

## הוראות לדף הנוסחאות



### הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השולים, לבחור שולים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

### עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

### מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

תנועה בקו ישר (מימד אחד) GOOL

מהירות רגעית:  $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$   
מהירות ממוצעת:  $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$   
תאוצה רגעית:  $a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$   
תאוצה ממוצעת:  $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$   
קשרים הפוכים:  $x(t) = \int v(t) dt$   
 $v(t) = \int a(t) dt$   
את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות).  
מיקום ומהירות כתלות בזמן בתאוצה קבועה בלבד:

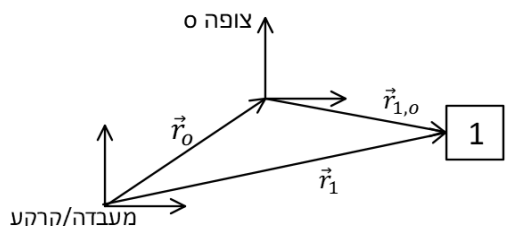
$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$ ;  $v(t) = v_0 + at$   
שטחים מתחת לגרף הפונקציה (גם בתאוצה משתנה):  
השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות כתלות בזמן שווה להעתק, כאשר שטח מתח לציר הזמן מחושב כשלילי (אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרך).  
השטח מתחת לגרף של התאוצה כתלות בזמן שווה לשינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי).

תנועה במרחב (דו ותלת מימד): GOOL

וקטור המיקום:  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$   
וקטור ההעתק:  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$   
וקטור המהירות הממוצעת (velocity):  $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$   
וקטור המהירות הרגעית (velocity):  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$   
וקטור התאוצה הממוצעת:  $\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$   
וקטור התאוצה הרגעית:  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$   
גודל המהירות (Speed):  $|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$ , כאשר  $S$  זה הדרך.  
משוואת מסלול (דו מימד): פונקציה מהצורה  $y(x)$ .  
סרטוט של הפונקציה הוא המסלול של הגוף במישור. ניתן למצא את המשוואה באמצעות בידוד משתנה הזמן מהפונקציה  $x(t)$  והצבה ב  $y(t)$ .

תנועה יחסית (טרנס גליליי) GOOL

המיקום, המהירות והתאוצה של גוף 1 ביחס לגוף 2:  
 $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ;  $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ;  $\vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$   
הנוסחה וקטורית אבל אפשר להשתמש לכל ציר בנפרד. שיטה שניה - שימוש בתרשים וקטורים:  
1. נצייר ראשית ונשרטט את הוקטורים  $\vec{r}_1$  ו-  $\vec{r}_0$  יוצאים מהראשית לפי האינפורמציה הנתונה בתרגיל (הגודל והכיוון שלהם).  
2. נצייר ראשית צירים של הצופה בקצה הוקטור  $\vec{r}_0$ .  
3. נשרטט את הוקטור  $\vec{r}_{1,0}$  מהראשית של הצופה לפי הנתונים בתרגיל וכך שהראש שלו נפגש עם הראש של הוקטור  $\vec{r}_1$ .  
4. נעשה טריגו ונמצא את תנאי הוקטורים החסרים.



משפט הקוסינוס (לכל סוגי המשולשים):  
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$   
 $\gamma$  - הזווית מול הצלע  $c$  (יכולה להיות כל צלע במשולש).  
משפט הסינוסים (לכל סוגי המשולשים):

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$   
 $\gamma$  הזווית מול הצלע  $c$ ,  $\beta$  הזווית מול  $b$ ,  $\alpha$  הזווית מול  $a$   
קפיצים

חוק הוק - הכוח של קפיץ:  $F = -k(x - x_0)$   
כאשר  $x$  הוא מיקום הגוף ו-  $x_0$  המיקום שבו הקפיץ רפוי.

| חיבור במקביל | חיבור בטור |
|--------------|------------|
|              |            |

