

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

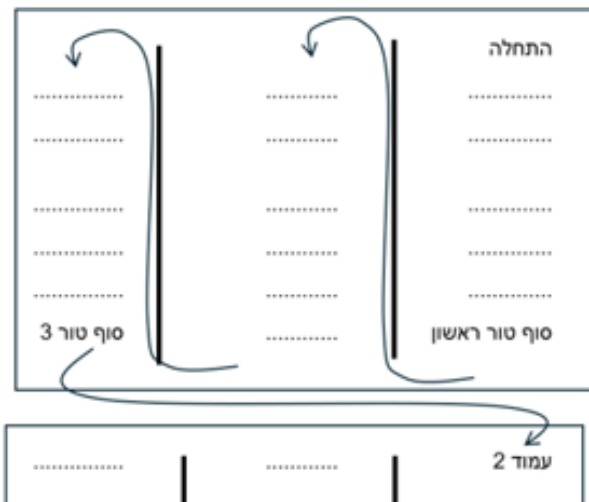
מבנה הדף:

הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.



כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$$

בכדוריות (*):

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\theta) \right) \right) \hat{\varphi}$$

(*) שימו לב שהזווית φ עם ציר ה-z והזווית θ עם ציר ה-x
תנועה בקו ישר (מימד אחד)

מהירות רגעית: $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
מהירות ממוצעת: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

תאוצה רגעית: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$
תאוצה ממוצעת: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

קשרים הפוכים: $x(t) = \int v(t) dt$

$v(t) = \int a(t) dt$
את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות).
מיקום ומהירות כתלות בזמן **בתאוצה קבועה בלבד**:

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$; $v(t) = v_0 + at$
שטחים מתחת לגרף הפונקציה (גם בתאוצה משתנה):
השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות כתלות בזמן שווה להעתק, כאשר שטח מתח לציר הזמן מחושב כשלילי (אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרך).
השטח מתחת לגרף של התאוצה כתלות בזמן שווה לשינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי).

תנועה במרחב (דו ותלת מימד):

וקטור המיקום: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
וקטור ההעתק: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

וקטור המהירות הממוצעת (velocity): $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

וקטור המהירות הרגעית (velocity): $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- וקטור המהירות הרגעית תמיד בכיוון משיק למסלול

וקטור התאוצה הממוצעת: $\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

וקטור התאוצה הרגעית: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

גודל המהירות (Speed): $|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$, כאשר S זה הדרך.

משוואת מסלול (דו מימד): פונקציה מהצורה $y(x)$.
סרטוט של הפונקציה הוא המסלול של הגוף במישור. ניתן למצוא את המשוואה באמצעות בידוד משתנה הזמן מהפונקציה $x(t)$ והצבה ב $y(t)$.

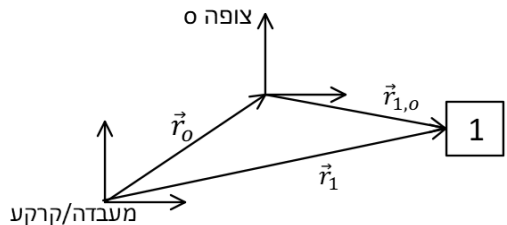
תנועה יחסית (טרנס' גליליי)

המיקום, המהירות והתאוצה של גוף 1 ביחס לגוף 2:

$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$; $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$; $\vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$
הנוסחה וקטורית אבל אפשר להשתמש לכל ציר בנפרד.

שיטה שניה - שימוש בתרשים וקטורים:

- נצייר ראשית ונשרטט את הוקטורים $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_0$ ויצאים מהראשית לפי האינפורמציה הנתונה בתרגיל (הגודל והכיוון שלהם).
- נצייר ראשית צירים של הצופה בקצה הוקטור $\vec{r}_0$.
- נשרטט את הוקטור $\vec{r}_{1,0}$ מהראשית של הצופה לפי הנתונים בתרגיל וכך שהראש שלו נפגש עם הראש של הוקטור $\vec{r}_1$.
- נעשה טריגונומטריה ונמצא את נתוני הוקטורים החסרים.



מעבדה/קרקע

משפט הקוסינוס (לכל סוגי המשולשים):

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$

γ - הזווית מול הצלע c (יכולה להיות כל צלע במשולש).

משפט הסינוסים (לכל סוגי המשולשים):

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

γ הזווית מול הצלע c , β הזווית מול a , α הזווית מול b

המהירות שמודד מד לייזר:

$\vec{v} = \frac{\dot{x} \cdot \hat{x} + \dot{y} \cdot \hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d}{dt} |\vec{r}|$

- מהירות זו היא הרכיב הרדיאלי של המהירות או הרכיב של המהירות שמקביל לוקטור המיקום של הגוף ביחס לצופה המודד.

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$; $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

אינטגרל היא פעולה הפוכה לגזרת, מבצע סכימה על ערכי הפונקציה ונותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה. אינטגרל לא מסוים - מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל. אינטגרל מסוים - מצביים בגבולות בתוצאה של האינטגרל:

$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$

וקטורים

פירוק לרכיבים:

$A_x = |\vec{A}| \cos \theta$
 $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$
 $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

כפל בסקלר: $\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$
מכפלה סקלרית: שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$

α - זווית בין הוקטורים.
תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת, זו דרך לבדוק **האם וקטורים מאונכים**.
פתיחת סוגרים והעלאה ברביע:

$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
 $(\vec{A} + \vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$

זווית בין שני וקטורים: $\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$

וקטור יחידה: $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

וקטור בשלושה מימדים:

$0 \leq \varphi \leq \pi$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$; $\cos \varphi = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$

פירוק לרכיבים: $A_{xy} = |\vec{A}| \sin \varphi$; $A_z = |\vec{A}| \cos \varphi$

$A_x = |\vec{A}| \sin \varphi \cos \theta$; $A_y = |\vec{A}| \sin \varphi \sin \theta$

מכפלה וקטורית:

דרך 1 לעשות את המכפלה עם דטרמיננטה:

$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

דרך 2 לפי גודל וכיוון בנפרד:

$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha$

גודל המכפלה הוא:

וכיוון לפי כלל יד ימין:



שימו לב שאתם עם יד ימין!!
בתמונה השמאלית, קודם לעשות אקדה ואחר"כ לפתוח את האמה!

