

תאום עכבות: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow t = 1$

אנרגיה הספק ותנע

אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר:

$$\epsilon(x, t) = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \rho v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2$$

אנרגיה ממוצעת בזמן: $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 |A|^2$

הספק רגעי בנקודה, כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני ביחידת זמן:

$$P^\pm = \pm Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \pm v \epsilon(x, t)$$

$P^\pm$ הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי

ההספק הממוצע בזמן: $\bar{P}^\pm = \pm \frac{1}{2} Z \omega^2 |A|^2$

מקדם החזרה של האנרגיה: $R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = r^2 = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2$

מקדם העברה של האנרגיה: $T = \frac{P_2^+}{P_1^+} = \frac{z_2}{z_1} t^2 = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$

$R + T = 1$

תנע: התנע הוא אפס.

גלים עומדים

מיתר חצי אינסופי:

$$\psi(x=0, t) = 0 \Rightarrow \psi(x, t) = C \sin(kx) \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \psi(x, t) = C \cos(kx) \cos(\omega t + \phi)$$

מיתר סופי:

$$\psi(x=0, t) = \psi(x=L, t) = 0$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}; \quad k_n = \frac{\pi n}{L}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad f_n = \frac{v n}{2L}$$

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

קצה קשור וקצה חופשי:

$$\psi(x=0, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$$

$$k_n = \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right); \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{(n + \frac{1}{2})}; \quad f_n = \frac{v}{2L} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיות:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}; \quad f_n = \frac{v n}{2L}; \quad k_n = \frac{\pi n}{L}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

גלים אלקטרומגנטיים

משוואות הגלים בריק ($\rho = I = 0$):

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}; \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

c היא מהירות האור כאשר $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

- למשוואות מגיעים ממשוואות מקסוול.

- המשוואה מתקיימת עבור כל רכיב בנפרד:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 E_x = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 E_x}{dt^2}; \quad \vec{\nabla}^2 E_y = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 E_y}{dt^2}; \quad \text{כנל } z$$

- תזכורת ללאפליסיאן:

$$\vec{\nabla}^2 E_i = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}$$

פתרון המשוואה עבור רכיב כלשהו של $\vec{E}$ או של $\vec{B}$:

$$E_i(\vec{r}, t) = A_i \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$\vec{k}$ הוא וקטור הגל, כיוונו הוא כיוון התקדמות הגל.

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ω היא התדירות הזוויתית

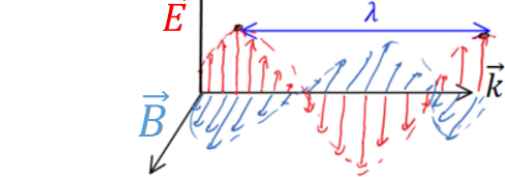
כאשר f היא התדירות בהרץ ו- T הוא זמן המחזור.

- הקוסינוס בפתרון זהה לכל הרכיבים של השדה החשמלי והמגנטי, ההבדל בין הרכיבים הוא רק במקדם A_i .

איד למצא שדה מגנטי מחשמלי ולהפך:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{E}; \quad \vec{E} = c \vec{B} \times \vec{k}$$

צורת הגל במרחב:



השדה החשמלי תמיד מאונך לשדה המגנטי ושניהם תמיד מאונכים לכיוון התקדמות הגל.

λ הוא אורך הגל (המרחק בין שיא לשיא): $|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$

יחס הדיספרסיה: $\omega = c|k|$

היחס מתקבל מהצבה של הפתרון במשוואת הגלים.

פתרון נוסף (עם פלוס): $E_i(\vec{r}, t) = A_i \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$

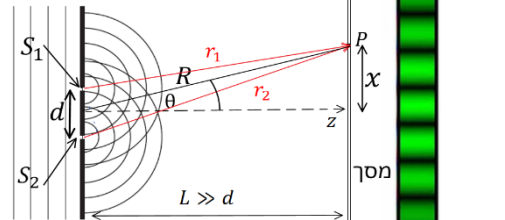
במקרה הזה הגל מתקדם בכיוון הפוך ל- $\vec{k}$

עיקרון הווייגנס: ניתן להתייחס לכל נקודה בחזית הגל כמקור נקודתי של גל חדש.

