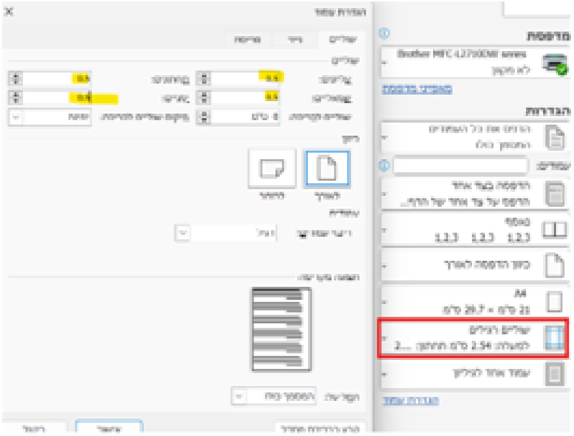
הוראות לדף הנוסחאות

הוראות הדפסה! :

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השולים, לבחור שולים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים



עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

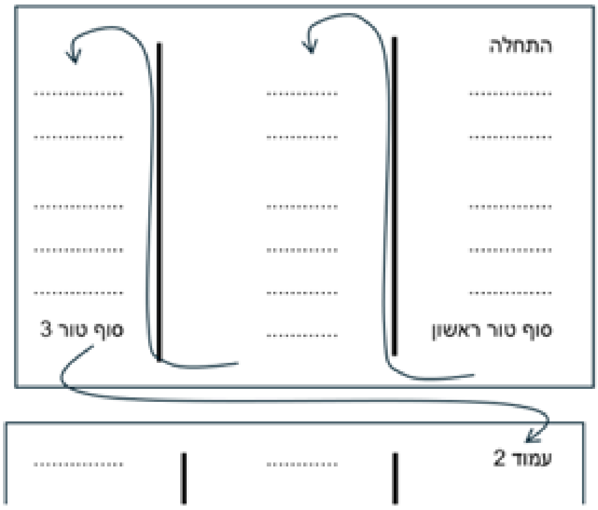
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:

הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

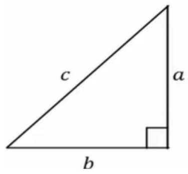


מבוא מתמטי GOOL

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{יתר}}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{ניצב ליד}}$



$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{ניצב שמול}} = \frac{1}{\tan\alpha}$

$a^2+b^2=c^2$

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$; $\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$	$90^\circ-\alpha$
$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$; $\cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$	$90^\circ+\alpha$
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$; $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$; $\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$	$180^\circ-\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$; $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$-\alpha$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$	2α
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	$\alpha\pm\beta$

סכום והפרש של פונקציות:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

פתרון משוואות טריגונומטריות:

$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=\pi-\alpha+2\pi k$	$\sin x=\sin\alpha$
$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=-\alpha+2\pi k$	$\cos x=\cos\alpha$
$x=\alpha+\pi k$	$\tan x=\tan\alpha$

נגזרות ואינטגרלים:

- נגזרת של מכפלה:

$y(x)=f(x)g(x)\rightarrow y'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

- כלל שרשרת: אם y היא פונקציה של x ו- x היא פונקציה של t אז: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

- נגזרות נוספות: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$; $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

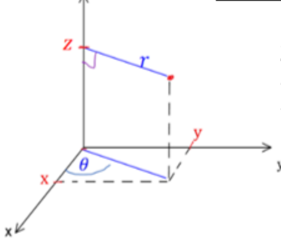
$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$; $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

$\frac{d}{dx}(\ln(x))=\frac{1}{x}$

- אינטגרל היא פעולה הפוכה לנגזרת, מבצע סכימה על ערכי הפונקציה ונותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.
אינטגרל לא מסוים- מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.
אינטגרל מסוים- מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

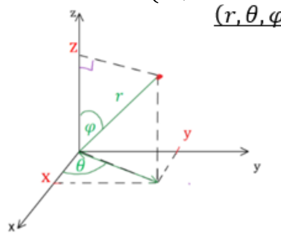
קוארדינטות גליליות: (r,θ,z)



$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
$z=z$
$r=\sqrt{x^2+y^2}$
$\tan\theta=\frac{y}{x}$