גרדיאנט בקרטזיות: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$

גרדיאנט בגליליות: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$

בכדוריות (*): $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$

רטור (Rot/Curl) בקרטזיות:

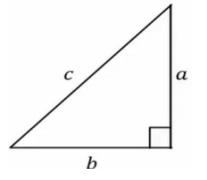
$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$

בגליליות:

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} +$

מבוא מתמטי

ניצב שמול יתר
 $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
ניצב ליד יתר
 $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
ניצב שמול ליד ניצב
 $\tan \alpha = \frac{a}{b}$
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan \alpha}$
 $a^2 + b^2 = c^2$



$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$90^\circ - \alpha$
$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$; $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$	
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$90^\circ + \alpha$
$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$; $\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$	
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$180^\circ - \alpha$
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$-\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$	2α
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$	$\alpha \pm \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	

סכום והפרש של פונקציות:

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

פתרון משוואות טריגונומטריות:

$x_1 = \alpha + 2\pi k$	$\sin x = \sin \alpha$
$x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$	
$x_1 = \alpha + 2\pi k$	$\cos x = \cos \alpha$
$x_2 = -\alpha + 2\pi k$	
$x = \alpha + \pi k$	$\tan x = \tan \alpha$

קואורדינטות גליליות: (r, θ, z)

$x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$
 $z = z$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$dl = dr/r d\theta$ (טבעת) / dz (קליפה גלילית דקה) / $r dr d\theta$ (דיסקה) / $rd\theta dz$ (גליל מלא או קליפה גלילית עבה)

קואורדינטות כדוריות: (r, θ, φ)

$z = r \cos \varphi$
 $x = r \sin \varphi \cos \theta$
 $y = r \sin \varphi \sin \theta$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$dl = dr/r \sin \varphi d\theta / r d\varphi$ (מעטפת כדור) / $ds = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ (קליפה כדורית עבה)

צפיפות נפחית/משטחית/אורכית:

$\rho = \frac{M}{V}$; $\sigma = \frac{M}{S}$; $\lambda = \frac{M}{l}$

V, S, l הם נפח, שטח ואורך הגוף.

אלמנט מסה אינפיניטסימלי אורכי/משטחי/נפחי:

$dm = \lambda dl / \sigma ds / \rho dv$

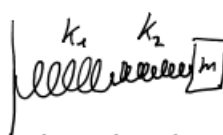
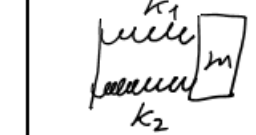
גזרות ואינטגרליים:

גזרת של מכפלה:

$y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

כלל שרשרת: אם y היא פונקציה של x ו- x הוא פונקציה של t אז:

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$
גזרות נוספות: $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}$

