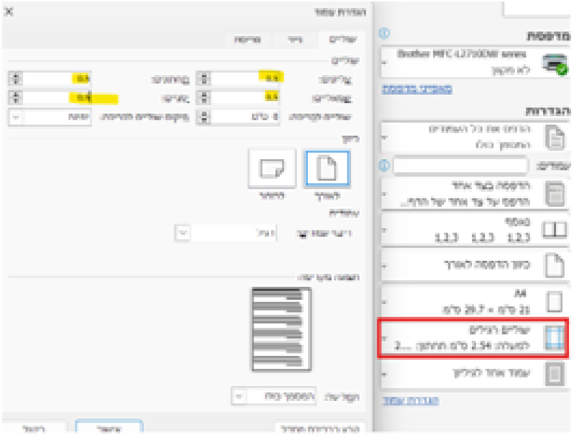
הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה! :

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השולים, לבחור שולים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

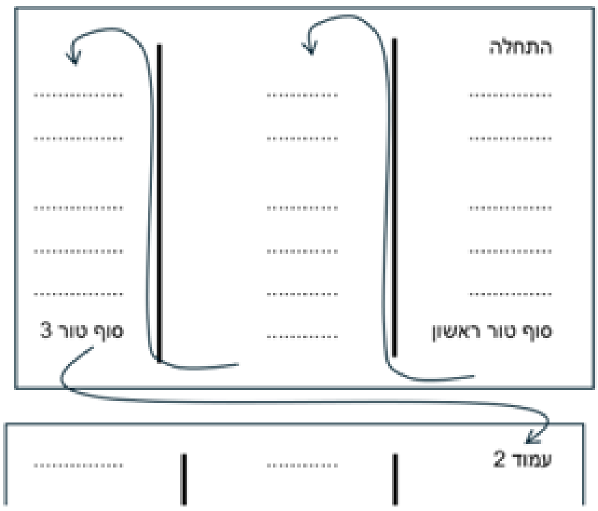
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:

הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

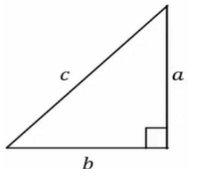
ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.



כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

מבוא מתמטי GOOL



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{יתר}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{ניצב ליד}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \;;\; \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{ניצב שמול}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$; $\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$	$90^\circ-\alpha$
$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$; $\cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$	$90^\circ+\alpha$
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$; $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$; $\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$	$180^\circ-\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$; $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$-\alpha$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$	2α
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	$\alpha\pm\beta$

סכום והפרש של פונקציות:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

פתרון משוואות טריגונומטריות:

$x_1 = \alpha+2\pi k$ $x_2 = \pi-\alpha+2\pi k$	$\sin x = \sin\alpha$
$x_1 = \alpha+2\pi k$ $x_2 = -\alpha+2\pi k$	$\cos x = \cos\alpha$
$x = \alpha+\pi k$	$\tan x = \tan\alpha$

נגזרות ואינטגרליים:

- נגזרת של מכפלה:

$$y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

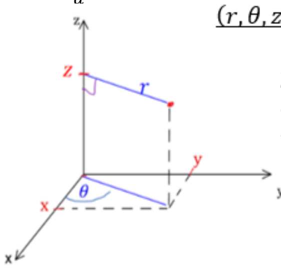
- כלל שרשרת: אם y היא פונקציה של x ו- x הוא פונקציה של t אז: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

- נגזרות נוספות: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$; $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$; $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$; $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$; $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$

- אינטגרל היא פעולה הפוכה לנגזרת, מבצע סכימה על ערכי הפונקציה ונותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.
אינטגרל לא מסוים- מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.
אינטגרל מסוים- מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל:

$$\int_a^b x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

קואורדינטות גליליות: (r,θ,z)



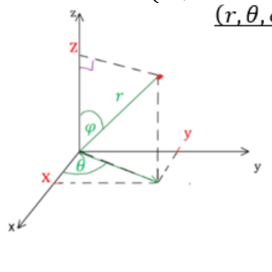
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$dl = dr/rd\theta(\text{טבעת})/dz$

$ds = rdrd\theta(\text{דיסקה})/rd\theta dz(\text{קליפה גלילית דקה})/drdz$

$dv = rd\theta drdz(\text{גליל מלא או קליפה גלילית עבה})$

קואורדינטות כדוריות: (r,θ,φ)



$$z = r\cos\varphi$$
$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$dl = dr/rsin\varphi d\theta/rd\varphi$

$ds = r^2 sin\varphi d\theta d\varphi(\text{מעטפת כדור})$

$dv = r^2 sin\varphi d\theta d\varphi dr(\text{כדור מלא / קליפה כדורית עבה})$

צפיפות נפחית/משטחית/אורכית:

$$\rho = \frac{M}{V} \;;\; \sigma = \frac{M}{S} \;;\; \lambda = \frac{M}{l}$$

V,S,l הם נפח, שטח ואורך הגוף.

