

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$$

בכדוריות (*):

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\theta) \right) \right) \hat{\varphi}$$

(*) שימו לב שהזווית φ עם ציר ה-z והזווית θ עם ציר ה-x
תנועה בקו ישר (מימד אחד)

מהירות רגעית:
 $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
מהירות ממוצעת:
 $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

תאוצה רגעית:
 $a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$
תאוצה ממוצעת:
 $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

קשרים הפוכים:
 $x(t) = \int v(t) dt$

$v(t) = \int a(t) dt$
את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות).
מיקום ומהירות כתלות בזמן **בתאוצה קבועה בלבד**:

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$; $v(t) = v_0 + at$
שטחים מתחת לגרף הפונקציה (גם בתאוצה משתנה):
השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות כתלות בזמן שווה להעתק, כאשר שטח מתח לציר הזמן מחושב כשלילי (אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרך).
השטח מתחת לגרף של התאוצה כתלות בזמן שווה לשינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי).

תנועה במרחב (דו ותלת מימד):

וקטור המיקום:
 $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
וקטור ההעתק:
 $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

וקטור המהירות הממוצעת (velocity):
 $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

וקטור המהירות הרגעית (velocity):
 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
וקטור המהירות הרגעית תמיד בכיוון משיק למסלול

וקטור התאוצה הממוצעת:
 $\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

וקטור התאוצה הרגעית:
 $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

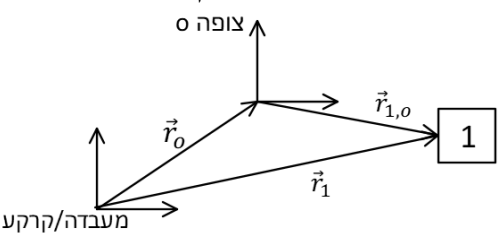
גודל המהירות ($Speed$): $|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$, כאשר S זה הדרך.

תנועה יחסית (טרנס' גליליי)

המיקום, המהירות והתאוצה של גוף 1 ביחס לגוף 2:

$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$; $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$; $\vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$
הנוסחה וקטורית אבל אפשר להשתמש לכל ציר בנפרד.
שיטה שניה - שימוש בתרשים וקטורים:

- נצייר ראשית ונשרטט את הוקטורים $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_0$ יוצאים מהראשית לפי האינפורמציה הנתונה בתרגיל (הגודל והכיוון שלהם).
- נצייר ראשית צירים של הצופה בקצה הוקטור $\vec{r}_0$.
- נשרטט את הוקטור $\vec{r}_{1,0}$ מהראשית של הצופה לפי הנתונים בתרגיל וכך שהראש שלו נפגש עם הראש של הוקטור $\vec{r}_1$.
- נעשה טריגו ונמצא את נתוני הוקטורים החסרים.



משפט הקוסינוס (לכל סוגי המשולשים):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

γ - הזווית מול הצלע c (יכולה להיות כל צלע במשולש).

משפט הסינוסים (לכל סוגי המשולשים):

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

γ הזווית מול הצלע c , β הזווית מול b , α הזווית מול a

קפיצים

חוק הוק - הכוח של קפיץ:
 $F = -k(x - x_0)$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x ; \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$
אינטגרל היא פעולה הפוכה לגזרת, מבצע סכימה על ערכי הפונקציה ונותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה. אינטגרל לא מסוים - מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל. אינטגרל מסוים - מצביים בגבולות בתוצאה של האינטגרל:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

וקטורים

פירוק לרכיבים:

$A_x = |\vec{A}| \cos \theta$
 $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$
 $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

כפל בסקלר: $\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$
מכפלה סקלרית: שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

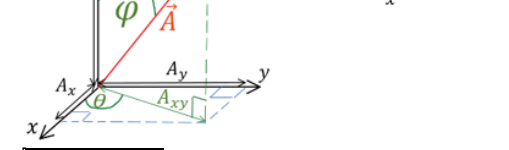
α - זווית בין הוקטורים.
תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת, זו דרך לבדוק **האם וקטורים מאונכים**.
פתיחת סוגרים והעלאה ברביע:

$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
 $(\vec{A} + \vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$

זווית בין שני וקטורים:
 $\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$

וקטור יחידה:
 $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

וקטור בשלושה מימדים:
 $0 \leq \varphi \leq \pi$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$



$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$; $\cos \varphi = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$

פירוק לרכיבים: $A_{xy} = |\vec{A}| \sin \varphi$; $A_z = |\vec{A}| \cos \varphi$

$A_x = |\vec{A}| \sin \varphi \cos \theta$; $A_y = |\vec{A}| \sin \varphi \sin \theta$

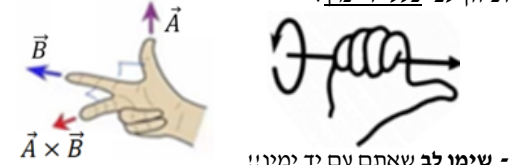
מכפלה וקטורית:

ד-ד-1 לעשות את המכפלה עם דטרמיננטה:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ד-ד-2 לפי גודל וכיוון בנפרד:

$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha$
גודל המכפלה הוא:
וכיוון לפי כלל יד ימין:



שימו לב שאתם עם יד ימין!!
בתמונה השמאלית, קודם לעשות אקדח ואחר"כ לפתוח את האמה!

גרדיאנט בקרטזיות:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

גרדיאנט בגליליות:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

בכדוריות (*):

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

רטור (Rot/Curl) בקרטזיות:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

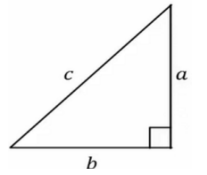
בגליליות:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} +$$

מבוא מתמטי

GOOL

ניצב שמול יתר
 $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
ניצב ליד יתר
 $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
ניצב שמול ליד ניצב
 $\tan \alpha = \frac{a}{b}$
ניצב ליד
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan \alpha}$
 $a^2 + b^2 = c^2$



$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$90^\circ - \alpha$
$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$; $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$	
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$90^\circ + \alpha$
$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$; $\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$	
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$180^\circ - \alpha$
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$-\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$	2α
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$	$\alpha \pm \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	

סכום והפרש של פונקציות:

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

פתרון משוואות טריגונומטריות:

$x_1 = \alpha + 2\pi k$	$\sin x = \sin \alpha$
$x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$	
$x_1 = \alpha + 2\pi k$	$\cos x = \cos \alpha$
$x_2 = -\alpha + 2\pi k$	
$x = \alpha + \pi k$	$\tan x = \tan \alpha$

קואורדינטות גליליות: (r, θ, z)

$x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$
 $z = z$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$dl = dr/r d\theta$ (טבעת) / dz
 $ds = r dr d\theta$ (דיסקה) / $rd\theta dz$ (קליפה גלילית דקה) / $dr dz$ (גליל מלא או קליפה גלילית עבה) / $dv = r d\theta dr dz$

קואורדינטות כדוריות: (r, θ, φ)

$z = r \cos \varphi$
 $x = r \sin \varphi \cos \theta$
 $y = r \sin \varphi \sin \theta$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$dl = dr/r \sin \varphi d\theta / r d\varphi$

$ds = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ (מעטפת כדור)

$dv = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr$ (קליפה כדורית עבה)

צפיפות נפחית/משטחית/אורכית:

$\rho = \frac{M}{V}$; $\sigma = \frac{M}{S}$; $\lambda = \frac{M}{l}$

V, S, l הם נפח, שטח ואורך הגוף.

אלמנט מסה אינפיניטסימלי אורכי/משטחי/נפחי:

$dm = \lambda dl / \sigma ds / \rho dv$

$dl/ds/dv$ - ראו קואורדינטות

נגזרות ואינטגרליים:

נגזרת של מכפלה:

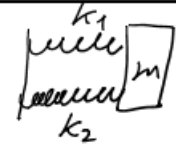
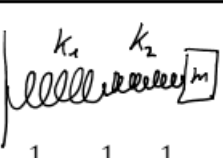
$y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

כלל שרשרת: אם y היא פונקציה של x ו- x הוא

פונקציה של t אז:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$
 $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2}$; $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$: **נגזרות נוספות:**

כאשר x הוא מיקום הגוף ו- x_0 המיקום שבו הקפיץ רפוי.