קפיצים	GOOL
חוק הוק – הכוח של קפיץ: F = −<!-- − --> k (x −<!-- − --> x 0) {\displaystyle F=-k(x-x_{0})} כאשר <i>x</i> הוא מיקום הגוף ו- <i>x</i> ₀ המיקום שבו הקפיץ רפוי.	חיבור במקביל
חיבור בטור	  $\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
כוח גרר וכוח ציפה	GOOL
כוח גרר הוא כוח מהצורה: F →<!-- → --> = −<!-- − --> k v →<!-- → --> {\displaystyle {\vec {F}}=-k{\vec {v}}} כאשר <i>v</i> היא מהירות הגוף ו- <i>k</i> הוא קבוע כלשהו.	כוח גרר הוא כוח מהצורה: F →<!-- → --> = −<!-- − --> k v →<!-- → --> {\displaystyle {\vec {F}}=-k{\vec {v}}} כאשר <i>v</i> היא מהירות הגוף ו- <i>k</i> הוא קבוע כלשהו.
משוואת תנועה - משוואה הכוללת את <i>x</i> , ו- <i>a</i> . בדרכ מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.	משוואת תנועה - משוואה הכוללת את <i>x</i> , ו- <i>a</i> . בדרכ מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.
מהירות סופית - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)	מהירות סופית - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)
כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על כדור בתוך נוזל :	כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על כדור בתוך נוזל :
 F →<!-- → --> v = −<!-- − --> 6 π<!-- π --> η<!-- η --> R v →<!-- → --> {\displaystyle {\vec {F}}_{v}=-6\pi \eta R{\vec {v}}} - צמיגות הנוזל, <i>R</i> - רדיוס הכדור	 F →<!-- → --> v = −<!-- − --> 6 π<!-- π --> η<!-- η --> R v →<!-- → --> {\displaystyle {\vec {F}}_{v}=-6\pi \eta R{\vec {v}}} - צמיגות הנוזל, <i>R</i> - רדיוס הכדור
כוח ציפה: פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד.	כוח ציפה: פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד.
 F b = ρ<!-- ρ --> l V g {\displaystyle F_{b}=\rho _{l}Vg} כאשר <i>ρ</i> _l היא צפיפות הנוזל ו- <i>V</i> הוא נפח הגוף.	 F b = ρ<!-- ρ --> l V g {\displaystyle F_{b}=\rho _{l}Vg} כאשר <i>ρ</i> _l היא צפיפות הנוזל ו- <i>V</i> הוא נפח הגוף.
תנועה מעגלית (ברדיוס קבוע)	GOOL
חדך בתנועה מעגלית : S = Δ<!-- Δ --> θ<!-- θ --> ⋅<!-- ⋅ --> R {\displaystyle S=\Delta \theta \cdot R} - החדך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל. Δ<!-- Δ --> θ<!-- θ --> {\displaystyle \Delta \theta } היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!	חדך בתנועה מעגלית : S = Δ<!-- Δ --> θ<!-- θ --> ⋅<!-- ⋅ --> R {\displaystyle S=\Delta \theta \cdot R} - החדך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל. Δ<!-- Δ --> θ<!-- θ --> {\displaystyle \Delta \theta } היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!
גודל המהירות הקווית הרגעית (<i>speed</i>): v (t) = d s d t {\displaystyle v(t)={\frac {ds}{dt}}} -כיוון המהירות תמיד משיק למעגל	גודל המהירות הקווית הרגעית (<i>speed</i>): v (t) = d s d t {\displaystyle v(t)={\frac {ds}{dt}}} -כיוון המהירות תמיד משיק למעגל
מהירות זוויתית: ω<!-- ω --> = d θ<!-- θ --> d t = 2 π<!-- π --> f = 2 π<!-- π --> T {\displaystyle \omega ={\frac {d\theta }{dt}}=2\pi f={\frac {2\pi }{T}}} - <i>f</i> - התדירות, <i>T</i> - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)	מהירות זוויתית: ω<!-- ω --> = d θ<!-- θ --> d t = 2 π<!-- π --> f = 2 π<!-- π --> T {\displaystyle \omega ={\frac {d\theta }{dt}}=2\pi f={\frac {2\pi }{T}}} - <i>f</i> - התדירות, <i>T</i> - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)
קשר בין המהירות הקווית לזוויתית: v = ω<!-- ω --> R {\displaystyle v=\omega R} 	קשר בין המהירות הקווית לזוויתית: v = ω<!-- ω --> R {\displaystyle v=\omega R}
תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל): a r = v 2 R = ω<!-- ω --> 2 R {\displaystyle a_{r}={\frac {v^{2}}{R}}=\omega ^{2}R} 	תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל): a r = v 2 R = ω<!-- ω --> 2 R {\displaystyle a_{r}={\frac {v^{2}}{R}}=\omega ^{2}R}
הכוחות למרכז המעגל: m v 2 R = m ω<!-- ω --> 2 R {\displaystyle m{\frac {v^{2}}{R}}=m\omega ^{2}R} למרכז המעגל <i>ΣF</i>	הכוחות למרכז המעגל: m v 2 R = m ω<!-- ω --> 2 R {\displaystyle m{\frac {v^{2}}{R}}=m\omega ^{2}R} למרכז המעגל <i>ΣF</i>
תאוצה זוויתית: α<!-- α --> = d ω<!-- ω --> d t {\displaystyle \alpha ={\frac {d\omega }{dt}}} 	תאוצה זוויתית: α<!-- α --> = d ω<!-- ω --> d t {\displaystyle \alpha ={\frac {d\omega }{dt}}}
תאוצה משיקית(רק בתנועה לא קצובה): a θ<!-- θ --> = d v →<!-- → --> d t = α<!-- α --> R {\displaystyle a_{\theta }={\frac {d \vec {v} }{dt}}=\alpha R} 	תאוצה משיקית(רק בתנועה לא קצובה): a θ<!-- θ --> = d v →<!-- → --> d t = α<!-- α --> R {\displaystyle a_{\theta }={\frac {d \vec {v} }{dt}}=\alpha R}
הגובה במעגל אנכי: h = R (1 −<!-- − --> cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ -->) {\displaystyle h=R(1-\cos \theta)} - כאשר <i>h</i> ו- <i>θ</i> נמדדים מתחתית המעגל.	הגובה במעגל אנכי: h = R (1 −<!-- − --> cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ -->) {\displaystyle h=R(1-\cos \theta)} - כאשר <i>h</i> ו- <i>θ</i> נמדדים מתחתית המעגל.
הכוח הצנטריפוגלי: F r = m ω<!-- ω --> 2 R {\displaystyle F_{r}=m\omega ^{2}R} - בכיוון החוצה מהמעגל.	הכוח הצנטריפוגלי: F r = m ω<!-- ω --> 2 R {\displaystyle F_{r}=m\omega ^{2}R} - בכיוון החוצה מהמעגל.
שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.	שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.
וקטור המיקום: r →<!-- → --> = R cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> x ^<!-- ^ --> + R sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> y ^<!-- ^ --> {\displaystyle {\vec {r}}=R\cos \theta {\hat {x}}+R\sin \theta {\hat {y}}} 	וקטור המיקום: r →<!-- → --> = R cos ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> x ^<!-- ^ --> + R sin ⁡<!-- ⁡ --> θ<!-- θ --> y ^<!-- ^ --> {\displaystyle {\vec {r}}=R\cos \theta {\hat {x}}+R\sin \theta {\hat {y}}}
הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית: v →<!-- → --> = d r →<!-- → --> d t = d r →<!-- → --> d θ<!-- θ --> d θ<!-- θ --> d t = r →<!-- → --> d θ<!-- θ --> d t {\displaystyle {\vec {v}}={\frac {d{\vec {r}}}{dt}}={\frac {d{\vec {r}}}{d\theta }}{\frac {d\theta }{dt}}={\frac {\vec {r}}{r}}{\frac {d{\vec {r}}}{d\theta }}={\frac {d{\vec {r}}}{d\theta }}{\frac {d\theta }{dt}}={\frac {\vec {r}}{r}}{\frac {d{\vec {r}}}{d\theta }}={\frac {d{\vec {r}}}{d\theta }}{\frac {d\theta }{dt}}} 	הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית: v →<!-- → --> = d r →<!-- → --> d t = d r →<!-- → --> d θ<!-- θ --> d θ<!-- θ --> d t = r →<!-- → --> d θ<!-- θ --> d t {\displaystyle {\vec {v}}={\frac {d{\vec {r}}}{dt}}={\frac {d{\vec {r}}}{d\theta }}{\frac {d\theta }{dt}}={\frac {\vec {r}}{r}}{\frac {d{\vec {r}}}{d\theta }}={\frac {d{\vec {r}}}{d\theta }}{\frac {d\theta }{dt}}}
הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית: a →<!-- → --> θ<!-- θ --> = d a →<!-- → --> r d t = d a →<!-- → --> r d θ<!-- θ --> d θ<!-- θ --> d t = r →<!-- → --> d a →<!-- → --> r d θ<!-- θ --> {\displaystyle {\vec {a}}_{\theta }={\frac {d{\vec {a}}_{r}}{dt}}={\frac {d{\vec {a}}_{r}}{d\theta }}{\frac {d\theta }{dt}}={\frac {\vec {r}}{r}}{\frac {d{\vec {a}}_{r}}{d\theta }}} 	הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית: a →<!-- → --> θ<!-- θ --> = d a →<!-- → --> r d t = d a →<!-- → --> r d θ<!-- θ --> d θ<!-- θ --> d t = r →<!-- → --> d a →<!-- → --> r d θ<!-- θ --> {\displaystyle {\vec {a}}_{\theta }={\frac {d{\vec {a}}_{r}}{dt}}={\frac {d{\vec {a}}_{r}}{d\theta }}{\frac {d\theta }{dt}}={\frac {\vec {r}}{r}}{\frac {d{\vec {a}}_{r}}{d\theta }}}
כוחות מדומים	GOOL
כוח מדומה מוסיפים רק כאשר הצופה נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אין כוחות מדומים ולא תלוי בתנועת הגוף. החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה:	כוח מדומה מוסיפים רק כאשר הצופה נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אין כוחות מדומים ולא תלוי בתנועת הגוף. החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה:
 m a →<!-- → --> 0 + Σ<!-- Σ --> F →<!-- → --> i = m a →<!-- → --> {\displaystyle m{\vec {a}}_{0}+\Sigma {\vec {F}}_{i}=m{\vec {a}}} - <i>a</i> ₀ היא תאוצת הגוף ביחס לצופה.	 m a →<!-- → --> 0 + Σ<!-- Σ --> F →<!-- → --> i = m a →<!-- → --> {\displaystyle m{\vec {a}}_{0}+\Sigma {\vec {F}}_{i}=m{\vec {a}}} - <i>a</i> ₀ היא תאוצת הגוף ביחס לצופה.
אמיתיים Σ<!-- Σ --> F →<!-- → --> i {\displaystyle \Sigma {\vec {F}}_{i}} הם כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.	אמיתיים Σ<!-- Σ --> F →<!-- → --> i {\displaystyle \Sigma {\vec {F}}_{i}} הם כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.
" <i>m</i> <i>a</i> ₀ " – הוא הכוח המדומה כאשר <i>m</i> היא מסת הגוף הנמדד ו- <i>a</i> ₀ היא תאוצת הצופה.	" <i>m</i> <i>a</i> ₀ " – הוא הכוח המדומה כאשר <i>m</i> היא מסת הגוף הנמדד ו- <i>a</i> ₀ היא תאוצת הצופה.
הכוחות מדומים הנוספים במקרה של צופה המסתובב במהירות זוויתית קבועה:	הכוחות מדומים הנוספים במקרה של צופה המסתובב במהירות זוויתית קבועה:
הכוח הצנטריפוגלי: F →<!-- → --> = m ω<!-- ω --> 2 r →<!-- → --> {\displaystyle {\vec {F}}=m\omega ^{2}{\vec {r}}} 	הכוח הצנטריפוגלי: F →<!-- → --> = m ω<!-- ω --> 2 r →<!-- → --> {\displaystyle {\vec {F}}=m\omega ^{2}{\vec {r}}}
או בצורה יותר כללית F →<!-- → --> = −<!-- − --> m ω<!-- ω --> →<!-- → --> ×<!-- × --> (ω<!-- ω --> →<!-- → --> ×<!-- × --> r →<!-- → -->) {\displaystyle {\vec {F}}=-m{\vec {\omega }}\times ({\vec {\omega }}\times {\vec {r}})} 	או בצורה יותר כללית F →<!-- → --> = −<!-- − --> m ω<!-- ω --> →<!-- → --> ×<!-- × --> (ω<!-- ω --> →<!-- → --> ×<!-- × --> r →<!-- → -->) {\displaystyle {\vec {F}}=-m{\vec {\omega }}\times ({\vec {\omega }}\times {\vec {r}})}
כוח קוריאוлис: F →<!-- → --> c = −<!-- − --> 2 m ω<!-- ω --> →<!-- → --> ×<!-- × --> v →<!-- → --> ′<!-- ′ --> {\displaystyle {\vec {F}}_{c}=-2m{\vec {\omega }}\times {\vec {v}}'} כאשר בשתי הנוסחאות <i>ω</i> הוא של הצופה (ולא של הגוף)	כוח קוריאוлис: F →<!-- → --> c = −<!-- − --> 2 m ω<!-- ω --> →<!-- → --> ×<!-- × --> v →<!-- → --> ′<!-- ′ --> {\displaystyle {\vec {F}}_{c}=-2m{\vec {\omega }}\times {\vec {v}}'} כאשר בשתי הנוסחאות <i>ω</i> הוא של הצופה (ולא של הגוף)
<i>v</i> ['] - מהירות הגוף ביחס לצופה.	<i>v</i> ['] - מהירות הגוף ביחס לצופה.
<i>r</i> ['] - וקטור המיקום של הגוף	<i>r</i> ['] - וקטור המיקום של הגוף
עבודה ואנרגיה	GOOL
עבודה של כוח קבוע: W = F →<!-- → --> ⋅<!-- ⋅ --> Δ<!-- Δ --> r →<!-- → --> = F →<!-- → --> ⋅<!-- ⋅ --> Δ<!-- Δ --> r →<!-- → --> ⋅<!-- ⋅ --> cos ⁡<!-- ⁡ --> α<!-- α --> = F x Δ<!-- Δ --> x + F y Δ<!-- Δ --> y + F z Δ<!-- Δ --> z {\displaystyle W={\vec {F}}\cdot \Delta {\vec {r}}= {\vec {F}} \cdot \Delta {\vec {r}} \cdot \cos \alpha =F_{x}\Delta x+F_{y}\Delta y+F_{z}\Delta z} כאשר <i>α</i> היא הזווית בין הכוח להעתק.	עבודה של כוח קבוע: W = F →<!-- → --> ⋅<!-- ⋅ --> Δ<!-- Δ --> r →<!-- → --> = F →<!-- → --> ⋅<!-- ⋅ --> Δ<!-- Δ --> r →<!-- → --> ⋅<!-- ⋅ --> cos ⁡<!-- ⁡ --> α<!-- α --> = F x Δ<!-- Δ --> x + F y Δ<!-- Δ --> y + F z Δ<!-- Δ --> z {\displaystyle W={\vec {F}}\cdot \Delta {\vec {r}}= {\vec {F}} \cdot \Delta {\vec {r}} \cdot \cos \alpha =F_{x}\Delta x+F_{y}\Delta y+F_{z}\Delta z} כאשר <i>α</i> היא הזווית בין הכוח להעתק.
- העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.	- העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.