אמפליטודה בגלים גליליים: $A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$

אמפליטודה בגלים כדוריים: $A \propto \frac{1}{r}$

ניסוי שני הסדקים:



קירוב השדה הרחוק $L \gg d$:

$$A_1 \approx A_2 \leftarrow \Delta r \ll r \quad 1.$$

$$\Delta r = d \sin \theta \leftarrow r_1 || r_2 \quad 2.$$

העוצמה היחסית:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2 \left(\frac{k d \sin \theta}{2} \right)$$

קירוב זוויות קטנות:

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{x}{L}$$

בגלל התלות של האמפליטודה במרחק, צריך להכפיל את התוצאה לעוצמה בקוסינוס טטה עבור גלים גליליים ובקוסינוס בריבוע עבור גלים כדוריים. התוספת הזו קשורה למבנה של המסך והיא לא תופיע במסך עגול.

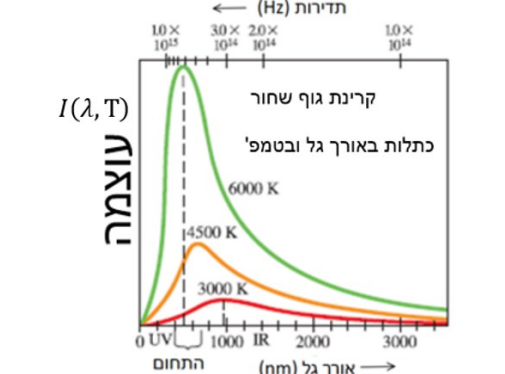
בדרכי מניחים קירוב זוויות קטנות ואז היא זניחה.

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים והאטום:

חוק בוין: $\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

λ_p - אורך הגל בשיא. T - הטמפרטורה בקלווין

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k T} - 1}$



קבוע בולצמן: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

קבוע פלאנק: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

ההנחה הקוונטית של פלאנק: האנרגיה המינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום היא $E_{min} = hf$

- אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי:

$$E = nhf$$

כאשר n הוא המספר הקוונטי

התיאוריה הפוטונית והאפקט הפוטואלקטרי:

אנרגיה של פוטון יחיד (f - תדירות האור): $E = hf$

תדירות סף (W_0 - פונקציית העבודה של המתכת): $hf_0 = W_0$

מנהור (tunneling): **GOOL**

מקדם ההעברה עבור $T \ll 1$ (ההסתברות לעבור):

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$$

הפוטנציאל במחסום, $U_0 > E$, אורך המחסום, l , $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$ גובה

מקדם החזרה:

$$R = 1 - T$$

אוסילטור הרמוני: **GOOL**

פונקציות הגל: $\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$ $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$\psi_2(x) = \sqrt{2}(\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$

$\psi_3(x) = 8\sqrt{3}(\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$

רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ-1: $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

או שאפשר להתחיל את n מאפס ואז $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

מהירות הפאזה והחבורה, יחס דיספרסיה

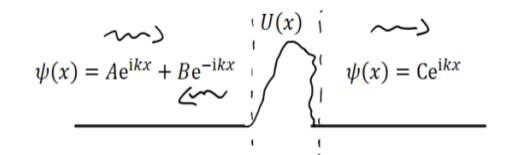
מהירות הפאזה (המהירות של אורך גל מסוים):

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

יחס דיספרסיה הוא הקשר בין ω ל- k

פיזור **GOOL**



מקדם העברה (ההסתברות לעבור): $T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$

אם k_2 בתחום הימני שונה מ- k_1 בתחום השמאלי אז:

$$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}$$

מקדם החזרה (ההסתברות לחזור) בכל מקרה:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

- עבור מדרגת פוטנציאל $E > U_0$ וכאשר $E > U_0$

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

- כאשר $E < U_0$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.