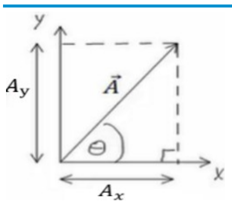
אלמנט מסה אינפיניטסימאלי אורכי/משטחי/נפחי:

$$dm = \lambda dl/\sigma ds/\rho dv$$

$dl/ds/dv$ – ראו קואורדינטות

וקטורים GOOL

פירוק לרכיבים:



$$A_x = |\vec{A}|\cos\theta$$
$$A_y = |\vec{A}|\sin\theta$$
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

כפל בסקלר: $\alpha\vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$

מכפלה סקלרית: שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x\cdot B_x + A_y\cdot B_y = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha$$

α - זווית בין הוקטורים.

- תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
- מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת, זו דרך **לבדוק האם וקטורים מאונכים**.

פתיחת סוגרים והעלאה בריבוע:

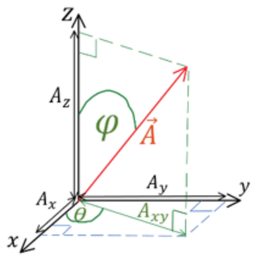
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + |\vec{B}|^2$$

זווית בין שני וקטורים: $\cos\alpha = \frac{A_xB_x+A_yB_y}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$

וקטור יחידה: $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

וקטור בשלושה מימדים:



$$0 \le \varphi \le \pi$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \;;\; \cos\varphi = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}$$

- פירוק לרכיבים: $A_{xy} = |\vec{A}|\sin\varphi$; $A_z = |\vec{A}|\cos\varphi$
$A_x = |\vec{A}|\sin\varphi\cos\theta$; $A_y = |\vec{A}|\sin\varphi\sin\theta$

מכפלה וקטורית:

- דרך 1 לעשות את המכפלה עם דטרמיננטה:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

- דרך 2 לפי גודל וכיוון בנפרד:

גודל המכפלה הוא: $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}||\sin\alpha|$

וכיוון לפי כלל יד ימין:

- **שימו לב** שאתם עם יד ימין!!
- בתמונה השמאלית, קודם לעשות אקדח ואחר״כ לפתוח את האמה!

גרדיאנט בקרטזיות: $\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

גרדיאנט בגליליות: $\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

בכדוריות (*): $\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$

רוטור (Rot/Curl) בקרטזיות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

בגליליות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{z}$$

בכדוריות (*):

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{r\sin\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\theta\sin\varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial\theta}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\theta)\right)\hat{\varphi}$$

(*) שימו לב שהזווית φ עם ציר ה-z והזווית θ עם ציר x

תנועה בקו ישר (מימד אחד) GOOL

מהירות רגעית: $v_{(t)} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

מהירות ממוצעת: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

תאוצה רגעית: $a_{(t)} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

תאוצה ממוצעת: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

קשרים הפוכים: $x(t) = \int v(t)\,dt$

$v(t) = \int a(t)\,dt$

- את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות).

מיקום ומהירות כתלות בזמן **בתאוצה קבועה בלבד**:

$$x(t) = x_0 + v_0\cdot t + \tfrac{1}{2}at^2 \;;\; v(t) = v_0 + at$$

שטחים מתחת לגרף הפונקציה (גם בתאוצה משתנה):

- השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות כתלות בזמן שווה להעתק, כאשר שטח מתח לציר הזמן מחושב כשלילי (אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרך).
- השטח מתחת לגרף של התאוצה כתלות בזמן שווה לשינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי).

תנועה במרחב (דו ותלת מימד): GOOL

וקטור המיקום: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

וקטור ההעתק: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

וקטור המהירות הממוצעת (velocity): $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

וקטור המהירות הרגעית (velocity): $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- וקטור המהירות הרגעית תמיד בכיוון משיק למסלול

וקטור התאוצה הממוצעת: $\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

וקטור התאוצה הרגעית: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

גודל המהירות (Speed): $|\vec{v}| = \frac{dS}{dt}$, כאשר S זה הדרך.