- אם הגוף לא זז אז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).

הקשר בין העבודה כוללת לאנרגיה קינטית:

*W*_{Σ*F*} = Δ*E*_{*k*} העבודה של **כל הכוחות** שפועלים על הגוף *E*_{*k*} =

1
2

m

v

2

{\displaystyle E_{k}={\frac {1}{2}}mv^{2}}

 אנרגיה קינטית כוח משמר:

- **העבודה שמבצע כוח משמר אינה תלויה במסלול**, היא תלויה רק בנקודת ההתחלה והסיום של התנועה.

- העבודה במסלול סגור מתאפסת.

- יש לו אנרגיה פוטנציאלית כך ש:

האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית:

האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית:

כאשר *x* ההתארכות הקפיץ ממצב רפוי ו-*k* קבוע הקפיץ.

- חוץ מ-*U*_g ו-*U*_{el} יכולים להיות עוד כוחות משמרים ועבורם יהיו עוד אנרגיות פוטנציאליות

אנרגיה (מכאנית) כללית:

- *U* סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בעיה.

משפט עבודה אנרגיה:

*W*_{*NC*} העבודה של כל הכוחות הלא משמרים

חוק שימור האנרגיה:

אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת **העבודה של כוח לא קבוע**:

W
=
∫

F
→

⋅
d

r
→

=
∫
(

F

x

d
x
+

F

y

d
y
+

F

z

d
z
)

{\displaystyle W=\int {\vec {F}}\cdot d{\vec {r}}=\int (F_{x}dx+F_{y}dy+F_{z}dz)}

בשביל הנוסחה צריך גם משוואה של המסלול.