$dl=dr/rd\theta$(טבעת)$/dz$
$ds=rdrd\theta$(דיסקה)$/rd\theta dz$(קליפה גלילית דקה)$/drdz$
$dv=rd\theta drdz$(גליל מלא או קליפה גלילית עבה)

קוארדינטות כדוריות: (r,θ,φ)



$z=r\cos\varphi$
$x=r\sin\varphi\cos\theta$
$y=r\sin\varphi\sin\theta$
$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\tan\theta=\frac{y}{x}$

$\cos\varphi=\frac{z}{r}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$dl=dr/r\sin\varphi d\theta/rd\varphi$

$ds=r^2\sin\varphi d\theta d\varphi$(מעטפת כדור)

$dv=r^2\sin\varphi d\theta d\varphi dr$(כדור מלא / קליפה כדורית עבה)

צפיפות נפחית/משטחית/אורכית:

$\rho=\frac{M}{V}$; $\sigma=\frac{M}{S}$; $\lambda=\frac{M}{l}$

V,S,l הם נפח, שטח ואורך הגוף.

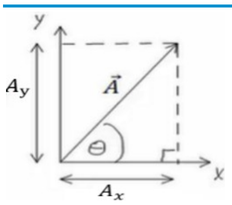
אלמנט מסה אינפיניטסימאלי אורכי/משטחי/נפחי:

$dm=\lambda dl/\sigma ds/\rho dv$

$dl/ds/dv$ – ראו קוארדינטות

וקטורים GOOL

פירוק לרכיבים:



$A_x=|\vec{A}|\cos\theta$
$A_y=|\vec{A}|\sin\theta$
$|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$
$\tan\theta=\frac{A_y}{A_x}$

כפל בסקלר: $\alpha\vec{A}=(\alpha A_x,\alpha A_y)$

מכפלה סקלרית: שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_x\cdot B_x+A_y\cdot B_y=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha$

α - זווית בין הוקטורים.
- תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
- מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת, זו דרך **לבדוק האם וקטורים מאונכים.**

פתיחת סוגרים והעלאה בריבוע:

$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

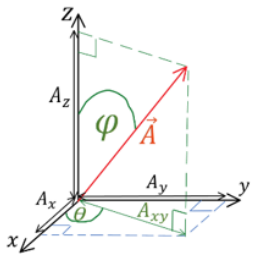
$(\vec{A}+\vec{B})^2=|\vec{A}|^2+2\vec{A}\cdot\vec{B}+|\vec{B}|^2$

זווית בין שני וקטורים: $\cos\alpha=\frac{A_xB_x+A_yB_y}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$

וקטור יחידה: $\hat{A}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

וקטור בשלושה מימדים:

$0\le\varphi\le\pi$
$0\le\theta\le 2\pi$
$\tan\theta=\frac{A_y}{A_x}$



$\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$; $\cos\varphi=\frac{A_z}{|\vec{A}|}=\frac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}$

- **פירוק לרכיבים:** $A_{xy}=|\vec{A}|\sin\varphi$; $A_z=|\vec{A}|\cos\varphi$

$A_x=|\vec{A}|\sin\varphi\cos\theta$; $A_y=|\vec{A}|\sin\varphi\sin\theta$

מכפלה וקטורית:

- **דרך 1 לעשות את המכפלה עם דטרמיננטה:**

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

- **דרך 2 לפי גודל וכיוון בנפרד:**

גודל המכפלה הוא: $|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}||\sin\alpha|$

וכיוון לפי **כלל יד ימין:**

- **שימו לב** שאתם עם יד ימין!!
- בתמונה השמאלית, קודם לעשות אקדח ואחר"כ לפתוח את האמה!