משוואת מסלול (דו מימד): $y(x)$ פונקציה מהצורה.
סרטוט של הפונקציה הוא המסלול של הגוף במישור. ניתן למצוא את המשוואה באמצעות בידוד משתנה הזמן מהפונקציה $x(t)$ והצבה ב $y(t)$.

תנועה יחסית (טרנס' גלילי) GOOL

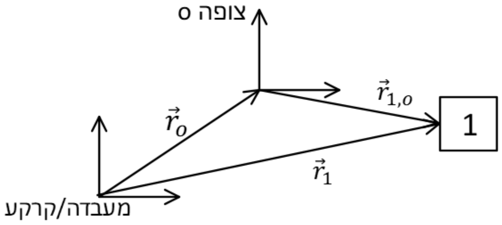
המיקום, המהירות והתאוצה של גוף 1 ביחס לגוף 2:

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \;;\; \vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \;;\; \vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

הנוסחה וקטורית אבל אפשר להשתמש לכל ציר בנפרד.

שיטה שניה -שימוש בתרשים וקטורים:

1. נצייר ראשית ונשרטט את הוקטורים $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_o$ יוצאים מהראשית לפי האינפורמציה הנתונה בתרגיל (הגודל והכיוון שלהם).
2. נצייר ראשית צירים של הצופה בקצה הוקטור $\vec{r}_o$.
3. נשרטט את הוקטור $\vec{r}_{1,o}$ מהראשית של הצופה לפי הנתונים בתרגיל וכך שהראש שלו נפגש עם הראש של הוקטור $\vec{r}_1$.
4. נעשה טריגו ונמצא את נתוני הוקטורים החסרים.



משפט הקוסינוס (לכל סוגי המשולשים):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma)$$

γ – הזווית מול הצלע c (יכולה להיות כל צלע במשולש).

משפט הסינוס (לכל סוגי המשולשים):

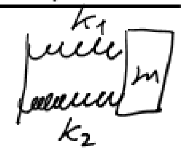
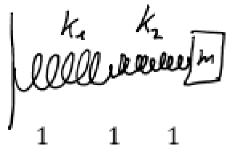
$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$

γ הזווית מול הצלע c, β הזווית מול b, α הזווית מול a

קפיצים GOOL

חוק הוק – הכוח של קפיץ: $\boldsymbol{F = -k(x - x_0)}$

כאשר x הוא מיקום הגוף ו- x_0 המיקום שבו הקפיץ רפוי.

חיבור במקביל	חיבור בטור
	
$k_{eff}=k_1+k_2$	$\frac{1}{k_{eff}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$

תנועה הרמונית פשוטה GOOL

משוואת התנועה: $-k(x-x_0)=m\ddot{x}$

k ו- m הם קבועים **חיוביים** כלשהם.

x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.

$\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני k.

פתרון המשוואה: $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+x_0$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma\vec{F}=0$.

A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משיווי המשקל.

ω - תדירות זוויתית $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$.

φ - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$

φ, A מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{max}=\omega A$

האנרגיה: $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2=\frac{1}{2}mA^2$

- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקס' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.

תנועה הרמונית מרוסנת GOOL

בנוסף לכוח הקפיץ נוסף כוח מרסן מהצורה: $F=-\lambda v$

v – מהירות הגוף ו- λ קבוע.

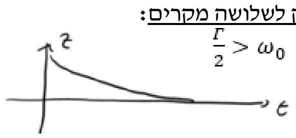
משוואת התנועה: $\ddot{z}+\Gamma\dot{z}+\omega_0^2 z=0$

כאשר $z=x-x_0\ ,\ \Gamma=\frac{\lambda}{m},\omega_0^2=\frac{k}{m}$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2}>\omega_0$

אין תנודות

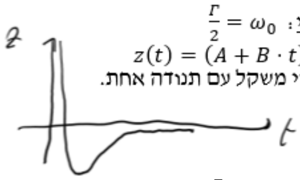


$$z(t)=e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}+Be^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}\right)$$

מקרה (II) - ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2}=\omega_0$

$$z(t)=(A+B\cdot t)\cdot e^{-\omega_0\cdot t}$$

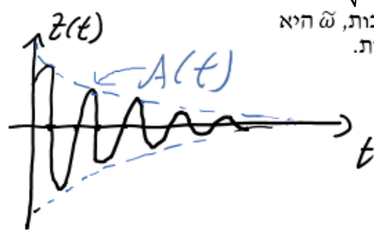
דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.



מקרה (III) - ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2}<\omega_0$

$$z(t)=Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi)\ ;\ \tilde{\omega}=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.



תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת GOOL

בנוסף לכוח הקפיץ והמרסן נוסף כוח מאלץ מהצורה:

$\vec{F}(t)=F_0\sin(\Omega t)$

Ω ו- F_0 קבועים כלשהם

משוואת התנועה: $\ddot{z}+\Gamma\dot{z}+\omega_0^2 z=\frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$

פתרון משואת התנועה:

$$x(t)=A(\Omega)\sin(\Omega t+\phi)+x_{\text{הומוגני}}(t)$$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...

- במצב עמיד (לאחר זמן רב) נזניח את הפתרון ההומוגני.

$$A(\Omega)=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{({\omega_0}^2-\Omega^2)^2+\Gamma^2\Omega^2}}$$

$$\sin(\phi)=\frac{\Gamma\,\Omega}{\sqrt{({\omega_0}^2-\Omega^2)^2+\Gamma^2\Omega^2}}$$

תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי. ניתן למצא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω. אם $\omega_0 \gg \Gamma$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות התנועה ההרמונית ללא כוח מאלץ ומרסן)

כוח גרר וכוח ציפה GOOL

כוח גרר הוא כוח מהצורה: $\vec{F}=-k\vec{v}$

כאשר $\vec{v}$ היא מהירות הגוף ו- k הוא קבוע כלשהו.

משוואת תנועה - משוואה הכוללת את x, v ו- a. בדרך מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.

מהירות סופית - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)

כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על **כדור** בתוך נוזל:

$\vec{F}_v=-6\pi\eta R\vec{v}$ η - צמיגות הנוזל, R - רדיוס הכדור

כוח ציפה: פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד.

$F_b=\rho_l Vg$

כאשר ρ_l היא צפיפות הנוזל ו- V הוא נפח **הגוף**.

עבודה ואנרגיה GOOL

עבודה של כוח קבוע:

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=\left|\vec{F}\right|\cdot|\Delta\vec{r}|\cdot\cos\alpha=F_x\Delta x+F_y\Delta y+F_z\Delta z$$

כאשר α היא הזווית בין הכוח להעתק.

- העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.
- אם הגוף לא זז אז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).

הקשר בין העבודה הכוללת לאנרגיה קינטית:

$W_{\Sigma F}=\Delta E_k$ העבודה של **כל הכוחות** שפועלים על הגוף

$E_k=\frac{1}{2}mv^2$ אנרגיה קינטית

כוח משמר:

- **העבודה שמבצע כוח משמר אינה תלויה במסלול**, היא תלויה רק בנקודת ההתחלה והסיום של התנועה.
- העבודה במסלול סגור מתאפסת.
- יש לו אנרגיה פוטנציאלית כך ש: $W_c=-\Delta U$

האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית: $U_g=mgh$

האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית: $U_{el}=\frac{1}{2}kx^2$

כאשר x ההתארכות הקפיץ ממצב רפוי ו- k קבוע הקפיץ.

- חוץ מ- U_g ו- U_{el} יכולים להיות עוד כוחות משמרים ועבורם יהיו עוד אנרגיות פוטנציאליות

אנרגיה (מכאנית) כללית: $E=E_k+U$

U - סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בבעיה.

משפט עבודה אנרגיה: $E_i+W_{NC}=E_F$

W_{NC} העבודה של כל הכוחות הלא משמרים

חוק שימור האנרגיה:

אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת

איך בודקים אם כוח הוא משמר:

אם ורק אם $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$, אז הכוח משמר.

נוסחת הרוטור בפרק וקטורים.

הערה: צריך שכל רכיב יתאפס בנפרד.

נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר: $\Sigma\vec{F}=0$ או $\frac{\partial U}{\partial x}=0$

שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתזוזה קטנה): $U_x''>0$

שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתזוזה קטנה): $U_x''<0$

שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה

- אם יש כמה ממדים אז $\vec{\nabla}U=0$

שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס

שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס

אוכף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס

הספק ונצילות GOOL

הספק ממוצע: $P_{avg}=\frac{W}{\Delta t}$

הספק רגעי: $P=\frac{dW}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}=\left|\vec{F}\right||\vec{v}|cos\alpha$

$\vec{F}$ - הכוח שפועל על הגוף ו- $\vec{v}$ היא מהירות הגוף.

נצילות: $\eta=\frac{W_{out}}{E_{in}}=\frac{P_{out}}{P_{in}}$

כאשר out מציין את החלק המנוצל על ידי המערכת ו- in מציין את כל מה שמושקע.