תנועה מעגלית (ברדיוס קבוע) GOOL

הדרך בתנועה מעגלית:  $S = \Delta\theta \cdot R$

וקטורים GOOL

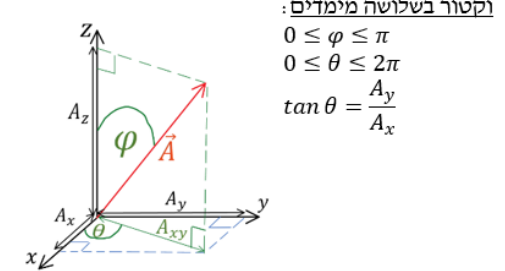
פירוק לרכיבים:  
 $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$   
 $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$   
 $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$   
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

כפל בסקלר:  $\alpha\vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$   
מכפלה סקלרית: שתי דרכים לבניוע המכפלה:  
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$

$\alpha$  - זווית בין הוקטורים.  
תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).  
מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת, זו דרך לבדוק האם וקטורים מאונכים.  
פתיחת סוגרים והעלאה בריבוע:

$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$   
 $(\vec{A} + \vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$   
זווית בין שני וקטורים:  $\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$

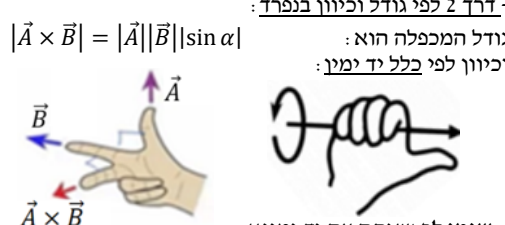
וקטור יחידה:  
וקטור בשלושה מימדים:  
 $0 \leq \varphi \leq \pi$   
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$   
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$



$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ ;  $\cos \varphi = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$

פירוק לרכיבים:  $A_{xy} = |\vec{A}| \sin \varphi$ ;  $A_z = |\vec{A}| \cos \varphi$   
מכפלה וקטורית:  
דרך 1 לעשות את המכפלה עם דטרמיננטה:

$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$   
דרך 2 לפי גודל וכיוון בנפרד:  
גודל המכפלה הוא:  $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha$   
וכיוון לפי כלל יד ימין:



שימו לב שאתם עם יד ימין!!  
בתמונה השמאלית, קודם לעשות אקדח ואחר"כ לפתוח את האמה!

גרדיאנט בקרטזיות:  
 $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$   
גרדיאנט בגליליות:  
 $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$   
בכדוריות (\*):  $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$   
רוטור (Rot/Curl) בקרטזיות:

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left( \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$

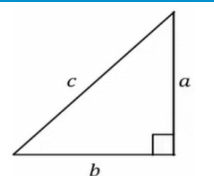
בגליליות:  
 $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi}$   
בכדוריות (\*):

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r F_\varphi \sin \varphi) - \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} \right) \hat{\varphi}$

(\*) שימו לב שהזווית  $\varphi$  עם ציר ה-z והזווית  $\theta$  עם ציר ה-x

מבוא מתמטי GOOL

ניצב שמול יתר:  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$   
ניצב ליד יתר:  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$   
ניצב שמול ליד ניצב:  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$   
ניצב ליד:  $\cot \alpha = \frac{b}{a}$   
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ;  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$   
 $a^2 + b^2 = c^2$



|                                                                                                                                                                               |                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$<br>$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$ ; $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$        | $90^\circ - \alpha$  |
| $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ ; $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$<br>$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$ ; $\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$     | $90^\circ + \alpha$  |
| $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ ; $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$ | $180^\circ - \alpha$ |
| $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$<br>$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ ; $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$                                             | $-\alpha$            |
| $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$<br>$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$                                      | $2\alpha$            |
| $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$<br>$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$                  | $\alpha \pm \beta$   |

סכום והפרש של פונקציות:

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$   
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$   
 $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