- כאשר $E > U_0$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

פונקציית דלתא של דיראק **GOOL**

הגדרות הפונקציה:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} \quad \text{או} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

כאשר a חולך לאפס.

פיזור מפונקציית דלתא:

$$E < 0 \rightarrow V(x) = -a\delta(x)$$

$$E = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2} \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$$

נקבל מקבלים מצב אחד בלבד, לא תלוי ב- a (גודל הבור).

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \quad \text{אם } E > 0$$

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \frac{1}{1+\beta^2}, \quad \beta = \frac{am}{\hbar^2 k}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

עבור: $E, V(x) = +a\delta(x)$ חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

פוטנציאלים תלת מימדיים **GOOL**

תיבה תלת מימדית בגודל $a \times b \times c$:

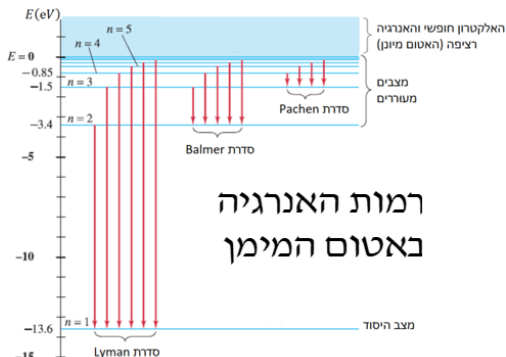
$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2} k_y x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

$$E = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_z$$



פונקציית הגל של החומר: **GOOL**

ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:

$$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

נרמול: כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

מיקום ממוצע: המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המסקימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצא אותו על ידי נגזרת).

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

כשר: **עקרון אי הוודאות של הייזנברג:** **GOOL**

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot S$$

1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.

2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה: $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.

2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הוודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי: $\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$

משוואת שרדינגר: **GOOL**

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t)$$

- **תנאים נוספים:** 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$

כאשר: $\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי: **GOOL**

פונקציית הגל, חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$

חבילת גלים: $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$

בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית.

באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית. עקרונות לצירור פונקציית גל:

1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.

2. עבור המצב ה- n ציירו גל עם $n - 1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).

3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולחיצה).

4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.

5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

אנרגיה קינטית מקסי' של האלקטרונים: $E_k = hf - W_0$

מתח עצירה: $eV_0 = E_{kmax}$

השוואה לתורה הגלית: **לפי התורה הפוטונית**

- עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא אנרגיה של כל אחד מהם. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלטים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם.
- האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.
- רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.

לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית

1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה, הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.

2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון: **GOOL**

$$E = hf$$

$$p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$m = 0$$

אפקט קומפטון: **GOOL**

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת. λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת. θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת.

$$- \frac{h}{m_e c}$$

אורך גל של האלקטרון החופשי.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות: **GOOL**

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען

2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש לחוסף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .

3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף ב"כ"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.

4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

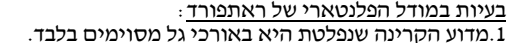
אורך גל דה ברולי של חלקיק: $p = mv$ לא יחסותי, $p = mv\gamma$ יחסותי

מודלים מוקדמים של האטום: **GOOL**

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$$

קבוע Rydberg:



בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד:

1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד.

2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.

מודל האטום של בוהר: **GOOL**

הנחות המודל:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים/רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים**.

2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים**.

אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים:

$$hf = E_U - E_L$$

$$L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

הנחה על התנע הזוויתי:

$$r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$$

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$$

$$E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6 eV}{n^2}$$

אנרגיית אלקטרון הנמצא במסלול ה-n:

ניווט : כמה מצבים (פונקציות גל) עם אותה האנרגיה לא מתרחש במימד אחד). דרגת הניווט מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

 פונקציית הגל כתלות בזמן	 GOOL
 ψ<!-- ψ --> (x , t) = ∑<!-- ∑ --> n α<!-- α --> n ψ<!-- ψ --> n (x) e −<!-- − --> i E n t ℏ<!-- ℏ --> {\displaystyle \psi (x,t)=\sum _{n}\alpha _{n}\psi _{n}(x)e^{-{\frac {iE_{n}t}{\hbar }}} 	
כאשר <i>ψ_n(x)</i> הן פתרונות המצבים העמידים ו- <i>E_n</i> היא האנרגיה של כל מצב.	
 α<!-- α --> n 2 {\displaystyle \alpha _{n} ^{2}} הן ההסתברות להיות במצב מסוים.	
 α<!-- α --> n = ∫<!-- ∫ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> ∞<!-- ∞ --> ψ<!-- ψ --> n ∗<!-- ∗ --> (x) ψ<!-- ψ --> (x , 0) d x {\displaystyle \alpha _{n}=\int _{-\infty }^{\infty }\psi _{n}^{*}(x)\Psi (x,0)\,dx} 	
- אם <i>Ψ(x,0)</i> מנורמלת אז <i>Ψ(x,t)</i> מנורמלת לכל <i>t</i> .	
 אופרטורים	 GOOL

אם *λψ=Qψ*, אז *ψ* היא פ״ע ו-*λ* הוא ע״ע.

פ״ע של אופרטור התנע: *ψ(x)=Ae^{ikx}*

תע״ע של אופרטור התנע: *ħk*

פ״ע של אופרטור המיקום: *ψ(x)=δ(x-a)*

וע״ע: *a* (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מוודד את האנרגיה):

H
^

=
−

ℏ

2

2
m

∂

2

∂

x

2

+
V
(
x
)

{\displaystyle {\hat {H}}=-{\frac {\hbar ^{2}}{2m}}{\frac {\partial ^{2}}{\partial x^{2}}}+V(x)}

 אופרטורים הרמיטיים	 GOOL
גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי.	
כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע״י אופרטורים הרמיטיים.	
הגדרה: A ^<!-- ^ --> ψ<!-- ψ --> = ψ<!-- ψ --> ∗<!-- ∗ --> A ^<!-- ^ --> {\displaystyle {\hat {A}}\psi =\psi ^{*}{\hat {A}}} לכל הפונקציות במרחב,	
או ∫<!-- ∫ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> ∞<!-- ∞ --> ψ<!-- ψ --> 1 ∗<!-- ∗ --> A ^<!-- ^ --> ψ<!-- ψ --> 2 d x = ∫<!-- ∫ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> ∞<!-- ∞ --> (A ^<!-- ^ --> ψ<!-- ψ --> 1) ∗<!-- ∗ --> ψ<!-- ψ --> 2 d x {\displaystyle \int _{-\infty }^{\infty }\psi _{1}^{*}{\hat {A}}\psi _{2}\,dx=\int _{-\infty }^{\infty }({\hat {A}}\psi _{1})^{*}\psi _{2}\,dx} תכונות של אופרטור הרמיטי:	
1. ערך התוחלת של אופרטור הרמטי תמיד ממשי.	
2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.	
3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמטי הן אורתוגונליות.	
4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.	
 הפירוש הסטטיסטי המוכלל	 GOOL

אם *φ_n* ו-*λ_n* הן הפ״ע וע״ע של האופרטור *Â*

אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה:

ψ
(
x
,
t
)
=

∑

n

α

n

φ

n

{\displaystyle \Psi (x,t)=\sum _{n}\alpha _{n}\phi _{n}}

|*α_n*|² זה ההסתברות להיות במצב *φ_n* או ההסתברות למדוד את הערך *λ_n*. הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

במקרה הרציף:

α

n

=

∫

−
∞

∞

φ

n

∗

ψ
(
x
,
t
)
d
x

{\displaystyle \alpha _{n}=\int _{-\infty }^{\infty }\phi _{n}^{*}\Psi (x,t)\,dx}

|*α_n*|²→ |*α_k(k,t)*|² dk; *λ_n*→ *λ(k)*; *φ_n*→ *φ(k)*)

ψ
(
x
,
t
)
=

∫

−
∞

∞

α
(
k
,
t
)
φ
(
k
)
d
k

{\displaystyle \Psi (x,t)=\int _{-\infty }^{\infty }\alpha (k,t)\phi (k)\,dk}

α(k,t)=∫[∞]_{-∞} φ(k)Ψ(x,t) dx

 יחס החילוף	 GOOL
 [A ^<!-- ^ --> , B ^<!-- ^ -->] = A ^<!-- ^ --> B ^<!-- ^ --> −<!-- − --> B ^<!-- ^ --> A ^<!-- ^ --> {\displaystyle [{\hat {A}},{\hat {B}}]={\hat {A}}{\hat {B}}-{\hat {B}}{\hat {A}}} 	
יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.	
אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס (אופרטורים חילופיים).	
יחס החילוף של המיקום עם התנע : ⟨<!-- ⟨ --> x ^<!-- ^ --> , p x ^<!-- ^ --> ⟩<!-- ⟩ --> = i ℏ<!-- ℏ --> {\displaystyle \langle {\hat {x}},{\hat {p_{x}}}>=i\hbar } 	
אם״ם האופרטורים <i>Â</i> ו- <i>β</i> מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם.	
אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.	
אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות בניהם לפי:	
 משפט ארנפס	 GOOL

d

d
t

⟨
Q
⟩
=

i
ℏ

⟨
[
H
^
,
Q
^
]
⟩
+

∂
Q
^

∂
t

{\displaystyle {\frac {d}{dt}}\langle Q\rangle ={\frac {i}{\hbar }}\langle [{\hat {H}},{\hat {Q}}]\rangle +{\frac {\partial {\hat {Q}}}{\partial t}}}

אם אופרטור מתחلف עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי: **GOOL**

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-*r*: ניתן לעשות הפרדת משתנים לפונקציית הגל:

 ψ<!-- ψ --> (r , θ<!-- θ --> , φ<!-- φ -->) = R (r) θ<!-- θ --> (θ<!-- θ -->) φ<!-- φ --> (φ<!-- φ -->) {\displaystyle \psi (r,\theta ,\varphi)=R(r)\theta (\theta)\phi (\varphi)} 	
המשוואה ל-<i>θ(θ)</i> :	
 1 θ<!-- θ --> (θ<!-- θ -->) sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> ∂<!-- ∂ --> ∂<!-- ∂ --> θ<!-- θ --> (sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> ∂<!-- ∂ --> ∂<!-- ∂ --> θ<!-- θ --> θ<!-- θ -->) + l (l + 1) sin 2 ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> = m 2 {\displaystyle {\frac {1}{\theta (\theta)}}\sin \theta {\frac {\partial }{\partial \theta }}\left(\sin \theta {\frac {\partial \theta }{\partial \theta }}\theta \right)+l(l+1)\sin ^{2}\theta =m^{2}} 	
משוואה ל-<i>φ(φ)</i> :	
 ∂<!-- ∂ --> 2 φ<!-- φ --> (φ<!-- φ -->) ∂<!-- ∂ --> φ<!-- φ --> 2 = −<!-- − --> m 2 φ<!-- φ --> (φ<!-- φ -->) {\displaystyle {\frac {\partial ^{2}\phi (\varphi)}{\partial \varphi ^{2}}}=-m^{2}\phi (\varphi)} 	
פתרון ל- <i>θ(θ)</i> ו-<i>φ(φ)</i> :	