חיבור במקביל	חיבור בטור
 $k_{eff} = k_1 + k_2$	 $\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

הכוח הצנטריפוגלי:
- בכיוון החוצה מהמעגל.

- שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרג הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת הסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

כוחות מדומים
כוח מדומה מוסיפים רק כאשר **הצופה** נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אין כוחות מדומים ולא תלוי בתנועת הגוף. החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה:

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{a}_0$$

אם $\vec{a}$ היא תאוצת הגוף **ביחס לצופה**.

אמיתיים $\vec{F}$ הם כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.

" $m\vec{a}_0$ " - הוא הכוח המדומה כאשר m היא מסת הגוף הנמדד ו- $\vec{a}_0$ היא תאוצת **הצופה**.

כוח ציפה: פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד.

$$F_b = \rho_l V g$$

כאשר ρ_l היא צפיפות הנוזל ו- V הוא נפח הגוף.

כוח גרר וכוח ציפה

כוח גרר הוא כוח מהצורה:
 $\vec{F} = -k\vec{v}$
כאשר $\vec{v}$ היא מהירות הגוף ו- k הוא קבוע כלשהו.
משוואת תנועה - משוואה הכוללת את x , v ו- a . בדרכ מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.
מהירות סופית - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)
כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על **גוף כדור** בתוך נוזל:

$$\vec{F}_v = -6\pi\eta R \vec{v}$$

η - צמיגות הנוזל, R - רדיוס הכדור

נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר $\vec{F} = 0$ או $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$
שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתווזה קטנה): $U''_x > 0$
שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתווזה קטנה): $U''_x < 0$
שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה

- אם יש כמה ממדים אז $\vec{\nabla} U = 0$
שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס
שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס
אוכף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס
העבודה של כוח לא קבוע:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

בשביל הנוסחה צריך גם משוואה של המסלול.
דוגמה בדו-מימד: נתון $x^5 = y(x)$, באמצעות המשוואה עוברים למשתנה אחד. בדוגמה, נציב באינטגרל במקום y את x^5 ו- dx נגזרת $dy = 5x^4 dx$.
הגבולות של המשתנה אליו עברנו (בדוגמה גבולות של x)

הספק ונצילות

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos \alpha$$

$\vec{F}$ - הכוח שפועל על הגוף ו- $\vec{v}$ היא מהירות הגוף.

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{W_{out}}{E_{in}}$$

כאשר out מצייין את החלק המנוצל על ידי המערכת ו- in מצייין את כל מה שמושקע.

מתקף ותנע

המתקף שמפעיל כוח קבוע או ממוצע על גוף:
 $\vec{J} = \vec{F} \cdot \Delta t$
התנגשות אלסטית: התנגשות שבה האנרגיה הקינטית נשמרת. נוסף למשוואת שימור התנע את משוואת שימור האנרגיה:
 $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$
התנגשות אלסטית במימד אחד (מצחית) בלבד, ניתן להחליף את משוואת שימור האנרגיה במשוואה הבאה:

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$$

התנגשות פלסטית: הגופים נעים יחד אחרי ההתנגשות. משוואת שימור התנע הופכת ל-
 $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}$

- $\vec{u}$ היא המהירות המשותפת לאחר ההתנגשות.
רע: הגופים נעים יחד לפני ההתנגשות.
משוואת שימור התנע הופכת ל-
 $(m_1 + m_2) \vec{v} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$

התנגשות פלסטית ורתע הן אף פעם לא התנגשויות אלסטיות! כלומר לא יכול להתקיים שימור אנרגיה בהתנגשויות האלו.
- שימו לב שקיימות התנגשויות שהן לא אלסטיות ולא פלסטיות (סתם התנגשויות) בהן יש רק את משוואת שימור התנע הרגילה.
- הערה: בספרים מסוימים השם התנגשות אלסטית מתייחס להתנגשות רגילה שהיא לא פלסטית ואין בה שימור אנרגיה. להתנגשות שיש בה גם שימור אנרגיה קוראים **התנגשות אלסטית לחלוטין**.