פתרון משוואות טריגונומטריות:

|                                                          |                        |
|----------------------------------------------------------|------------------------|
| $x_1 = \alpha + 2\pi k$<br>$x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$ | $\sin x = \sin \alpha$ |
| $x_1 = \alpha + 2\pi k$<br>$x_2 = -\alpha + 2\pi k$      | $\cos x = \cos \alpha$ |
| $x = \alpha + \pi k$                                     | $\tan x = \tan \alpha$ |

קואורדינטות גליליות:  $(r, \theta, z)$

$x = r \cos \theta$   
 $y = r \sin \theta$   
 $z = z$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$



$dl = dr/r d\theta$  (טבעת) /  $dz$   
 $ds = r dr d\theta$  (דיסקה) /  $r d\theta dz$  (קליפה גלילית דקה) /  $dr dz$  (גליל מלא או קליפה גלילית עבה)  
 $dv = r d\theta dr dz$

קואורדינטות כדוריות:  $(r, \theta, \varphi)$

$z = r \cos \varphi$   
 $x = r \sin \varphi \cos \theta$   
 $y = r \sin \varphi \sin \theta$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$   
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$



$\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$   
 $dl = dr/r \sin \varphi d\theta / r d\varphi$   
 $ds = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$  (מעטפת כדור)  
 $dv = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr$  (כדור מלא / קליפה כדורית עבה)  
צפיפות נפחית/משטחית/אורכית:

$\rho = \frac{M}{V}$ ;  $\sigma = \frac{M}{S}$ ;  $\lambda = \frac{M}{l}$

$V, S, l$  הם נפח, שטח ואורך הגוף.  
אלמנט מסה אינפיניטסימאלי אורכי/משטחי/נפחי:

$dm = \lambda dl / \sigma ds / \rho dv$

$dl/ds/dv$  - ראו קואורדינטות

בדרך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל  $\Delta\theta$  היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!

גודל המהירות הקווית הרגעית ( $speed$ ):  $v(t) = \frac{ds}{dt}$   
- כיוון המהירות תמיד משיק למעגל

מהירות זוויתית:  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$   
-  $f$  התדירות,  $T$  - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)

קשר בין המהירות הקווית לזוויתית:  $v = \omega R$

תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל):  $a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

הכוחות למרכז המעגל:  $\Sigma F_{\text{המעגל}} = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$

תאוצה זוויתית:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

תאוצה משיקית (רק בתנועה לא קצובה):  $a_\theta = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \alpha R$

הגובה במעגל אנכי:  $h = R(1 - \cos \theta)$   
- כאשר  $h$  ו- $\theta$  נמדדים מתחתית המעגל.

הכוח הצנטריפוגלי:  $F_r = m\omega^2 R$   
- בכיוון החוצה מהמעגל.

- שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

וקטור המיקום:  $\vec{r} = R \cos \theta \hat{x} + R \sin \theta \hat{y}$

הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית:  $\vec{a}_\theta = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

קואורדינטות פולריות

$x = r \cos \theta$  ;  $y = r \sin \theta$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  ;  $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$  ;  $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$

$\vec{r} = r\hat{r}$  ;  $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$   
 $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

כוחות מדומים

כוח מדומה מוסיפים רק כאשר **הצופה** נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אין כוחות מדומים ולא תלוי בתנועת הגוף.

החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה:  $m\vec{a}' = \Sigma \vec{F}_{\text{אמיתיים}} - m\vec{a}_0$

$\vec{a}'$  היא תאוצת הגוף ביחס לצופה.

אמיתיים  $\Sigma \vec{F}$  הם כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.

" $-m\vec{a}_0$ " הוא הכוח המדומה כאשר  $m$  היא מסת הגוף הנמדד ו- $\vec{a}_0$  היא תאוצת הצופה.