מתקף ותנע GOOL

התנע של גוף: $\vec{p}=m\vec{v}$

הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון: $\sum\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$

המתקף של כוח: $\vec{J}=\int\vec{F}\,dt$

המתקף הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות **בזמן** (לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות **במיקום**).

המתקף הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:

$\vec{J}_{\Sigma\vec{F}}=\Delta\vec{p}$

חוק שימור התנע: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.

הנוסחה משימור תנע: $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2$

בד"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.

התנגשות אלסטית: יש גם שימור אנרגיה ונוסיף למשוואת התנע את המשוואה: $m_1v_1^2+m_2v_2^2=m_1u_1^2+m_2u_2^2$

אם ההתנגשות חזיתית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרשום: $v_1+u_1=v_2+u_2$

התנגשות אלסטית לא חזיתית בין שני גופים בעלי מסות שוות ואחד הגופים במנוחה לפני ההתנגשות: הזווית בין המהירויות אחרי ההתנגשות תהיה 90 מעלות.

התנגשות פלסטית (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות): $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_1)u$

בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה.

התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להזניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.

מקדם תקומה: $e=\frac{u_2-u_1}{v_1-v_2}$

בין 0 ל 1, ככל שיותר גבוה יותר אנרגיה נשמרת אך לא ניתן לדעת כמה. שווה 1 באלסטית ו- 0 בפלסטית.

התנגשויות ללא שימור תנע: אם בפגיעה הנורמל גדול מאוד אז לא נזניח אותו ונחשב את המתקף שלו והשינוי בתנע של המערכת כתוצאה ממנו. בנוסף גם החיכוך הקינטי יכול להיות מאוד גדול בעקבות הנורמל ונתחשב גם בו.

תנועה מעגלית (ברדיוס קבוע) GOOL

הדרך בתנועה מעגלית: $S=\Delta\theta\cdot R$

- הדרך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל. $\Delta\theta$ היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!

גודל המהירות הקווית הרגעית (speed): $v(t)=\frac{dS}{dt}$

-כיוון המהירות תמיד משיק למעגל

מהירות זוויתית: $\omega=\frac{d\theta}{dt}=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$

f- התדירות, T - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)

קשר בין המהירות הקווית לזוויתית: $v=\omega R$

תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל): $a_r=\frac{v^2}{R}=\omega^2R$

הכוחות למרכז המעגל: $\Sigma F_{\text{למרכז המעגל}}=m\frac{v^2}{R}=m\omega^2R$

תאוצה זוויתית: $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$

תאוצה משיקית(רק בתנועה לא קצובה): $a_\theta=\frac{d|\vec{v}|}{dt}=\alpha R$

הגובה במעגל אנכי: $h=R(1-\cos\theta)$

- כאשר h ו- θ נמדדים מתחתית המעגל.

הכוח הצנטריפוגלי: $F_r=m\omega^2R$

- בכיוון החוצה מהמעגל.
- שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת הסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

וקטור המיקום: $\vec{r}=R\cos\theta\,\hat{x}+R\sin\theta\,\hat{y}$

הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית: $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית:

$$\vec{a}_\theta=\vec{\alpha}\times\vec{r}$$

מרכז מסה GOOL

מיקום מרכז המסה: $\vec{r}_{c.m.}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$

ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x:

$$x_{c.m.}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

מהירות מרכז המסה: $\vec{v}_{c.m.}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$

תאוצת מרכז המסה: $\vec{a}_{c.m.}=\frac{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2}$

עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממשיכה בהתאמה.

מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים): עושים מרכז מסה בין מרכזי המסה.

גוף עם חור: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מרכז מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.

תאוצת מרכז המסה תלויה רק בכוחות החיצוניים:

$\Sigma F_{ext}=ma_{c.m}$

אם אין כוחות חיצוניים (ומרכז המסה במנוחה בהתחלה) אז מיקום מרכז המסה נשמר. ניתן לעשות "שימור מרכז מסה"- לחשב אותו בהתחלה ובסוף ולהשוות.

בשביל למצוא מרכז מסה של גוף גדול נשתמש באינטגרל:

$$x_{c.m}=\int xdm$$

כנ"ל לגבי y ו- z, לחישוב dm הסתכלו במבוא המתמטי.

מערכת מרכז המסה:

התנע הכולל של מערכת: $\vec{p}_T=M\vec{v}_{c.m.}$

ניתן להסתכל על מערכת גופים כגוף נקודתי שמסתו היא סכום המסות ומהירותו היא מהירות מרכז המסה.