גרדיאנט בקרטזיות: $\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

גרדיאנט בגליליות: $\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

בכדוריות (*): $\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r\sin\varphi}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$

רוטור (Rot/Curl) בקרטזיות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}=$$
$$=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x}-\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

בגליליות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r}+\left(\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\hat{z}$$

בכדוריות (*):

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\frac{1}{r\sin\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\theta\sin\varphi)-\frac{\partial F_\varphi}{\partial\theta}\right)\hat{r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)-\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right)\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\theta)\right)\hat{\varphi}$$

(*) שימו לב שהזווית φ עם ציר ה-z והזווית θ עם ציר x

תנועה בקו ישר (מימד אחד) GOOL

מהירות רגעית: $v_{(t)}=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$

מהירות ממוצעת: $\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_f-x_i}{t_f-t_i}$

תאוצה רגעית: $a_{(t)}=\frac{dv}{dt}=\dot{v}=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$

תאוצה ממוצעת: $\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_f-v_i}{t_f-t_i}$

קשרים הפוכים: $x(t)=\int v(t)\,dt$

$v(t)=\int a(t)\,dt$

- את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות).

מיקום ומהירות כתלות בזמן **בתאוצה קבועה בלבד**:

$x(t)=x_0+v_0\cdot t+\frac{1}{2}at^2$; $v(t)=v_0+at$

שטחים מתחת לגרף הפונקציה (גם בתאוצה משתנה):
- השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות כתלות בזמן שווה להעתק, כאשר שטח מתח לציר הזמן מחושב כשלילי (אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרך).
- השטח מתחת לגרף של התאוצה כתלות בזמן שווה לשינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי).

תנועה במרחב (דו ותלת מימד): GOOL

וקטור המיקום: $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$

וקטור ההעתק: $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$

וקטור המהירות הממוצעת ($velocity$): $\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

וקטור המהירות הרגעית ($velocity$): $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$

- וקטור המהירות הרגעית תמיד בכיוון משיק למסלול

וקטור התאוצה הממוצעת: $\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

וקטור התאוצה הרגעית: $\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}$

גודל המהירות ($Speed$): $|\vec{v}|=\frac{dS}{dt}$, כאשר S זה הדרך.

משוואת מסלול (דו מימד): פונקציה מהצורה $y(x)$. סרטוט של הפונקציה הוא המסלול של הגוף במישור. ניתן למצוא את המשוואה באמצעות בידוד משתנה הזמן מהפונקציה $x(t)$ והצבה ב $y(t)$.

תאוצה משיקית: $|\vec{a}_t|=\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{d|\vec{v}|}{dt}$; $\vec{a}_t=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

- התאוצה המשיקית היא ההרכיב של התאוצה שמשיק למהירות (או למסלול) והיא משנה רק את גודל המהירות.

תאוצה נורמלית: $\vec{a}_n=\vec{a}-\vec{a}_t$

$|\vec{a}_n|=|\vec{a}-\vec{a}_t|=\frac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$

- התאוצה הנורמלית היא ההרכיב של התאוצה שמאונך למהירות (או למסלול) והיא משנה רק את כיוון המהירות.

רדיוס עקמומיות: $R=\frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_n|}$

תנועה יחסית (טרנס' גלילי) GOOL

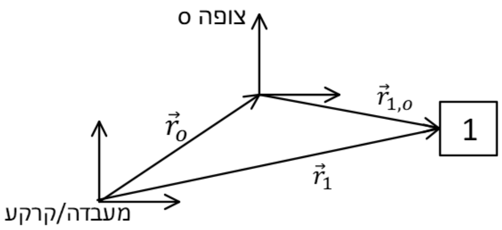
המיקום, המהירות והתאוצה של גוף 1 ביחס לגוף 2:

$\vec{r}_{1,2}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$; $\vec{v}_{1,2}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$; $\vec{a}_{1,2}=\vec{a}_1-\vec{a}_2$

הנוסחה וקטורית אבל אפשר להשתמש לכל ציר בנפרד.

שיטה שניה -שימוש בתרשים וקטורים:

1. נצייר ראשית ונשרטט את הוקטורים $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_o$ יוצאים מהראשית לפי האינפורמציה הנתונה בתרגיל (הגודל והכיוון שלהם).
2. נצייר ראשית צירים של הצופה בקצה הוקטור $\vec{r}_o$.
3. נשרטט את הוקטור $\vec{r}_{1,o}$ מהראשית של הצופה לפי הנתונים בתרגיל וכך שהראש שלו נפגש עם הראש של הוקטור $\vec{r}_1$.
4. נעשה טריגו ונמצא את נתוני הוקטורים החסרים.