הכוחות מדומים הנוספים במקרה של צופה מסתובב במהירות זוויתית קבועה:

הכוח הצנטריפוגלי:  $\vec{F} = m\omega^2 r\hat{r}$

או בצורה יותר כללית  $\vec{F} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

כוח קוריאוлис:  $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

כאשר בשתי הנוסחאות  $\omega$  הוא של הצופה (ולא של הגוף) ו- $\vec{v}'$  מהירות הגוף ביחס לצופה.

$\vec{r}$  - וקטור המיקום של הגוף

עבודה ואנרגיה

עבודה של כוח קבוע:  $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \alpha = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$

כאשר  $\alpha$  היא הזווית בין הכוח להעתק.

- העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.

- אם הגוף לא זז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).

הקשר בין העבודה כוללת לאנרגיה קינטית:  $W_{\Sigma F} = \Delta E_k$

העבודה שמצע כוח משמר אינה תלויה במסלול, היא תלויה רק בנקודות ההתחלה והסיום של התנועה.

- העבודה במסלול סגור מתאפסת.

- יש לו אנרגיה פוטנציאלית כך ש:  $W_c = -\Delta U$

האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית:  $U_g = mgh$

האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית:  $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$

כאשר  $x$  ההתארכות הקפיץ ממצב רפוי ו- $k$  קבוע הקפיץ.

- חוץ מ- $U_g$  ו- $U_{el}$  יכולים להיות עוד כוחות משמרים ועבורם יהיו עוד אנרגיות פוטנציאליות

אנרגיה (מכאנית) כללית:  $E = E_k + U$   
- סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בבעיה.

משפט עבודה אנרגיה:  $E_i + W_{NC} = E_f$

העבודה של כל הכוחות הלא משמרים חוק שימור האנרגיה:

אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת

חישוב אנרגיה פוטנציאלית מכוח משמר:

נתונה פונקציית כוח וצריך למצוא  $U$  שמקיימת  $\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x$  וגם  $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$  וגם  $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$

שלב 1 - נעשה  $U = -\int F_x dx + g(y, z)$

כאשר  $g(y, z)$  היא פונקציה כללית שתלויה רק ב  $z, y$

דוגמה:  $\vec{F}(x, y, z) = 2xyz\hat{x} + (zx^2 + 3)\hat{y} + yx^2\hat{z}$

$U = -\int 2xyz dx + g(y, z) = -x^2 yz + g(y, z)$

שלב 2 - נעשה  $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$  ומשם נמצא את  $g(y, z)$

באמצעות אינטגרל על  $y$  ונוסיף  $h(z)$ . בדוגמה:

נציב ב  $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$  :  $-x^2 z + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = -(zx^2 + 3)$

נעשה אינטגרל ונוסיף  $h(z)$  :  $g(y, z) = -3y + h(z)$

עכשיו  $U = -x^2 yz - 3y + h(z)$

שלב 3 - נעשה  $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$  ומשם נמצא את  $h(z)$  באמצעות אינטגרל על  $z$  ונוסיף קבוע. בדוגמה:

נציב ב  $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$  :  $-x^2 y + \frac{\partial h(z)}{\partial z} = -yx^2$

נעשה אינטגרל ונוסיף קבוע:  $h(z) = C$

קבלנו:  $U = -x^2 yz - 3y + C$

שלב 4 - בשביל למצוא את  $C$  צריך תנאי על האנרגיה לדוגמה  $U(0,0,0) = 0$ , אם אין תנאי נשאר  $C$ .

- אם אין תלות ב- $Z$  בבעיה אז רק שלבים 1-2 וקבוע.

הספק ונצילות

הספק ממוצע:  $P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$

הספק רגעי:  $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos \alpha$

$\vec{F}$  - הכוח שפועל על הגוף ו- $\vec{v}$  היא מהירות הגוף.

נצילות:  $\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{W_{out}}{E_{in}}$

כאשר out מציינ את החלק המנוצל על ידי המערכת ו- in מציינ את כל מה שמושקע.