דוגמה בדו-מימד: נתון *y*(*x*) = *x*⁵, באמצעות המשוואה עוברים למשתנה אחד. בדוגמה, נציב באינטגרל במקום *y* את *x*⁵ ו-*dx* נגזרת *dy*, בדוגמה *dy* = 5*x*⁴*dx*. הגבולות של המשתנה אליו עברנו (בדוגמה גבולות של *x*) **אזי** בודקים אם **כוח הוא משמר**:

אם ורק אם

∇

⋅

F
→

=
0

{\displaystyle {\vec {\nabla }}\cdot {\vec {F}}=0}

, אז הכוח משמר.

נוסחת הרוטור בפרק וקטורים.

הערה: צריך שכל רכיב יתאפס בנפרד.

נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר:

Σ

F
→

=
0

{\displaystyle \Sigma {\vec {F}}=0}

 או

∂
u

∂
x

=
0

{\displaystyle {\frac {\partial u}{\partial x}}=0}

 שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתווזה קטנה):

U

x
x

″
>
0

{\displaystyle U_{xx}''>0}

 שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתווזה קטנה):

U

x
x

″
<
0

{\displaystyle U_{xx}''<0}

 שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה

- אם יש כמה ממדים אז

∇

U
=
0

{\displaystyle {\vec {\nabla }}U=0}

שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס אוקף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס **חשוב** אנרגיה פוטנציאלית מכוח משמר: נתונה פונקציית כוח וצריך למצוא *U* שמקיימת

∂
u

∂
x

=
−

F

x

{\displaystyle {\frac {\partial u}{\partial x}}=-F_{x}}

 וגם

∂
u

∂
y

=
−

F

y

{\displaystyle {\frac {\partial u}{\partial y}}=-F_{y}}

 וגם

∂
u

∂
z

=
−

F

z

{\displaystyle {\frac {\partial u}{\partial z}}=-F_{z}}

שלב 1 – נעשה

U
=
−
∫

F

x

d
x
+
g
(
y
,
z
)

{\displaystyle U=-\int F_{x}dx+g(y,z)}

כאשר *g*(*y*,*z*) היא פונקציה כללית שתלויה רק ב *y*,*z*.

דוגמה:

F
→

(
x
,
y
,
z
)
=
2
x
y
z
x
^
+
(
z

x

2

+
3
)
y
^
+
y

x

2

z
^

{\displaystyle {\vec {F}}(x,y,z)=2xyz{\hat {x}}+(zx^{2}+3){\hat {y}}+yx^{2}{\hat {z}}}

U
=
−
∫
2
x
y
z
d
x
+
g
(
y
,
z
)
=
−

x

2

y
z
+
g
(
y
,
z
)

{\displaystyle U=-\int 2xyzdx+g(y,z)=-x^{2}yz+g(y,z)}

שלב 2 – נעשה

∂
u

∂
y

=
−

F

y

{\displaystyle {\frac {\partial u}{\partial y}}=-F_{y}}

 ומשם נמצא את *g*(*y*,*z*) באמצעות אינטגרל על *y* ונוסיף *h*(*z*):

נציב ב

∂
u

∂
y

=
−

F

y

{\displaystyle {\frac {\partial u}{\partial y}}=-F_{y}}

:

−

x

2

z
+

∂
g
(
y
,
z
)

∂
y

=
−
(
z

x

2

+
3
)

{\displaystyle -x^{2}z+{\frac {\partial g(y,z)}{\partial y}}=-(zx^{2}+3)}

נעשה אינטגרל ונוסיף *h*(*z*):

g
(
y
,
z
)
=
−
3
y
+
h
(
z
)

{\displaystyle g(y,z)=-3y+h(z)}

 עכשיו

U
=
−

x

2

y
z
−
3
y
+
h
(
z
)

{\displaystyle U=-x^{2}yz-3y+h(z)}

שלב 3- נעשה

∂
u

∂
z

=
−

F

z

{\displaystyle {\frac {\partial u}{\partial z}}=-F_{z}}

 ומשם נמצא את *h*(*z*) באמצעות אינטגרל על *z* ונוסיף קבוע. בדוגמה:

נציב ב

∂
u

∂
z

=
−

F

z

{\displaystyle {\frac {\partial u}{\partial z}}=-F_{z}}

:

−

x

2

y
+

∂
h
(
z
)

∂
z

=
−
y

x

2

{\displaystyle -x^{2}y+{\frac {\partial h(z)}{\partial z}}=-yx^{2}}

נעשה אינטגרל ונוסיף קבוע:

קבלנו:

h
(
z
)
=
C

{\displaystyle h(z)=C}

שלב 4 - בשביל למצוא את *C* צריך תנאי על האנרגיה

לדוגמה *U*(0,0,0) = 0, אם אין תנאי נשאר את *C*.

- אם אין תלות ב- *Z* בבעיה אז רק שלבים 1-2 וקבוע.

הספק ונצילות

הספק ממוצע:

P

avg

=

W
Δ
t

{\displaystyle P_{avg}={\frac {W}{\Delta t}}}

הספק רגעי:

P
=

d
W

d
t

=

F
→

⋅

v
→

=
|

F
→

|

|

v
→

|

cos
⁡
α

{\displaystyle P={\frac {dW}{dt}}={\vec {F}}\cdot {\vec {v}}=|{\vec {F}}||{\vec {v}}|\cos \alpha }

F[→] - הכוח שפועל על הגוף ו-*v*[→] היא מהירות הגוף.

נצילות:

η
=

P

out

P

in

{\displaystyle \eta ={\frac {P_{out}}{P_{in}}}}

כאשר out מציינ את החלק המנוצל על ידי המערכת ו-in מציינ את כל מה שמושקע.

מתקף ותנע

התנע של גוף:

הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון:

∑

F
→

=

d

p
→

d
t

{\displaystyle \sum {\vec {F}}={\frac {d{\vec {p}}}{dt}}}

המתקף של כוח:

המתקף הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות בזמן (לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות במיקום).

המתקף הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:

J
→

Σ

F
→

=
Δ

p
→

{\displaystyle {\vec {J}}_{\Sigma {\vec {F}}}=\Delta {\vec {p}}}

 חוק שימור התנע: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.

הנוסחה משימור תנע:

m

1

v
→

1
+

m

2

v
→

2
=

m

1

u
→

1
+

m

2

u
→

2

{\displaystyle m_{1}{\vec {v}}_{1}+m_{2}{\vec {v}}_{2}=m_{1}{\vec {u}}_{1}+m_{2}{\vec {u}}_{2}}

 בד"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.