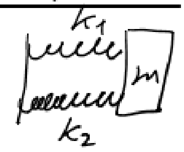
משפט הקוסינוס (לכל סוגי המשולשים):

$c^2=a^2+b^2-2abcos(\gamma)$
γ – הזווית מול הצלע c (יכולה להיות כל צלע במשולש).
<u>משפט הסינוסים (לכל סוגי המשולשים)</u>:
$$\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}$$
γ הזווית מול הצלע c, β הזווית מול b, α הזווית מול a

קפיצים GOOL

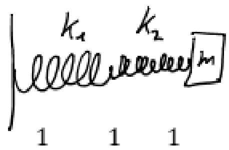
<u>חוק הוק – הכוח של קפיץ</u>: $\boldsymbol{F=-k(x-x_0)}$
כאשר $\boldsymbol{x}$ הוא מיקום הגוף ו- $\boldsymbol{x_0}$ המיקום שבו הקפיץ רפוי.

חיבור במקביל



$k_{eff}=k_1+k_2$

חיבור בטור



$$\frac{1}{k_{eff}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

כוח גרר וכוח ציפה GOOL

<u>כוח גרר הוא כוח מהצורה</u>: $\vec F=-k\vec v$
כאשר $\vec v$ היא מהירות הגוף ו-k הוא קבוע כלשהו.
משוואת תנועה - משוואה הכוללת את x, v ו- a. בדרך מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.
מהירות סופית - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)
<u>כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על **כדור** בתוך נוזל</u>:
$\vec F_v=-6\pi\eta R\vec v$ η - צמיגות הנוזל, R - רדיוס הכדור
<u>כוח ציפה</u>: פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד.
$F_b=\rho_l Vg$
כאשר ρ_l היא צפיפות הנוזל ו-V הוא נפח **הגוף**.

תנועה מעגלית (ברדיוס קבוע) GOOL

<u>הדרך בתנועה מעגלית</u>: $S=\Delta\theta\cdot R$
- הדרך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל. $\Delta\theta$ היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציג אותה ברדיאנים!
<u>גודל המהירות הקווית הרגעית (speed)</u>: $v(t)=\frac{dS}{dt}$
-כיוון המהירות תמיד משיק למעגל
<u>מהירות זוויתית</u>: $\omega=\frac{d\theta}{dt}=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$
f- התדירות, T - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)
<u>קשר בין המהירות הקווית לזוויתית</u>: $v=\omega R$
<u>תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל)</u>: $a_r=\frac{v^2}{R}=\omega^2R$
<u>הכוחות למרכז המעגל</u>: $\Sigma F_{\text{למרכז המעגל}}=m\frac{v^2}{R}=m\omega^2R$
<u>תאוצה זוויתית</u>: $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$
<u>תאוצה משיקית(רק בתנועה מעגלית לא קצובה)</u>: $a_\theta=\frac{d|\vec v|}{dt}=\alpha R$
<u>הגובה במעגל אנכי</u>: $h=R(1-cos\,\theta)$
- כאשר h ו- θ נמדדים מתחתית המעגל.
<u>הכוח הצנטריפוגלי</u>: $F_r=m\omega^2R$
- בכיוון החוצה מהמעגל .
- שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.
<u>וקטור המיקום</u>: $\vec r=R\cos\theta\,\hat x+R\sin\theta\,\hat y$
<u>הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית</u>: $\vec v=\vec\omega\times\vec r$
<u>הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית</u>:
$$\vec a_\theta=\vec\alpha\times\vec r$$

עבודה ואנרגיה GOOL

<u>עבודה של כוח קבוע</u>:
$$W=\vec F\cdot\Delta\vec r=|\vec F|\cdot|\Delta\vec r|\cdot\cos\alpha=F_x\Delta x+F_y\Delta y+F_z\Delta z$$
כאשר α היא הזווית בין הכוח להעתק.
- העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.
- אם הגוף לא זז אז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).
<u>הקשר בין העבודה כוללת לאנרגיה קינטית</u>:
$W_{\Sigma F}=\Delta E_k$ העבודה של **כל הכוחות** שפועלים על הגוף
$E_k=\frac{1}{2}mv^2$ אנרגיה קינטית
<u>כוח משמר</u>:
- **העבודה שמבצע כוח משמר אינה תלויה במסלול**, היא תלויה רק בנקודת ההתחלה והסיום של התנועה.
- העבודה במסלול סגור מתאפסת.
- יש לו אנרגיה פוטנציאלית כך ש: $W_c=-\Delta U$
האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית: $U_g=mgh$
האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית: $U_{el}=\frac{1}{2}kx^2$
כאשר x ההתארכות הקפיץ ממצב רפוי ו- k קבוע הקפיץ.