מתקף ותנע

התנע של גוף:  $\vec{p} = m\vec{v}$

הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון:  $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

המתקף של כוח:  $\vec{j} = \int \vec{F} dt$

המתקף הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות בזמן (לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות במיקום).

המתקף הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:  $\vec{j}_{\Sigma \vec{F}} = \Delta \vec{p}$

חוק שימור התנע: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.

הנוסחה משימור תנע:  $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$

בד"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.

התנגשויות אלסטיות: יש גם שימור אנרגיה ונוסיף למשוואות התנע את המשוואה:  $m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$

אם ההתנגשויות חזיתית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרשום:

$v_1 + u_1 = v_2 + u_2$

התנגשויות אלסטיות לא חזיתית בין שני גופים בעלי מסות שוות ואחד הגופים במנוחה לפני ההתנגשויות: הזווית בין המהירויות אחרי ההתנגשויות תהיה 90 מעלות.

התנגשויות פלסטיות (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשויות):  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$

בהתנגשויות פלסטיות לא יכול להיות שימור אנרגיה. התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשויות מאוד קצר ולכן ניתן להזניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.

מקדם תקומה:  $e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$

בין 0 ל 1, ככל שיותר גבוה יותר אנרגיה נשמרת אך לא ניתן לדעת כמה. שווה 1 באלסטיות ו-0 בפלסטיות.

התנגשויות ללא שימור תנע: אם בפגיעה הנורמל גדול מאוד אז לא זנזיח אותו ונחשב את המתקף שלו והשינוי בתנע של המערכת כתוצאה מכך. בנוסף גם החיכוך הקינטי יכול להיות מאוד גדול בעקבות הנורמל ונחשב גם בו.

מסה משתנה

הנוסחה  $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$  לא נכונה עבור גוף שהמסה שלו משתנה. עבור לניסוח הכללי יותר של חוק שני:  $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

נוסחה כללית לתנועה גופים שפולטים מסה:

$\Sigma \vec{F}_{ext} = M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt}$

כאשר  $\frac{dm}{dt}$  הוא קצב הפליטה (חיובי כאשר חומר יוצא מהגוף ושלילי אם חומר נכנס לגוף).

$\vec{v}_{rel}$  - מהירות החומר שנפלט ביחס לגוף (אם החומר נפלט אחורה אז היא צריכה להיות שלילית)

$ext$  - הכוונה לסכום הכוחות החיצוניים

מרכז מסה

מיקום מרכז המסה:  $\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x:  $x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

מהירות מרכז המסה:  $\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

תאוצת מרכז המסה:  $\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$

עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממשיות בהתאמה. מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים): עושים מרכז מסה בין מרכזי המסה.

גוף עם חור: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מרכז מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.

תאוצת מרכז המסה תלויה רק בכוחות החיצוניים:  $\Sigma F_{ext} = m a_{c.m.}$

אם אין כוחות חיצוניים (ומרכז המסה במנוחה בהתחלה) אז מיקום מרכז המסה נשמר. ניתן לעשות "שימור מרכז מסה" לחשב אותו בהתחלה ובסוף ולהשוות.

בשביל למצוא מרכז מסה של גוף גדול נשתמש באינטגרל:  $x_{c.m.} = \int x dm$

כ"ל לגבי  $x, y, z$  - לחישוב  $dm$  הסתכלו במבוא המתמטי.

מומנט התמד

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)

מומנט התמד של מערכת גופים נקודתיים:  $I = \Sigma m_i r_i^2$

משפט שטיינר:  $I' = I_{c.m.} + md^2$

כאשר  $d$  הוא המרחק בין הצירים ו- $m$  היא המסה הכוללת של הגוף. הערה: משפט שטיינר פועל רק לצירים מקבילים, ורק כאשר אחד הצירים עובר במרכז המסה.