התנגשות אלסטית: יש גם שימור אנרגיה ונוסיף למשוואת התנע את המשוואה:

m

1

v

1

2

+

m

2

v

2

2

=

m

1

u

1

2

+

m

2

u

2

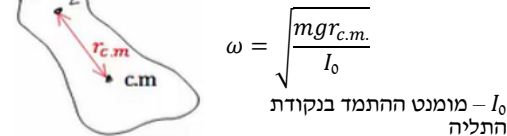
2

{\displaystyle m_{1}v_{1}^{2}+m_{2}v_{2}^{2}=m_{1}u_{1}^{2}+m_{2}u_{2}^{2}}

 אם ההתנגשות חזיתית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרשום:

התנגשות אלסטית לא חזיתית בין שני גופים בעלי **מסות ש**

φ, A מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית:
 $v_{max} = \omega A$
מטוסלת פיזיקלית:
 גוף קשיח שתולים בנקודה כלשהי



$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$
 I_0 – מומנט ההתמד בנקודת התליה
האנרגיה:
 $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
 - האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
 - חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.

נועה הרמונית מרוסנת

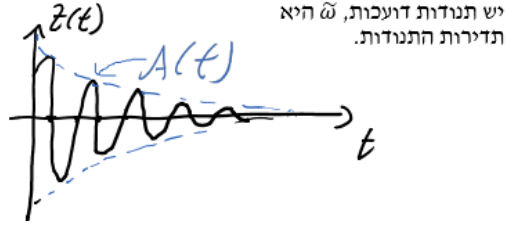
GOOL
 בנוסף לכוח הקפיץ נוסף כוח מרוסן מהצורה:
 $F = -\lambda v$
 v – מהירות הגוף ו- λ קבוע.

משוואת התנועה:
 $\ddot{z} + \Gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
 כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

מקרה (I) – ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
 אין תנודות

מקרה (II) – ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$
 $z(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}$
 דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

מקרה (III) – ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$
 $z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$; $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\Gamma}{2})^2}$
 יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.



נועה הרמונית מרוסנת ומאולצת

GOOL
 בנוסף לכוח הקפיץ והמרוסן נוסף כוח מאלץ מהצורה:
 $\ddot{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$

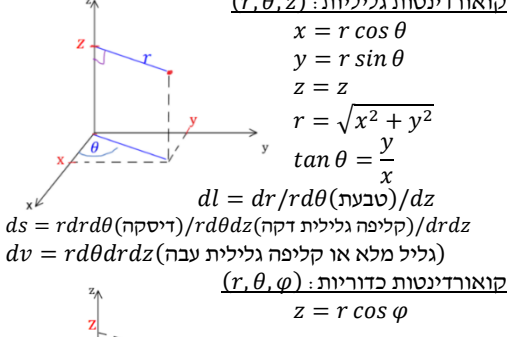
Ω ו- F_0 קבועים כלשהם
משוואת התנועה:
 $\ddot{z} + \Gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$
פתרון משוואת התנועה:

$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{homog}(t)$
 $x_{homog}(t)$ – הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...
 - במצב עמיד (לאחר זמן רב) נזניח את הפתרון ההומוגני.

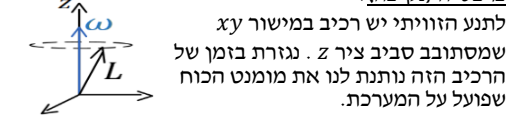
$\frac{F_0}{m}$
 $A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$
 $\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$

תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה מקסימאלי. ניתן למצוא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω . אם $\omega_0 \ll \Omega$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות התנועה ההרמונית ללא כוח מאלץ ומרוסן)

מבוא מתמטי



כאשר $\vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$ זה התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת ו- $\vec{L}_{c.m.}$ התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר סך התנע של הגופים במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.
פרצסה (נקיפה):
 לתנע הזוויתי יש רכיב במישור xy שמתוכם סביב ציר z . נגזרת בזמן של הרכיב הזה נותנת לנו את מומנט הכוח שפועל על המערכת.



גוף קשיח

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל נקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה מהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)
תנע קווי של גוף קשיח:
 $\vec{p} = M\vec{v}_{c.m.}$
תנאי:
 - גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$
 - תנאי גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע: $\vec{L} = I\vec{\omega}$
 כאשר I מומנט ההתמד ביחס לציר - תנאי של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב מרכז המסה): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$
 כאשר $\vec{L}_{c.m.}$ הוא התנע ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל- $\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.}\vec{\omega}$
אנרגיה קינטית סיבובית:

- סביב ציר קבוע כלשהו: $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
 - תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה):
 $E_k = \frac{1}{2}mv_{c.m.}^2 + \frac{1}{2}I_{c.m.}\omega^2$
 - תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (*):
 $E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 + m\vec{r}_{c.m.o} \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$
 כאשר I_0 מומנט ההתמד ביחס לציר, $\vec{v}_0$ היא מהירות הציר ו- $\vec{r}_{c.m.o}$ הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר. (*השימוש בנוסחה מאוד נדיר)

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

תנועה סיבובית	תנועה בקו ישר
θ	x
$\omega = \dot{\theta}$	$v = \dot{x}$
$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$	$a = \dot{v} = \ddot{x}$
I	m
L	p
τ	F

לגול ללא החלקה: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח מתאפסת (ביחס למשטח) $\leftarrow a_{c.m.} = \alpha R$; $v_{c.m.} = \omega R$; בגליה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.

איך נגשים לשאלות?

דרך כוחות ומומנטים	חוקי שימור
עושים: 1. חוק $\Sigma F = ma_{c.m.}$ 2. משוואת מומנטים: $\Sigma \tau = I\alpha$ 3. קשר בין התאוצות, לדוגמה $a_{c.m.} = \alpha R$	בודקים מה נשמר: 1. אנרגיה אם כל הכוחות משמרים. 2. תנע קווי אם סכום הכוחות החיצוניים מתאפס. 3. תנאי אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס.