התנגשות אלסטית מצחית (במימד אחד) **בין מסות שוות**
שאחד הגופים במנוחה: במקרה זה כל האנרגיה עוברת מהגוף הפועל לגוף במנוחה. כלומר הגוף הפועל ייעצר והגוף שהיה במנוחה ינעו לאחר ההתנגשות במהירות שבו פגע בו הגוף הראשון.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.

התנגשויות ללא שימור תנע: אם בפגיעה הנורמל גדול מאוד אז לא נזיח אותו ונחשב את המתקף שלו והשינוי בתנע של המערכת כתוצאה מכך. בנוסף גם החיכוך הקינטי יכול להיות מאוד גדול בעקבות הנורמל ונחשב גם בו.

מסה משתנה

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

הנוסחה $\vec{F} = m\vec{a}$ לא נכונה עבור גוף שהמסה שלו משתנה. נעבור לניסוח הכללי יותר של חוק שני:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

נוסחה כללית לתנועה גופים שפולטים מסה:
$$\sum \vec{F}_{ext} = M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt}$$

כאשר $\frac{dm}{dt}$ הוא קצב הפליטה (חיובי) כאשר חומר יוצא מהגוף ושילי אם חומר נכנס לגוף).

$\vec{v}_{rel}$ - מהירות החומר שנפלט ביחס לגוף (אם החומר נפלט אחורה אז היא צריכה להיות שלילית)

ext - הכוונה לסכום הכוחות החיצוניים

מרכז מסה

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

מיקום מרכז המסה:
ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x :

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

מהירות מרכז המסה:
$$\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

תאוצת מרכז המסה:
$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממשיכה להתאמה. **מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים):** עושים מרכז מסה בין מרכזי המסה.

גוף עם חור: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מרכז מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.

תאוצת מרכז המסה תלויה רק בכוחות החיצוניים:

$$\vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{c.m.}$$

אם אין כוחות חיצוניים (ומרכז המסה במנוחה בהתחלה) אז מיקום מרכז המסה נשמר. ניתן לעשות "שימור מרכז מסה" לחשב אותו בהתחלה ובסוף ולהשוות.

בשביל למצוא מרכז מסה של גוף גדול נשתמש באינטגרל:

$$x_{c.m.} = \int x dm$$

כ"ל לגבי y ו- z , לחישוב dm הסתכלו במבוא המתמטי.

מומנט התמד

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב **כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית** (אך לא באותה מהירות קווית)

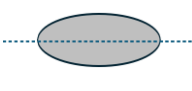
$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$I' = I_{c.m.} + m d^2$$

כאשר d הוא המרחק בין הצירים ו- m היא המסה הכוללת של הגוף. הערה: משפט שטיינר פועל רק **לצירים מקבילים**, ורק כאשר אחד הצירים עובר **במרכז המסה**.

אדטיביות: ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל.
 $I_T = I_1 + I_2$

$$I_T = I_1 + I_2$$

	דיסקה במרכז מסה סביב ציר x -במישור הדיסקה $I_{c.m.} = \frac{1}{4} m R^2$
	מוט במרכז המסה $I_{c.m.} = \frac{1}{12} m L^2$
	מוט בקצה $I = \frac{1}{3} m L^2$
	כדור מלא במרכז מסה $I_{c.m.} = \frac{2}{5} m R^2$
	תיבה או לוח במרכז מסה $I_{c.m.} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$

נוסחה המקשרת בין צירים שונים:
 $I_z = I_x + I_y$
אם $I_x = I_y$ (בדור"כ מסימטריה) אז $I_z = 2I_x$

מבנה הגוף סימטרי לאורך ציר Z: מומנט ההתמד של הגוף סביב ציר Z יהיה כמו של גוף משטחי במישור xy .