- חוץ מ- U_g ו- U_{el} יכולים להיות עוד כוחות משמרים ועבורם יהיו עוד אנרגיות פוטנציאליות
<u>אנרגיה (מכנית) כללית</u>: $E=E_k+U$
U - סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בבעיה.
<u>משפט עבודה אנרגיה</u>: $E_i+W_{NC}=E_F$
W_{NC} העבודה של כל הכוחות הלא משמרים
<u>חוק שימור האנרגיה</u>:
אם כל הכוחות הלא משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת
<u>העבודה של כוח לא קבוע</u>:
$$W=\int\vec F\cdot d\vec r=\int(F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz)$$
בשביל הנוסחה צריך גם משוואה של המסלול.
דוגמה בדו-מימד: נתון $y(x)=x^5$, באמצעות המשוואה עוברים למשתנה אחד. בדוגמה, נציב באינטגרל במקום y את x^5 ו- dx · גוזרת $dy=$, בדוגמה $dy=5x^4dx$.
הגבולות של המשתנה אליו עברנו (בדוגמה גבולות של x)
<u>איך בודקים אם כוח הוא משמר</u>:
אם ורק אם $\vec\nabla\times\vec F=0$, אז הכוח משמר.
נוסחת הרוטור בפרק וקטורים.
הערה: צריך שכל רכיב יתאפס בנפרד.
<u>נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר</u>: $\Sigma\vec F=0$ או $\frac{\partial U}{\partial x}=0$
שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתזוזה קטנה): $U_x''>0$
שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתזוזה קטנה): $U_x''<0$
שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה
- אם יש כמה ממדים אז $\vec\nabla U=0$
שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס
שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס
אוכף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס
<u>חישוב אנרגיה פוטנציאלית מכוח משמר</u>:
נתונה פונקציית כוח וצריך למצוא U שמקיימת
$\frac{\partial U}{\partial x}=-F_x$ וגם $\frac{\partial U}{\partial y}=-F_y$ וגם $\frac{\partial U}{\partial z}=-F_z$
שלב 1 – נעשה $U=-\int F_xdx+g(y,z)$
כאשר $g(y,z)$ היא פונקציה כללית שתלויה רק ב z,y
דוגמה: $\vec F(x,y,z)=2xyz\hat x+(zx^2+3)\hat y+yx^2\hat z$
$$U=-\int 2xyzdx+g(y,z)=-x^2yz+g(y,z)$$
שלב 2 – נעשה $\frac{\partial U}{\partial y}=-F_y$ ומשם נמצא את $g(y,z)$
באמצעות אינטגרל על y ונוסיף $h(z)$. בדוגמה:
נציב ב $\frac{\partial U}{\partial y}=-F_y$: $-x^2z+\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=-(zx^2+3)$
נעשה אינטגרל ונוסיף $h(z)$: $g(y,z)=-3y+h(z)$
עכשיו $U=-x^2yz-3y+h(z)$
שלב 3- נעשה $\frac{\partial U}{\partial z}=-F_z$ ומשם נמצא את $h(z)$ באמצעות אינטגרל על z ונוסיף קבוע. בדוגמה:
נציב ב $\frac{\partial U}{\partial z}=-F_z$: $-x^2y+\frac{\partial h(z)}{\partial z}=-yx^2$
נעשה אינטגרל ונוסיף קבוע: $h(z)=C$
קבלנו: $U=-x^2yz-3y+C$
שלב 4 - בשביל למצוא את C צריך תנאי על האנרגיה
לדוגמה $U(0,0,0)=0$, אם אין תנאי נשאיר את C .
- אם אין תלות ב- Z בבעיה אז רק שלבים 1-2 וקבוע.