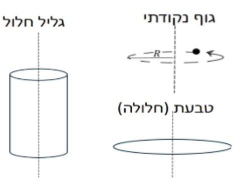
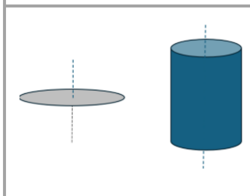
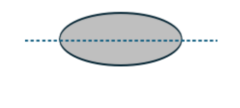
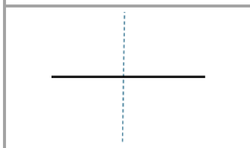
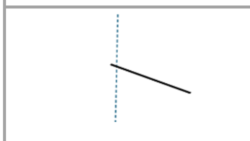
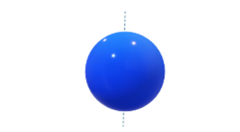
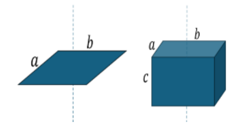
מערכת מרכז המסה היא מערכת שזזה ביחד עם נקודת מרכז המסה.
בשביל למצוא את מהירות הגופים במערכת מרכז המסה נשתמש בטרנספורמציית גליליי.
במערכת מרכז המסה **התנע הכולל של המערכת הוא אפס** ולכן, במקרה של שני גופים, הגופים תמיד ינועו על ציר אחד.
אם ההתנגשות אלסטית, **גודל המהירות של כל גוף נשמר.**

בעיית שני הגופים-מסות מצומצמות GOOL

נוסחאות המעבר למשתנים:
$\vec r_{c.m.} = \frac{m_1\vec r_1+m_2\vec r_2}{m_1+m_2}$; $\vec r_{rel} = \vec r_2 - \vec r_1$
מעבר הפוך: $\vec r_1 = \vec r_{c.m.} - \frac{m_2 \vec r_{rel}}{m_1+m_2}$; $\vec r_2 = \vec r_{c.m.} + \frac{m_1\vec r_{rel}}{m_1+m_2}$
האנרגיה: $E=\frac12(m_1+m_2)v_{c.m}^2+\frac12\mu v_{rel}^2+U(r_{rel})$
כאשר $\mu=\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}$ היא המסה המצומצמת
תנ"ז:
$\vec L = \vec r_{c.m.}\times\vec p_{c.m.} + \vec L_{c.m.}$; $\vec L_{c.m.} = \mu \vec r_{rel}\times \vec v_{rel}$

מומנט התמד GOOL

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב **כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית** (אך לא באותה מהירות קווית)
מומנט התמד של מערכת גופים נקודתיים: $I=\Sigma m_i r_i^2$
משפט שטיינר: $I' = I_{c.m.}+md^2$
כאשר d הוא המרחק בין הצירים ו m היא המסה הכוללת של הגוף. הערה: משפט שטיינר פועל רק **לצירים מקבילים**, ורק כאשר אחד הצירים עובר **במרכז המסה**.
אדטיביות: ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל. $I_T = I_1+I_2$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו: $I=mR^2$ טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי: $I_{c.m.}=mR^2$	
דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z -אנך לדיסקה $I_{c.m.}=\frac12 mR^2$	
דיסקה במרכז מסה סביב ציר x -במישור הדיסקה $I_{c.m.}=\frac14 mR^2$	
מוט במרכז המסה $I_{c.m.}=\frac1{12}mL^2$	
מוט בקצה $I=\frac13 mL^2$	
כדור מלא במרכז מסה $I_{c.m.}=\frac25 mR^2$	
תיבה או לוח במרכז מסה $I_{c.m.}=\frac{m(a^2+b^2)}{12}$	

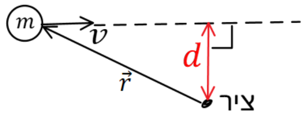
נוסחה המקשרת בין צירים שונים: $I_z = I_x+I_y$
אם $I_x=I_y$ (בדר"כ מסימטריה) אז $I_z=2I_x$
מבנה הגוף **סימטרי לאורך ציר Z** : מומנט ההתמד של הגוף סביב ציר Z יהיה כמו של גוף משטחי במישור xy. לדוגמה מומנט ההתמד של גליל יהיה כמו של דיסקה ומומנט ההתמד של קוביה יהיה כמו של מלבן שהוא בסיס הקוביה.
חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח: $I=\int r^2\,dm$
כאשר r הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית). אם ציר הסיבוב הוא ציר z: $r^2=x^2+y^2$