נועה הרמונית פשוטה

משוואת התנועה:
 $-k(x - x_0) = m\ddot{x}$
 k ו- m הם קבועים חיוביים כלשהם.
 x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
 x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.
 $\ddot{x}$ - נגזרת שנייה של המשתנה.
 חייב להיות מינוס לפני k .
פתרון המשוואה:
 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$
 x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma \vec{F} = 0$.
 A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משיווי המשקל.
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - תדירות זוויתית
 φ - פאזה.
מציאת הקבועים בפתרון:
 x_0 - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

GOOL
 של המקדם $\sqrt{\frac{k}{m}}$
 של המקדם $\sqrt{\frac{x}{\ddot{x}}}$

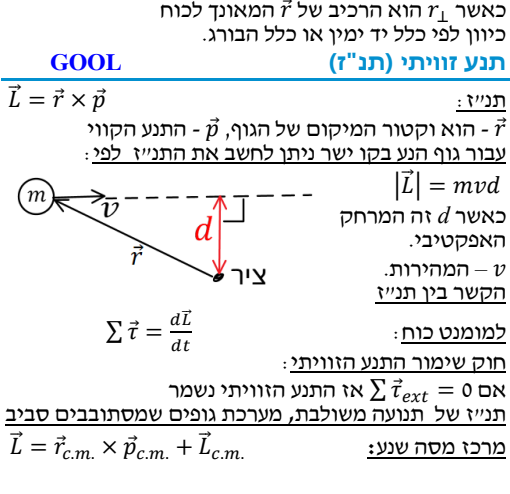
משפט שטיינר:
 $I' = I_{c.m.} + md^2$
 כאשר d הוא המרחק בין הצירים ו- m היא המסה הכוללת של הגוף. **תערה:** משפט שטיינר פועל רק לצירים מקבילים, ורק כאשר אחד הצירים עובר במרכז המסה. **אדטיביות:** ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל. $I_T = I_1 + I_2$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו: $I = mR^2$	גוף נקודתי טבעת (חלולה)
טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי: $I_{c.m.} = mR^2$	גליל חלול
דיסקה/גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z - אנך לדיסקה $I_{c.m.} = \frac{1}{2}mR^2$	טבעת
דיסקה במרכז מסה סביב ציר x - במישור הדיסקה $I_{c.m.} = \frac{1}{4}mR^2$	גליל מלא
מוט במרכז המסה $I_{c.m.} = \frac{1}{12}mL^2$	מוט
מוט בקצה $I = \frac{1}{3}mL^2$	מוט
כדור מלא במרכז מסה $I_{c.m.} = \frac{2}{5}mR^2$	כדור מלא
תיבה או לוח במרכז מסה $I_{c.m.} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$	תיבה

נוסחה המקשרת בין צירים שונים:
 $I_z = I_x + I_y$
 אם $I_x = I_y$ (בדרי"כ מסימטריה) אז $I_z = 2I_x$
מבנה הגוף סימטרי לאורך ציר z : מומנט ההתמד של הגוף סביב ציר z יהיה כמו של גוף משטחי במישור xy . לדוגמה מומנט ההתמד של גליל יהיה כמו של דיסקה ומומנט ההתמד של קוביה יהיה כמו של מלבן שהוא בסיס הקוביה.
חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח:
 $I = \int r^2 dm$
 כאשר r הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית). אם ציר הסיבוב הוא ציר z : $r^2 = x^2 + y^2$

מומנט כוח
GOOL
מומנט כוח:
 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
 כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)
גודל המומנט:
 $|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}|r_{\perp}$
 כאשר $r_{\perp}$ הוא הרכיב של $\vec{r}$ המאונך לכוח כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

תנע זוויתי (תנ"ז)
GOOL
תנאי:
 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
 $\vec{r}$ - הוא וקטור המיקום של הגוף, $\vec{p}$ - התנע הקווי
 עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנאי לפי:
 $|\vec{L}| = mvd$
 כאשר d זה המרחק האפקטיבי.
 v - המהירות.
הקשר בין תנאי:
 $\Sigma \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
למומנט כוח:
חוק שימור התנע הזוויתי:
 אם $\Sigma \vec{\tau}_{ext} = 0$ אז התנע הזוויתי נשמר
 תנאי של תנועה משולבת, מערכת גופים שמסתובבים סביב מרכז מסה שנע:
 $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$



$m_p \approx 1.50 \times 10^{-10} J (\approx 938 MeV)$
 $m_{Uranium} \approx 3.55 \times 10^{-8} J (\approx 225 GeV)$
 - ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ- $\frac{eV}{c}$
 כלומר הכמות (המספר) וזה רק ביחידות נחלק ב- c.
יחסות פרטית
 תיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות (אינרציאליות).

עקרונות יסוד בתורת היחסות:
 - חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.
 - האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.
 - מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.
 - אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור.
 - בוואקום. מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.
 - הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם: x, y, z) שעוברת טרנספורמציה.

פקטור גאמה:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} ; \beta = \frac{v_0}{c}$$

γ_0 תמיד גדולה מ-1
 טרנספורמציות לורנץ למיקום והזמן:
 $x' = \gamma_0(x - v_0 t) ; y' = y ; z' = z$
 $t' = \gamma_0 \left(t - \frac{v_0 x}{c^2} \right) ; \beta = \frac{v_0}{c} ; \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
 טרנספורמציה הפוכה:

$x = \gamma_0(x' + v_0 t') ; y' = y ; z' = z$
 $t = \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0 x'}{c^2} \right)$
 - הצירים של המערכות **חייבים** להיות מקבילים.
 - בזמן $t = t' = 0$ **חייבים** שהראשיות מתלכדות.
 המערכת העצמית:
 מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.
 - **זמן עצמי** τ מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.
 - **אורך עצמי** l_0 האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.
 התכונות האורך: שינוי האורך ממערכת המנוחה

$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$ (העצמית) למערכת נעה
 התארכות הזמן: שינוי הזמן ממערכת המנוחה (העצמית) למערכת נעה)
 $\Delta t = \gamma_0 \tau$
 שינוי זווית במדידת אורך:
 $\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$
 - זווית ביחס לציר ה- x (ציר התנועה) במערכת העצמית θ'
 - זווית ביחס לציר ה- x (ציר התנועה) במערכת אחרת θ
אפקט דופלר היחסות:

$T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tau$ זמן המחזור של הגל:
 אורך הגל:
 $\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda'$
 תדירות הגל:
 $f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f'$

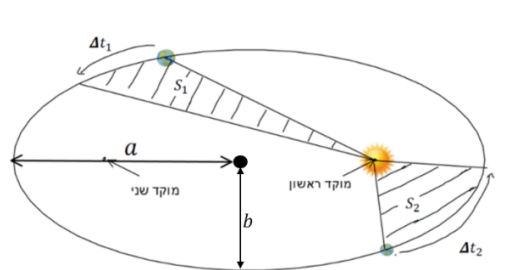
λ', f', τ - הזמן, התדירות ואורך הגל במערכת העצמית
 טרנספורמציות לורנץ למהירויות:
 $v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} ; v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2} \right)} ; v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2} \right)}$
אברציה - שינוי זווית המהירות:

$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0 \left(\cos \theta - \frac{v_0}{c} \right)}$
 שימו לב שפה השינוי הוא בזווית של וקטור המהירות (כיוון התנועה) ולא שינוי זווית של הגוף כמו למעלה.