הספק ונצילות GOOL

<u>הספק ממוצע</u>: $P_{avg}=\frac{W}{\Delta t}$
<u>הספק רגעי</u>: $P=\frac{dW}{dt}=\vec F\cdot\vec v=|\vec F||\vec v|cos\alpha$
$\vec F$ - הכוח שפועל על הגוף ו- $\vec v$ היא מהירות הגוף.
<u>נצילות</u>: $\eta=\frac{w_{out}}{E_{in}}=\frac{P_{out}}{P_{in}}$
כאשר out מציין את החלק המנוצל על ידי המערכת ו- in מציין את כל מה שמושקע.

מתקף ותנע GOOL

התנע של גוף: $\vec p=m\vec v$
הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון: $\sum\vec F=\frac{d\vec p}{dt}$
המתקף של כוח: $\vec J=\int\vec F\,dt$
המתקף הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות **בזמן** (לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות **במיקום**).
המתקף הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:
$\vec J_{\Sigma\vec F}=\Delta\vec p$
חוק שימור התנע: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.
הנוסחה משימור תנע: $m_1\vec v_1+m_2\vec v_2=m_1\vec u_1+m_2\vec u_2$
בד"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.
<u>התנגשות אלסטית</u>: יש גם שימור אנרגיה ונוסיף למשוואת התנע את המשוואה: $m_1v_1^2+m_2v_2^2=m_1u_1^2+m_2u_2^2$
אם ההתנגשות חזיתית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרשום: $v_1+u_1=v_2+u_2$

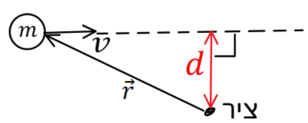
<u>התנגשות אלסטית לא חזיתית בין שני גופים בעלי **מסות שוות ואחד הגופים במנוחה לפני ההתנגשות**</u>: הזווית בין המהירויות אחרי ההתנגשות תהיה 90 מעלות.
<u>התנגשות פלסטית</u> (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות): $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_1)u$
בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה.
<u>התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות</u>: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.
<u>התנגשויות קצרות</u>: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להזניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.
<u>מקדם תקומה</u>: $e=\frac{u_2-u_1}{v_1-v_2}$
בין 0 ל 1, ככל שיותר גבוה יותר אנרגיה נשמרת אך לא ניתן לדעת כמה. שווה 1 באלסטית ו- 0 בפלסטית.
<u>התנגשויות ללא שימור תנע</u>: אם בפגיעה הנורמל גדול מאוד אז לא נזניח אותו ונחשב את המתקף שלו והשינוי בתנע של המערכת כתוצאה מכך. בנוסף גם החיכוך הקינטי יכול להיות מאוד גדול בעקבות הנורמל ונתחשב גם בו.

מרכז מסה GOOL

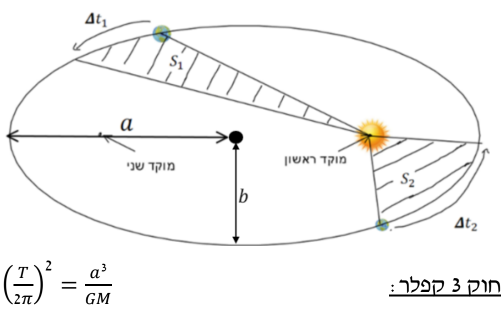
מיקום מרכז המסה: $\vec r_{c.m.}=\frac{m_1\vec r_1+m_2\vec r_2}{m_1+m_2}$
ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x :
$$x_{c.m.}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$
מהירות מרכז המסה: $\vec v_{c.m.}=\frac{m_1\vec v_1+m_2\vec v_2}{m_1+m_2}$
תאוצת מרכז המסה: $\vec a_{c.m.}=\frac{m_1\vec a_1+m_2\vec a_2}{m_1+m_2}$
עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממשיכה בהתאמה.
<u>מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים)</u>: עושים מרכז מסה בין מרכזי המסה.
<u>גוף עם חור</u>: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מרכז מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.
תאוצת מרכז המסה תלויה רק בכוחות החיצוניים:
$\Sigma F_{ext}=ma_{c.m}$
אם אין כוחות חיצוניים (ומרכז המסה במנוחה בהתחלה) אז מיקום מרכז המסה נשמר. ניתן לעשות "שימור מרכז מסה"- לחשב אותו בהתחלה ובסוף ולהשוות.