אדטיביות: ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל.  $I_T = I_1 + I_2$

|  |                                                                                                    |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | גוף נקודתי סביב ציר כלשהו:<br>$I = mR^2$<br>טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי:<br>$I_{c.m.} = mR^2$ |
|  | דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z- אנך לדיסקה<br>$I_{c.m.} = \frac{1}{2} mR^2$                  |
|  | דיסקה במרכז מסה סביב ציר x- במישור הדיסקה<br>$I_{c.m.} = \frac{1}{4} mR^2$                         |
|  | מוט במרכז המסה<br>$I_{c.m.} = \frac{1}{12} mL^2$                                                   |
|  | מוט בקצה<br>$I = \frac{1}{3} mL^2$                                                                 |
|  | כדור מלא במרכז מסה<br>$I_{c.m.} = \frac{2}{5} mR^2$                                                |
|  | תיבה או לוח במרכז מסה<br>$I_{c.m.} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$                                      |

נוסחה המקשרת בין צירים שונים:  $I_z = I_x + I_y$

אם  $I_x = I_y$  (בדרך"כ מסימטריה) אז  $I_z = 2I_x$

מבנה הגוף סימטרי לאורך ציר Z: מומנט התמד של הגוף סביב ציר Z יהיה כמו של גוף משטחי במישור xy.

לדוגמה מומנט ההתמד של גליל יהיה כמו של דיסקה ומומנט ההתמד של קוביה יהיה כמו של מלבן שהוא בסיס הקוביה.

חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח:

כאשר  $r$  הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית). אם ציר הסיבוב הוא ציר  $z: x^2 + y^2 = r^2$

**מומנט כוח**  
 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

**מומנט כוח:**  
 כאשר  $\vec{r}$  הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)

**גודל המומנט:**  
 $|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}|r_{\perp}$   
 כאשר  $r_{\perp}$  הוא הרכיב של  $\vec{r}$  המאונך לכוח כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

**תנע זוויתי (תנ"ז)**

**תנ"ז:**  
 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{r}$  - הוא וקטור המיקום של הגוף,  $\vec{p}$  - התנע הקווי  
 עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי:

$|\vec{L}| = mvd$   
 כאשר  $d$  זה המרחק האפקטיבי.  
 $v$  - המהירות.  
 הקשר בין תנ"ז

**למומנט כוח:**  
 $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

**חוק שימור התנע הזוויתי:**  
 אם  $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$  אז התנע הזוויתי נשמר

**תנ"ז של תנועה משולבת, מערכת גופים שמסתובבים סביב מרכז מסה שני:**  
 $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר  $\vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$  זה התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת

ו-  $\vec{L}_{c.m.}$  התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר סך התנ"ז של הגופים במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.

**גוף קשיח**

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל נקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה מהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)

**תנע קווי של גוף קשיח:**  
 $\vec{p} = M\vec{v}_{c.m.}$

**תנ"ז:**  
 - גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית):  
 $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$

- תנ"ז גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע:  
 $\vec{L} = I\vec{\omega}$

כאשר  $I$  מומנט ההתמד ביחס לציר

- תנ"ז של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב מרכז המסה):  
 $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר  $\vec{L}_{c.m.}$  הוא התנ"ז ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל-  $\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.}\vec{\omega}$

**אנרגיה קינטית סיבובית:**

- סביב ציר קבוע כלשהו:  
 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

- תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה):  
 $E_k = \frac{1}{2}mv_{c.m.}^2 + \frac{1}{2}I_{c.m.}\omega^2$

- תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (\*):  
 $E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 + m\vec{r}_{c.m.o} \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$

כאשר  $I_0$  מומנט ההתמד ביחס לציר,  $\vec{v}_0$  היא מהירות הציר ו-  $\vec{r}_{c.m.o}$  הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר.