לדוגמה מומנט ההתמד של גליל יהיה כמו של דיסקה ומומנט ההתמד של קוביה יהיה כמו של מלבן שהוא בסיס הקוביה.

$$I = \int r^2 dm$$

חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח:
כאשר r הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית). אם ציר הסיבוב הוא ציר z : $r^2 = x^2 + y^2$

מומנט כוח

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

מומנט כוח:
כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| r_{\perp}$$

כאשר $r_{\perp}$ הוא הרכיב של $\vec{r}$ המאונך לכוח כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

תנע זוויתי (תנ"ז)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

תנ"ז:
 $\vec{L}$ - הוא וקטור המיקום של הגוף, $\vec{p}$ - התנע הקווי
עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי:

$$|\vec{L}| = m v d$$

כאשר d זה המרחק האפקטיבי.

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

$\vec{v}$ - המהירות.
הקשר בין תנ"ז

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

למומנט כוח:
חוק שימור התנע הזוויתי:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$$

אם $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ אז התנע הזוויתי נשמר
תנ"ז של תנועה משולבת, מערכת גופים שמסתובבים סביב

$$\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$$

כאשר $\vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$ זה התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת ו- $\vec{L}_{c.m.}$ התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר סך התנ"ז של הגופים במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.

פרצסיה (נקיפה):
לתנע הזוויתי יש רכיב במישור xy שמסתובב סביב ציר z . נגזרת בזמן של הרכיב הזה נותנת לנו את מומנט הכוח שפועל על המערכת.

גוף קשיח

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב **כל נקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית** (אך לא באותה מהירות קווית)

תנע קווי של גוף קשיח:
$$\vec{p} = M \vec{v}_{c.m.}$$

תנ"ז:
גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית):
$$\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$$

תנ"ז גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע:
$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

כאשר I מומנט ההתמד ביחס לציר

- תנ"י של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב מרכז המסה):

$$\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$$
כאשר $\vec{L}_{c.m.}$ הוא התנ"י ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל- $\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.} \vec{\omega}$
אנרגיה קינטית סיבובית:
- סביב ציר קבוע כלשהו:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$
- תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה):

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} I_{c.m.} \omega^2$$
- תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (*):

$$E_k = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} I_o \omega^2 + m \vec{r}_{c.m.,o} \cdot (\vec{v}_o \times \vec{\omega})$$
כאשר I_o מומנט ההתמד ביחס לציר, $\vec{v}_o$ היא מהירות הציר ו- $\vec{r}_{c.m.,o}$ הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר.
(*) השימוש בנוסחה מאוד נדיר
טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

תנועה סיבובית	תנועה בקו ישר
θ	x
$\omega = \dot{\theta}$	$v = \dot{x}$
$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$	$a = \dot{v} = \ddot{x}$
I	m
L	p
τ	F

גלגול ללא החלקה: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח מתאפסת (ביחס למשטח) $\leftarrow a_{c.m.} = \alpha R$; $v_{c.m.} = \omega R$
- בגל"ה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.
איך נגשים לשאלות?



תנועה הרמונית פשוטה

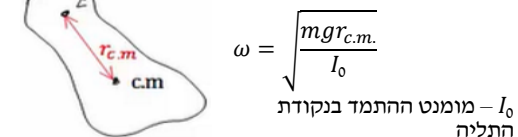
משוואת התנועה:

$$-k(x - x_0) = m\ddot{x}$$
 k ו- m הם קבועים **חיוביים** כלשהם.
 x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
 x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.
 $\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.
חייב להיות מינוס לפני k .
פתרון המשוואה:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$$
 x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma \vec{F} = 0$.
 A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משיווי המשקל.
 ω - תדירות זוויתית $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.
 φ - פאזה.
מציאת הקבועים בפתרון:
 x_0 - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$
 φ, A מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.
נוסחה למהירות המקסימאלית:

$$v_{max} = \omega A$$
מטוטלת פיזיקאלית:
גוף קשיח שתולים בנקודה כלשהי



$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$$
 I_0 - מומנט ההתמד בנקודת התליה
האנרגיה:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m A^2$$
- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.