תנע זוויתי (תנ"ז) GOOL

<u>תנ"ז</u>: $\vec L=\vec r\times\vec p$
$\vec r$ - הוא וקטור המיקום של הגוף, $\vec p$ - התנע הקווי
<u>עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי</u>:
$|\vec L|=mvd$
כאשר d זה המרחק האפקטיבי.
v – המהירות.



<u>הקשר בין תנ"ז למומנט כוח</u>: $\sum\vec\tau=\frac{d\vec L}{dt}$
<u>חוק שימור התנע הזוויתי</u>:
אם $\sum\vec\tau_{ext}=0$ אז התנע הזוויתי נשמר
<u>תנ"ז של תנועה משולבת, מערכת גופים שמסתובבים סביב מרכז מסה שנע</u>: $\vec L=\vec r_{c.m.}\times\vec p_{c.m.}+\vec L_{c.m.}$
כאשר $\vec r_{c.m.}\times\vec p_{c.m.}$ זה התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת
ו-$\vec L_{c.m.}$ התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר סך התנ"ז של הגופים במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.
<u>חוק 1 של קפלר</u>: צורת המסלול של כל כוכב לכת סביב השמש היא אליפסה, שהשמש נמצאת באחד ממוקדיה.
<u>החוק 2 - חוק השטחים השווים</u>: הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש (רדיוס המקום) מכסה שטחים שווים במרחקים שווים. מעבר לכך ניתן להגיד שגם אם הזמנים לא שווים היחס של השטח חלקי הזמן קבוע.
$$\frac{S_1}{\Delta t_1}=\frac{S_2}{\Delta t_2}=\frac{S_T}{T}$$
$S_T=\pi ab$ - שטח כל האליפסה, a/b - מחצית הציר הראשי/משני של האליפסה, T - זמן המחזור



<u>חוק 3 קפלר</u>: $\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2=\frac{a^3}{GM}$
M - מסת הכוכב שבמוקד
במקרה של מערכת בינארית שבה שני הכוכבים זזים הנוסחה היא: $\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2=\frac{a^3}{G(m1+m2)}$

מומנט התמד GOOL

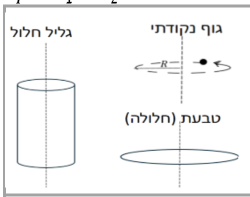
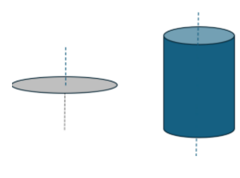
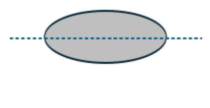
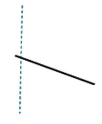
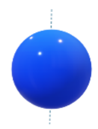
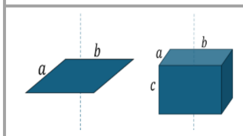
אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב **כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית** (אך לא באותה מהירות קווית)

<u>מומנט התמד של מערכת גופים נקודתיים</u>: $I = \Sigma m_i r_i^2$

<u>משפט שטיינר</u>: $I' = I_{c.m.} + md^2$

כאשר d הוא המרחק בין הצירים ו m היא המסה הכוללת של הגוף. <u>הערה:</u> משפט שטיינר פועל רק **לצירים מקבילים**, ורק כאשר אחד הצירים עובר **במרכז המסה**.