Y^m_l(θ,φ)=θ(θ)φ(φ)=ε√^{(2l+1)(l-|m|)!/4π(l+|m|)!}P^m_l(cos θ)e^{imφ}

ε=
{
(−1)^m m>0
1 m≤0
l≥0
.
שלם.
|m|≤*l* ו-*ε*

P^m_l(x)=(1-x²)^{|m|/2}(^d/_{dx})^{|m|}P_l(x)

P_l(x)=1/2^ll!^l(^d/_{dx})^l(x²-1)^l

Y⁰₀=(1/4π)^{1/2}; Y⁰₂=(5/16π)^{1/2}(3cos²θ-1)

Y⁰₁=(3/4π)^{1/2}cosθ; Y^{±1}₂=∓(15/8π)^{1/2}sinθcosθe^{±iφ}

Y^{±1}₁=∓(3/8π)^{1/2}sinθe^{±iφ};

Y^{±2}₂=(15/32π)^{1/2}sin²θe^{±2iφ}

Y⁰₃=(7/16π)^{1/2}(5cos³θ-3cosθ)

Y^{±1}₃=∓(21/64π)^{1/2}sinθ(5cos²θ-1)e^{±iφ}

Y^{±2}₃=(105/32π)^{1/2}sin²θcosθe^{±2iφ}

Y^{±3}₃=∓(35/64π)^{1/2}sin³θe^{±3iφ}

P⁰₁=cosθ; P⁰₃=1/2(5cos³θ-3cosθ)

P¹₁=sinθ; P¹₃=3/2sinθ(5cos²θ-1)

P⁰₂=1/2(3cos²θ-1)

P¹₃=2/3sinθ(5cos²θ-1)

P¹₂=3sinθcosθ; P³₃=3/2sinθ(5cos²θ-1)

P²₂=3sin²θ; P³₃=15sinθ(1-cos²θ)
אורתוגונליות:

∫

0

2
π

∫

0

π

[

Y

l

m

(
θ
,
φ
)

]

∗

[

Y

l

m
′

(
θ
,
φ
)
]
sin
⁡
θ
d
θ
d
φ
=

δ

l
l
′

δ

m
m
′

{\displaystyle \int _{0}^{2\pi }\int _{0}^{\pi }[Y_{l}^{m}(\theta ,\varphi)]^{*}[Y_{l}^{m'}(\theta ,\varphi)]\sin \theta \,d\theta \,d\varphi =\delta _{ll'}\delta _{mm'}}

המשוואה לחלק הרדיאלי:

1/R(r)∂/∂r(r²∂R(r)/∂r)-2mr²/ħ²(V(r)-E)=l(l+1)

R(r)=u(r)/r

-ħ²/2m d²u(r)/dr²+V(r)+ħ²/2m l(l+1)/r²u(r)=Eu(r)

פתרון עבור אטום המימן: *V(r)=ke²/r*

E_n=-mk²e⁴/2ħ²·1/n²=E₁/n²=-13.6eV/n²

R_{nl}(r)=√(2/(na)³(n-l-1)!/2n![(n-l)!]³)e^{-r/na}(^{2r}/_{na})^lL^{l+1}_{n-l-1}(^{2r}/_{na})

רדיוס בוהר: *a=ħ²/kme²=0.529·10⁻¹⁰m*

L^p_{q-p}(x)=(-1)^p(^d/_{dx})^pL_q(x)

L_q(x)=e^x(^d/_{dx})^q(e^{-x}x^q)

R₁₀=2a^{-3/2}exp(-^r/_a)

R₂₀=1/√2a^{-3/2}(1-¹/_{2a}r)exp(-^r/_{2a})

R₂₁=1/√24a^{-3/2}^r/_aexp(-^r/_{2a})

R₃₀=2/√27a^{-3/2}(1-²/_{3a}r+²/₂₇(^r/_a)²)exp(-^r/_{3a})

R₃₁=8/27√6a^{-3/2}(1-¹/_{6a}r)(^r/_a)exp(-^r/_{3a})