חוק 1 של קפלר: צורת המסלול של כל כוכב לכת סביב השמש היא אליפסה, שהשמש נמצאת באחד ממוקדיה.
חוק 2 - חוק השטחים השווים: הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש (רדיוס המקום) מכסה שטחים שווים במרחקים שווים. מעבר לכך ניתן להגיד שגם אם הזמנים לא שווים היחס של השטח חלקי הזמן קבוע.

$$\frac{S_1}{\Delta t_1} = \frac{S_2}{\Delta t_2} = \frac{S_T}{T}$$

 $S_T = \pi a b$ - שטח כל האליפסה, a/b - מחצית הציר הראשי/משני של האליפסה, T - זמן המחזור



חוק 3 של קפלר:
 M - מסת הכוכב שבמוקד
 במקרה של מערכת בינארית שבה שני הכוכבים זזים בנוסחה היא:

$$\left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

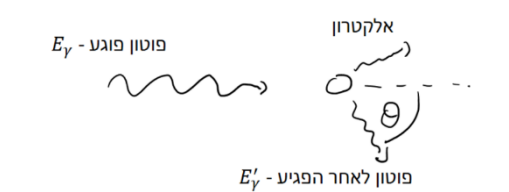
וקטורים

פירוק לרכיבים: $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$
 $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$
 $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$
 כפל בסקלר:
 $\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$
תנע ואנרגיה יחסותיים:
 $\vec{p} = \gamma m \vec{v} ; E = \gamma m c^2$

הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף ועבורו נרצה לחשב את התנע ולא למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות. נוסחאות נוספות:

$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 ; |\vec{p}| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot mc$
אנרגיית מנוחה:
 $E_0 = mc^2$
אנרגיה קינטית:
 $E_k = E - E_0 = mc^2 (\gamma - 1)$
 עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, ניוטרינו) והאנרגיה הקינטית היא:
 $E = |\vec{p}|c = h\nu$
 ν היא התדירות ו- $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ קבוע פלאנק
 טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:
 $E' = \gamma_0 (E - v_0 p_x) ; p'_x = \gamma_0 (p_x - v_0 E/c^2)$
 $p'_y = p_y ; p'_z = p_z$
וקטור תנע אנרגיה:
 $\left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c} \right)$
"גודל הוקטור" (מינוס באנרגיה) זהה בכל מערכות היחסות:

$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2 = const$
 הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.
 - עבור גוף יחיד הקבוע הוא: $m^2 c^2$.
פיזור קומפטון:
 פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



פוטון לאחר הפגיעה E'_γ

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

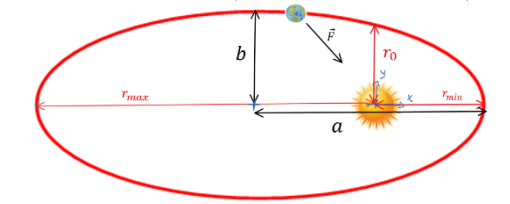
 - E_γ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה
 - E'_γ - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה
 - m_e - מסת אלקטרון
 - θ - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.
יחידת האלקטרון וולט:
 $1 eV = 1.60 \times 10^{-19} J$
המרת מסת הגופים לאנרגיה:
 $m_e \approx 8.19 \times 10^{-14} J (\approx 511 keV)$

$x = r \sin \varphi \cos \theta$
 $y = r \sin \varphi \sin \theta$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$
 $\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$dl = dr / r \sin \varphi d\theta / r d\varphi$
 $ds = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ (מעטפת כדור)
 $dv = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr$ (עבה) כליפת כדורית עבה)
GOOL
כבידה וכוח מרכזי

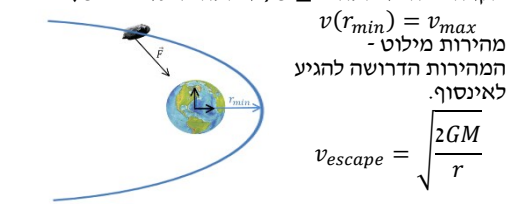
כוח מרכזי:
 תלוי רק ב- r ובכיוון רדיאלי בלבד.
 - **כוח משמר** (אנרגיה).
 - לא מפעיל מומנט כוח ולכן הוא **משמר גם תנע זוויתי**.
כוח הכובד:
 $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$
 כאשר $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} m^{-3} kg^{-1} s^{-2}$
 - קרוב לכדה"א
 $\frac{GMm}{r^2} = \frac{GM_E m}{R_E^2} \approx mg$
 כאשר $r \approx R_E \approx 6400 km ; M_E \approx 5.97 \cdot 10^{24} kg$
 ו- $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$

האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד:
 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$
 הצורה הזו של האנרגיה היא צורה כללית שיש לכוחות נוספים והרבה פעמים רושמים אותה כ:
 $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$
 כאשר α קבוע כלשהו. עבור הכובד $\alpha = GMm$
המסלול של גוף תחת כוח הכובד:
 $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$
 כאשר $r_0 = \frac{L^2}{ma} ; \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{ma^2}}$
 הכוללת של הגוף ו- L הוא התנאי.
צורת המסלול מתחלקת ל-3 מקרים:
 מקרה 1: מעגל $\varepsilon = 0$. במקרה הזה ניתן להשוות את הכוח ל- $\frac{mv^2}{r}$ ולקבל ש:
 $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$
 מקרה 2: אליפסה $0 < \varepsilon < 1$
 - מקור הכוח נמצא באחד ממוקדי האליפסה.



$v(r_{min}) = v_{max} ; v(r_{max}) = v_{min}$
 - בד"כ נמצא המהירויות באמצעות שימור אנרגיה ותנאי.
 $r_{min} = \frac{r_0}{1 + \varepsilon} ; r_{max} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon} ; \varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$
 $a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E} ; b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$
 - שטח האליפסה:
 $S = \pi ab$
 מקרה 3: היפרבולה $\varepsilon \geq 1$ (פרבולה כאשר $\varepsilon = 1$):
 $v(r_{min}) = v_{max}$
 מהירות מילוט - v_{max}
 המהירות הדרושה להגיע לאינסוף.

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$



אנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית:
 בבעיות שבהן האנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק ב- r ניתן לרשום את האנרגיה הכוללת של הגוף כתלות במשתנה r בלבד.
 $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$
 כאשר:
 $U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$
 עבור $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ נקבל את הגרף הבא עבור U_{eff} :