(\*) השימוש בנוסחה מאוד נדיר

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

| תנועה סיבובית                           | תנועה בקו ישר            |
|-----------------------------------------|--------------------------|
| $\theta$                                | $x$                      |
| $\omega = \dot{\theta}$                 | $v = \dot{x}$            |
| $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ | $a = \dot{v} = \ddot{x}$ |
| $I$                                     | $m$                      |
| $L$                                     | $p$                      |
| $\tau$                                  | $F$                      |

גלגול ללא החלקה: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח מתאפסת (ביחס למשטח)  $\leftarrow a_{c.m.} = \alpha R$ ;  $v_{c.m.} = \omega R$

- בגל"ה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.

**אין נגשים לשאלות?**

חוקי שימור  
 בודקים מה נשמר:  
 1. אנרגיה אם כל הכוחות משמרים.  
 2. תנע קווי אם סכום הכוחות החיצוניים מתאפס.  
 3. תנ"ז אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס.

**כבידה וכוח מרכזי**

**כוח מרכזי:**  
 $\vec{F}(r) = f(r)\hat{r}$

- תלוי רק ב  $r$  ובכיוון רדיאלי בלבד.

- **כוח משמר** (אנרגיה).  
 - לא מפעיל מומנט כוח ולכן הוא **משמר גם תנע זוויתי**.

**כוח הכובד:**  
 $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$

כאשר  $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} m^{-3} kg^{-1} s^{-2}$

- קרוב לכדה"א  
 $\frac{GMm}{r^2} = \frac{GM_E m}{R_E^2} \approx mg$

כאשר  $r \approx R_E \approx 6400 km$ ;  $M_E \approx 5.97 \cdot 10^{24} kg$

ו-  $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$

**האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד:**  
 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$

הצורה הזו של האנרגיה היא צורה כללית שיש לכוחות נוספים והרבה פעמים רושמים אותה כ:

$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

כאשר  $\alpha = GMm$  עבור הכובד

**המסלול של גוף תחת כוח הכובד:**  
 $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta}$

כאשר  $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{ma^2}}$ ;  $r_0 = \frac{L^2}{ma}$ ;  $E$  היא האנרגיה

הכוללת של הגוף ו-  $L$  הוא התנ"ז.

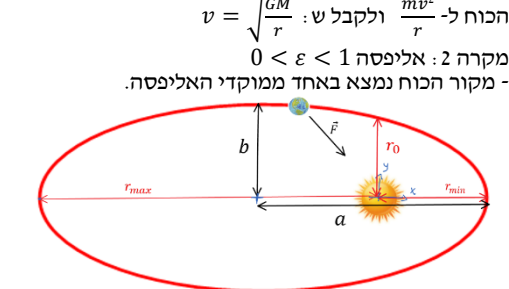
צורת המסלול מתחלקת ל-3 מקרים:

מקרה 1: מעגל  $\epsilon = 0$ . במקרה הזה ניתן להשוות את הכוח ל-  $\frac{mv^2}{r}$  ולקבל ש:

$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

מקרה 2: אליפסה  $0 < \epsilon < 1$

- מקור הכוח נמצא באחד ממוקדי האליפסה.



בד"כ נמצא המהירויות באמצעות שימור אנרגיה ותנ"ז:

$v(r_{min}) = v_{max}$ ;  $v(r_{max}) = v_{min}$

$r_{min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon}$ ;  $r_{max} = \frac{r_0}{1 - \epsilon}$ ;  $\epsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$

$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{r_0}{1 - \epsilon^2}$ ;  $b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$

- שטח האליפסה:  
 $S = \pi ab$

מקרה 3: היפרבולה  $\epsilon \geq 1$  (פרבולה כאשר  $\epsilon = 1$ ):

$v(r_{min}) = v_{max}$

מהירות מילוט -

המהירות הדרושה להגיע לאינסוף.