מומנט כוח GOOL

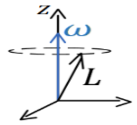
מומנט כוח: $\vec\tau = \vec r\times\vec F$
כאשר $\vec r$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)
גודל המומנט: $|\vec\tau| = |\vec r||\vec F|\sin\alpha = |\vec F| r_\perp$
כאשר $r_\perp$ הוא הרכיב של $\vec r$ המאונך לכוח
כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

תנע זוויתי (תנ"ז) GOOL

תנ"ז: $\vec L = \vec r\times\vec p$
$\vec r$ - הוא וקטור המיקום של הגוף, $\vec p$ - התנע הקווי
עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי:
$|\vec L| = mvd$
כאשר d זה המרחק האפקטיבי.
v – המהירות.



הקשר בין תנ"ז למומנט כוח: $\sum\vec\tau = \frac{d\vec L}{dt}$
חוק שימור התנע הזוויתי:
אם $\sum\vec\tau_{ext}=0$ אז התנע הזוויתי נשמר
תנ"ז של תנועה משולבת, מערכת גופים שמסתובבים סביב מרכז מסה שנע: $\vec L = \vec r_{c.m.}\times \vec p_{c.m.}+\vec L_{c.m.}$
כאשר $\vec r_{c.m.}\times\vec p_{c.m.}$ זה התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת ו- $\vec L_{c.m.}$ התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר סך התנ"ז של הגופים במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.
פרסציה (נקיפה):
לתנע הזוויתי יש רכיב במישור xy שמסתובב סביב ציר z. נגזרת בזמן של הרכיב הזה נותנת לנו את מומנט הכוח שפועל על המערכת.



גוף קשיח GOOL

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב **כל נקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה מהירות הזוויתית** (אך לא באותה מהירות קווית)
תנע קווי של **גוף קשיח**: $\vec p = M\vec v_{c.m.}$
תנ"ז :
- גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית): $\vec L = \vec r_{c.m.}\times\vec p_{c.m.}$
- תנ"ז של גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע: $\vec L = I\vec\omega$
כאשר I מומנט ההתמד ביחס לציר
- תנ"ז של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב מרכז המסה): $\vec L = \vec r_{c.m.}\times\vec p_{c.m.}+\vec L_{c.m.}$
כאשר $\vec L_{c.m.}$ הוא התנ"ז ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל- $\vec L_{c.m.} = I_{c.m.}\vec\omega$

אנרגיה קינטית סיבובית:
- סביב ציר **קבוע** כלשהו: $E_k = \frac12 I\omega^2$
- תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה): $E_k=\frac12 mv_{c.m.}^2+\frac12 I_{c.m.}\omega^2$
- תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (*): $E_k=\frac12 mv_0^2+\frac12 I_0\omega^2+m\vec r_{c.m.,o}\cdot(\vec v_0\times\vec\omega)$
כאשר I_0 מומנט ההתמד ביחס לציר, $\vec v_0$ היא מהירות הציר ו- $\vec r_{c.m.,o}$ הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר.
(*)השימוש בנוסחה מאוד נדיר

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

תנועה סיבובית	תנועה בקו ישר
θ	x
$\omega=\dot\theta$	$v=\dot x$
$\alpha=\dot\omega=\ddot\theta$	$a=\dot v=\ddot x$
I	m
L	p
τ	F

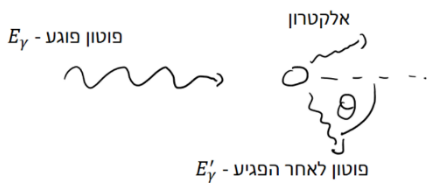
גלגול ללא החלקה: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח מתאפסת (ביחס למשטח)← $v_{c.m.}=\omega R$; $a_{c.m.}=\alpha R$
- בגלג"ה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.

איך נגשים לשאלות?

חוקי שימור
בודקים מה נשמר:
1. אנרגיה אם כל הכוחות משמרים.
2. תנע קווי אם סכום הכוחות החיצוניים מתאפס.
3. תנ"ז אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס.