<u>אדטיביות</u>: ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל. $I_T = I_1 + I_2$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו: $I = mR^2$ טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי: $I_{c.m.} = mR^2$	
דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z -אנך לדיסקה $I_{c.m.} = \frac{1}{2}mR^2$	
דיסקה במרכז מסה סביב ציר x -במישור הדיסקה $I_{c.m.} = \frac{1}{4}mR^2$	
מוט במרכז המסה $I_{c.m.} = \frac{1}{12}mL^2$	
מוט בקצה $I = \frac{1}{3}mL^2$	
כדור מלא במרכז מסה $I_{c.m.} = \frac{2}{5}mR^2$	
תיבה או לוח במרכז מסה $I_{c.m.} = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$	

<u>נוסחה המקשרת בין צירים שונים</u>: $I_z = I_x + I_y$

אם $I_x = I_y$ (בדר״כ מסימטריה) אז $I_z = 2I_x$

<u>חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח</u>: $I = \int r^2\, dm$

כאשר r הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית). אם ציר הסיבוב הוא ציר z: $r^2 = x^2 + y^2$

מומנט כוח GOOL

<u>מומנט כוח</u>: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)

<u>גודל המומנט</u>: $|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\alpha = |\vec{F}|r_\perp$

כאשר $r_\perp$ הוא הרכיב של $\vec{r}$ המאונך לכוח
כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

גוף קשיח GOOL

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב **כל נקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה מהירות הזוויתית** (אך לא באותה מהירות קווית)

<u>תנע **קווי** של גוף קשיח</u>: $\vec{p} = M\vec{v}_{c.m.}$

<u>אנרגיה קינטית סיבובית</u>:

- סביב ציר **קבוע** כלשהו: $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
- תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה): $E_k = \frac{1}{2}mv_{c.m.}^2 + \frac{1}{2}I_{c.m.}\omega^2$
- תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (*):

$$E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 + m\vec{r}_{c.m.,o}\cdot(\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$$

כאשר I_0 מומנט ההתמד ביחס לציר, $\vec{v}_0$ היא מהירות הציר ו- $\vec{r}_{c.m.,o}$ הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר.
(*)השימוש בנוסחה מאוד נדיר

<u>**תנ״ז**</u>:

- גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$
- תנ״ז גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע: $\vec{L} = I\vec{\omega}$
כאשר I מומנט ההתמד ביחס לציר
- תנ״ז של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב מרכז המסה): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$
כאשר $\vec{L}_{c.m.}$ הוא התנ״ז ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל- $\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.}\vec{\omega}$

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

תנועה סיבובית	תנועה בקו ישר
θ	x
$\omega = \dot{\theta}$	$v = \dot{x}$
$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$	$a = \dot{v} = \ddot{x}$
I	m
L	p
τ	F

<u>בגלגול ללא החלקה</u>: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח מתאפסת (ביחס למשטח)← $v_{c.m.} = \omega R$; $a_{c.m.} = \alpha R$
- בגל״ה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.

<u>איך נגשים לשאלות?</u>

חוקי שימור	דרך כוחות ומומנטים
בודקים מה נשמר:	עושים:
1. אנרגיה אם כל הכוחות משמרים.	1. חוק II: $\Sigma F = ma_{c.m}$
2. תנע קווי אם סכום הכוחות החיצוניים מתאפס.	2. משוואת מומנטים: $\Sigma\tau = I\alpha$
3. תנ"ז אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס.	3. קשר בין התאוצות, לדוגמה $a_{c.m} = \alpha R$

תנועה הרמונית פשוטה GOOL

<u>משוואת התנועה</u>: $-k(x - x_0) = m\ddot{x}$

k ו- m הם קבועים **חיוביים** כלשהם.
x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.
$\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.
חייב להיות מינוס לפני k.

<u>פתרון המשוואה</u>: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + x_0$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma\vec{F} = 0$.
A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משווי המשקל.
ω - תדירות זוויתית $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.
φ - פאזה.

<u>מציאת הקבועים בפתרון</u>:

x_0 - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{x\ \text{של המקדם}}{\ddot{x}\ \text{של המקדם}}}$$

A, φ מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.

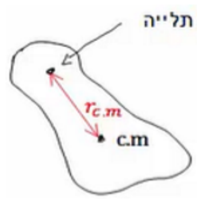
<u>נוסחה למהירות המקסימאלית</u>: $v_{max} = \omega A$

<u>מטוטלת פיזיקאלית</u>:

גוף קשיח שתלוים בנקודה כלשהיא

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$$

I_0 – מומנט ההתמד בנקודת התלייה



<u>האנרגיה</u>: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}mA^2$

- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקס' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.