$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

**אנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית:**

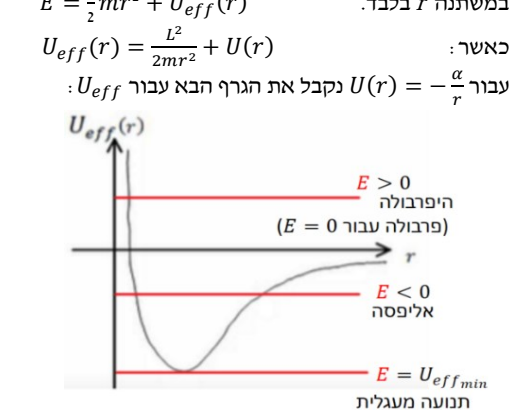
בבעיות שבהן האנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק ב  $r$  ניתן לרשום את האנרגיה הכוללת של הגוף כתלות במשתנה  $r$  בלבד.

$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$

כאשר:

$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$

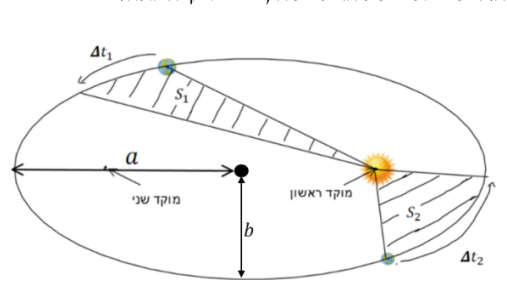
עבור  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  נקבל את הגרף הבא עבור  $U_{eff}$ :



**חוק 1 של קפלר:** צורת המסלול של כל כוכב סביב השמש היא אליפסה, שהשמש נמצאת באחד ממוקדיה. **החוק 2 - חוק השטחים השווים:** הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש (רדיוס המקום) מכסה שטחים שווים במרחקים שווים. מעבר לכך ניתן להגיד שגם אם הזמנים לא שווים היחס של השטח חלקי הזמן קבוע.

$\frac{S_1}{\Delta t_1} = \frac{S_2}{\Delta t_2} = \frac{S_T}{T}$

$S_T = \pi ab$  - שטח כל האליפסה,  $a/b$  - מחצית הציר הראשי/משני של האליפסה,  $T$  - זמן המחזור



**חוק 3 קפלר:**  
 $\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{GM}$

$M$  - מסת הכוכב שבמוקד

במקרה של מערכת בינארית שבה שני הכוכבים זזים

הנוסחה היא:

$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}$

**כוח גרר וכוח ציפה**

**כוח גרר הוא כוח מהצורה:**  
 $\vec{F} = -k\vec{v}$

כאשר  $\vec{v}$  היא מהירות הגוף ו-  $k$  הוא קבוע כלשהו.

**משוואת תנועה** - משוואה הכוללת את  $x$  ו-  $v$  ו-  $a$ . בדרכ מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.

**מהירות סופית** - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)

**כוח סטוקס** - כוח גרר שפועל על **פדור בתוך נוזל**:

$\vec{F}_v = -6\pi\eta R\vec{v}$  - צמיגות הנוזל,  $R$  - רדיוס הכדור

**כוח ציפה:** פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד.

$F_b = \rho_l V g$

כאשר  $\rho_l$  היא צפיפות הנוזל ו-  $V$  הוא נפח הגוף.

**תנועה הרמונית פשוטה**

**משוואת התנועה:**  
 $-k(x - x_0) = m\ddot{x}$

ו-  $m$  הם קבועים **חיוביים** כלשהם.

$x_0$  - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

$x$  - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זוויתי או משתנה אחר.

$\ddot{x}$  - נגזרת שנייה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני  $k$ .

**פתרון המשוואה:**  
 $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0$

$x_0$  - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה  $\sum \vec{F} = 0$ .

$A$  - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משיווי המשקל.

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  - תדירות זוויתית

$\phi$  - פאזה.

**מצביות הקבועים בפתרון:**

$x_0$  - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

של המקדם  $\frac{x}{\ddot{x}}$

של המקדם  $\frac{x}{\ddot{x}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$