

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

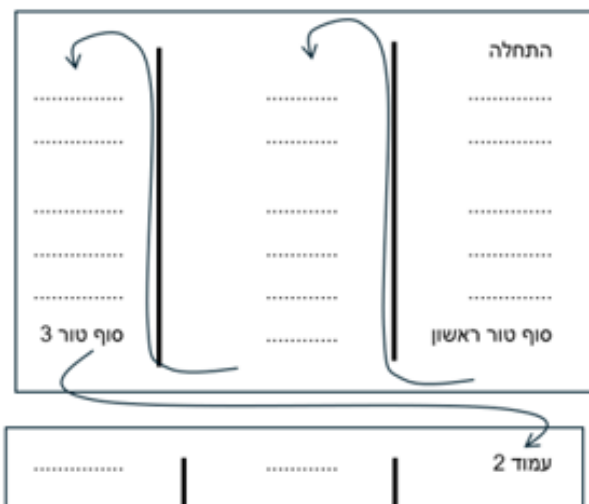
מבנה הדף:

הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.



כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

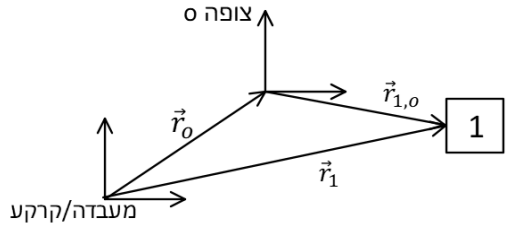
הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

שווה להעתק, כאשר שטח מתח לציר הזמן מחושב כשלילי (אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרך).
 - השטח מתחת לגרף של התאוצה כולות בזמן שווה לשינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי).
GOOL **תנועה במרחב (דו ותלת מימד):**

וקטור המיקום: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
וקטור ההעתק: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
וקטור המהירות הממוצעת (velocity): $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
וקטור המהירות הרגעית (velocity): $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
 - וקטור המהירות הרגעית תמיד בכיוון משיק למסלול
וקטור התאוצה הממוצעת: $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
וקטור התאוצה הרגעית: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$
 גודל המהירות (Speed): $|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$, כאשר s זה הדרך.

GOOL תנועה יחסית (טרנס' גליליי)

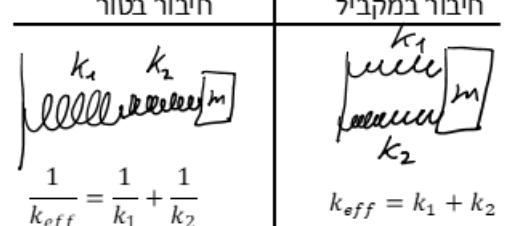
המיקום, המהירות והתאוצה של גוף 1 ביחס לגוף 2:
 $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$; $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$; $\vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$
 הנוסחה וקטורית אבל אפשר להשתמש בכל ציר בנפרד.
 שיטה שנה - שימוש בתרשים וקטורים:
 1. נצייר ראשית ונשרטט את הוקטורים $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_0$ יוצאים מהראשית לפי האינפורמציה הנתונה בתרגיל (הגודל והכיוון שלהם).
 2. נצייר ראשית צירים של הצופה בקצה הוקטור $\vec{r}_0$.
 3. נשרטט את הוקטור $\vec{r}_{1,0}$ מהראשית של הצופה לפי הנתונים בתרגיל וכך שראש שלו נפגש עם הראש של הוקטור $\vec{r}_1$.
 4. נעשה טריגו ונמצא את נתוני הוקטורים החסרים.



משפט הקוסינוס (לכל סוגי המשולשים):
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$
 γ - הזווית מול הצלע c (יכולה להיות כל צלע במשולש).
 משפט הסינוסים (לכל סוגי המשולשים):
 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
 γ הזווית מול הצלע c , β הזווית מול b , α הזווית מול a

GOOL קפיצים

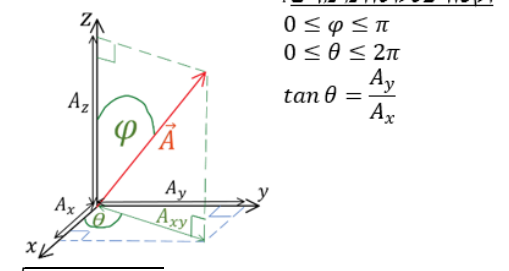
חוק הוק - הכוח של קפיץ: $\vec{F} = -k(x - x_0)$
 כאשר x הוא מיקום הגוף ו- x_0 המיקום שבו הקפיץ רפוי.