דרך כוחות ומומנטים
עושים:
1. חוק II: $\Sigma F = ma_{c.m}$
2. משוואת מומנטים: $\Sigma\tau = I\alpha$
3. קשר בין התאוצות, לדוגמה $a_{c.m}=\alpha R$

תנע ואנרגיה יחסותיים: $\vec p = \gamma m\vec v$; $E=\gamma mc^2$
- הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ולא למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות.
נוסחאות נוספות:
$E^2 = |p|^2c^2+m^2c^4$; $|p|=\sqrt{\gamma^2-1}\cdot mc$
אנרגיית מנוחה: $E_0=mc^2$
אנרגיה קינטית: $E_k = E-E_0 = mc^2(\gamma-1)$
עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, ניוטרינו) והאנרגיה הקינטית היא: $E=|p|c=\mathrm{h}\nu$
ν היא התדירות ו- $\mathrm{h}=6.626\cdot10^{-34}j\cdot s$ קבוע פלאנק
טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:
$E' = \gamma_0(E-v_0p_x)$; $p_x' = \gamma_0(p_x - v_0E/c^2)$
$p_y' = p_y$; $p_z'=p_z$
וקטור תנע אנרגיה: $\left(p_x,p_y,p_z,\frac Ec\right)$
"גודל הוקטור"(מינוס באנרגיה) זהה בכל מערכות הייחוס:
$$p_x^2+p_y^2+p_z^2-\left(\frac Ec\right)^2 = const$$
- הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.
- עבור גוף יחיד הקבוע הוא: m^2c^2.
פיזור קומפטון:
פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



$$\frac1{E_\gamma'} - \frac1{E_\gamma} = \frac1{m_ec^2}(1-\cos\theta)$$
E_γ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה
E_γ' - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה
m_e - מסת אלקטרון
θ - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.
יחידת האלקטרון וולט: $1\ eV = 1.60\times10^{-19}J$
המרת מסת הגופים לאנרגיה:
$m_e| \approx 8.19\times10^{-14}J(\approx 511keV)$
$m_p| \approx 1.50\times10^{-10}J(\approx 938MeV))$
$m_{Uranium}\approx 3.55\times10^{-8}J(\approx 225GeV)$
- ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ $\frac{eV}{c}$ כלומר הכמות (המספר) זהה רק ביחידות נחלק ב c.

יחסות פרטית GOOL

תיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות (אינרציאליות).

עקרונות יסוד בתורת היחסות:
- חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.
- האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.
- מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.
- אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור בוואקום. מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.
- הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם: x, y, z) שעוברת טרנספורמציה.

פקטור גאמא: $\gamma_0 = \frac1{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac1{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta=\frac{v_0}{c}$
γ_0 תמיד גדולה מ 1
טרנספורמציית לורנץ למיקום והזמן:
$x' = \gamma_0(x-v_0t)$; $y'=y$; $z'=z$
$t' = \gamma_0\left(t-\frac{v_0x}{c^2}\right)$; $\beta=\frac{v_0}{c}$; $\gamma_0 = \frac1{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac1{\sqrt{1-\beta^2}}$
טרנספורמציה הפוכה:

$$x = \gamma_o\left(x' + v_o t'\right)\ ;\ y' = y\ ;\ z' = z$$

$$t = \gamma_o\left(t' + \frac{v_o x'}{c^2}\right)$$

- הצירים של המערכות **חייבים** להיות מקבילים.

- בזמן $t = t' = 0$ **חייבים** שהראשיות מתלכדות.

<u>המערכת העצמית</u>:

מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

- זמן עצמי τ מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

- אורך עצמי l_0 האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

<u>התכווצות האורך</u>: שינוי האורך ממערכת המנוחה (העצמית) למערכת נעה

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$$

<u>התארכות הזמן</u>: שינוי הזמן ממערכת המנוחה (העצמית) למערכת נעה)

$$\Delta t = \gamma_0 \tau$$

<u>שינוי זווית במדידת אורך</u>:

$$\tan\theta = \gamma_0 \tan\theta'$$

θ' - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת העצמית

θ - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת אחרת.

<u>**אפקט דופלר היחסותי:**</u>

זמן המחזור של הגל:

$$T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tau$$

אורך הגל:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\lambda'$$

תדירות הגל:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,f'$$

τ, f', λ' - הזמן, התדירות ואורך הגל במערכת העצמית

<u>טרנספורמציית לורנץ למהירויות</u>:

$$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$$

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}\ ;\ v_z' = \frac{v_z}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

<u>**אברציה - שינוי זווית המהירות:**</u>

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma_0\left(\cos\theta - \frac{v_0}{c}\right)}$$

שימו לב שפה השינוי הוא בזווית של וקטור המהירות (כיוון התנועה) ולא שינוי זווית של הגוף כמו למעלה.