R₃₂=4/81√30a^{-3/2}(^r/_a)exp(-^r/_{3a})

R₄₀=1/4a^{-3/2}(1-³/_{4a}r+¹/₈(^r/_a)²-¹/₁₉₂(^r/_a)³)exp(-^r/_{4a})

R₄₁=√5/16√3a^{-3/2}(1-¹/_{4a}r+¹/₈₀(^r/_a)²)^r/_aexp(-^r/_{4a})

R₄₂=1/64√5a^{-3/2}(1-¹/_{12a}r)(^r/_a)²exp(-^r/_{4a})

R₄₃=1/768√35a^{-3/2}(^r/_a)³exp(-^r/_{4a})

פתרון כללי:

ψ_{nlm}(r,θ,φ)=R_{nl}(r)Y^m_l(θ,φ)

0≤l≤n-1 ו-n=1,2,3,...

l ו-1≤m≤l שלם ומקיים:
אורתוגונליות:

∫

ψ

n
l
m

∗

ψ

n
l
′
m
′

r

2

sin
⁡
θ
d
r
d
θ
d
φ
=

δ

n
n
′

δ

l
l
′

δ

m
m
′

{\displaystyle \int \psi _{nlm}^{*}\psi _{n'l'm'}r^{2}\sin \theta \,drd\theta d\varphi =\delta _{nn'}\delta _{ll'}\delta _{mm'}}

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק *r* מהגרעין):

P_{nl}(r)=|R_{nl}|²r²

התנע הזוויתי: *L→=r→×p→=(L_x,L_y,L_z)*

L²Y^m_l=l(l+1)ħ²Y^m_l

|L|=√(l(l+1)ħ

גודל התנע״ז יכול להיות אפס בניגוד למודל של בוהר.

את הכיוון נאתר באמצעות הגודל של *L_z*, משם אפשר למצא את *cosθ=|L_z/|L|*

ĤL_zY^m_l=mħY^m_l

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!

צפיפות המצבים: *g(n)=2n²* (n-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר: א. *n_i>n_f* ב. *Δl=l_f-l_i=±1*

ג. *Δm=m_f-m_i=0,±1*

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

מומנט כוח על דיפול מגנטי μ→: *τ→=μ→×B→*

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

U=-μ→·B→

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

F→=(μ→·∇→)B→

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין: *μ→=-^{μ_B}/_ħL→*

המגנטון של בוהר: *μ_B=^{eħ}/_{2m_e}=5.788·10⁻⁵eV/T*

האנרגיה הפוטנציאלית של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני: *U=^{μ_B}/_ħL→·B→=μ_BBm* כאשר m הוא המספר הקוונטי של *L_z*.

תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן: *ΔE_z=μ_BBΔm*; *Δm=±1,0*;
התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפלל לשלושה קווים.
ספין ניסוי ושטרן גרלך: **GOOL**

תנ״ז כולל: *j→=L→+S→*

כאשר *L→* תנ״ז מסילתי,*S→* תנ״ז כתוצאה מהספין.

S=√s(s+1)ħ

S גדולה - גודל התנ״ז מהספין. *s* קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון *s=1/2*. עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי

s=0,1/2,1,3/2,.... חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם נקראים **בוזונים**.

S_z=m_sħ

-s<m_s<s בקפיצות של 1

עבור אלקטרון: *m_s=-1/2,1/2*

מומנט מגנטי מהספין: *μ→_s=-g^{μ_B}/_ħS→*

פקטור g, עבור אלקטרון *g≈2.0023...*

אטומים מורכבים והטבלה המחזורית: GOOL

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: *m_l, l, n, m_s*. בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב-*n* וגם ב-*l*.
עיקרון האיסור של פאולי, לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: *n, l, m_l, m_s*.
ככל ש-*l* גדל (יש יותר תנ״ז מסילתי) האנרגיה גדלה.