GOOL תנועה מעגלית (ברדיוס קבוע)

חדר בתנועה מעגלית: $S = \Delta\theta \cdot R$
 - חדר בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל. $\Delta\theta$ היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!
גודל המהירות הקווית הרגעית (speed): $v(t) = \frac{ds}{dt}$
 כיוון המהירות תמיד משיק למעגל
מהירות זוויתית: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
 f - התדירות, T - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)
קשר בין המהירות הקווית לזוויתית: $v = \omega R$
תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל): $a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$
הכוחות למרכז המעגל: $\Sigma F_{\text{למרכז}} = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R$
תאוצה זוויתית: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
תאוצה משיקית (רק בתנועה לא קצובה): $a_\theta = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \alpha R$
הגובה במעגל אנכי: $h = R(1 - \cos \theta)$
 כאשר h ו- θ נמדדים מתחתית המעגל.
הכוח הצנטריפוגלי: $F_r = m \omega^2 R$
 - בכיוון החוצה מהמעגל.

$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
 $(\vec{A} + \vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$
זווית בין שני וקטורים: $\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$
וקטור יחידה: $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$
וקטור בשלושה מימדים:
 $0 \leq \varphi \leq \pi$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$



פירוק לרכיבים: $A_{xy} = |\vec{A}| \sin \varphi$
 $A_x = |\vec{A}| \sin \varphi \cos \theta$; $A_y = |\vec{A}| \sin \varphi \sin \theta$
מכפלה וקטורית:
דרך 1 לעשות את המכפלה עם דטרמיננטה:
 $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$
דרך 2 לפי גודל וכיוון בנפרד:
גודל המכפלה הוא: $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha$
וכיוון לפי כלל יד ימין:



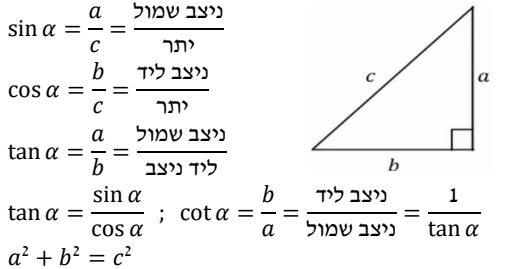
שימו לב שאתם עם יד ימין!!
 - בתמונה השמאלית, קודם לעשות אקדח ואחר כך לפתוח את האמה!
גרדיאנט בקרטזיות: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$
גרדיאנט בגליליות: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$
בכדוריות (*): $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$
רטור (Rot/Curl) בקרטזיות:

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$
 בגליליות:
 $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi}$
 בכדוריות (*):

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\theta) \right) \hat{\varphi}$
(*) שימו לב שהזווית φ עם ציר z-הזווית θ עם ציר x
GOOL תנועה בקו ישר (מימד אחד)
מהירות רגעית: $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
מהירות ממוצעת: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$
תאוצה רגעית: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$
תאוצה ממוצעת: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$
קשרים הפוכים: $x(t) = \int v(t) dt$
 $v(t) = \int a(t) dt$

- את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות).
מיקום ומהירות כולות בזמן בתאוצה קבועה בלבד:
 $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$; $v(t) = v_0 + a t$
שטחים מתחת לגרף הפונקציה (גם בתאוצה משתנה):
 - השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות כולות בזמן

GOOL מבוא מתמטי



ניצב שמול יתר: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
 ניצב ליד יתר: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
 ניצב שמול ליד ניצב: $\tan \alpha = \frac{a}{b}$
 ניצב ליד ניצב: $\cot \alpha = \frac{b}{a}$
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
 $a^2 + b^2 = c^2$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$; $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$	$90^\circ - \alpha$
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$; $\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$	$90^\circ + \alpha$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$	$180^\circ - \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$-\alpha$
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$	2α
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	$\alpha \pm \beta$

סכום והפרש של פונקציות:
 $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
 $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
פתרון משוואות טריגונומטריות:

$x_1 = \alpha + 2\pi k$ $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$	$\sin x = \sin \alpha$
$x_1 = \alpha + 2\pi k$ $x_2 = -\alpha + 2\pi k$	$\cos x = \cos \alpha$
$x = \alpha + \pi k$	$\tan x = \tan \alpha$

נגזרות ואינטגרליים:
נגזרת של מכפלה: $y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
 - כל שרשרת: אם y היא פונקציה של x ו- x הוא פונקציה של t אז:
 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$
נגזרות נוספות: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$; $\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$; $\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$; $\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$
 $\frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}$
 - אינטגרל היא פעולה הפוכה לנגזרת, מבצע סכימה על ערכי הפונקציה ונותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.
 אינטגרל לא מסוים - מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.
 אינטגרל מסוים - מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל:
 $\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$
צפיפות נפחית/משטחית/אורכית:
 $\rho = \frac{M}{V}$; $\sigma = \frac{M}{S}$; $\lambda = \frac{M}{l}$
 V, S, l הם נפח, שטח ואורך הגוף.
אלמנט מסה אינפיניטסימלי אורכי/משטחי/נפחי:
 $dm = \lambda dl$ or σdS or ρdV

GOOL וקטורים
פירוק לרכיבים:
 $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$
 $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$
 $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
 $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$
כפל בסקלר: $\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$
מכפלה סקלרית: שתי דרכים לביצוע המכפלה:
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$
 α - זווית בין הוקטורים.
 - תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
 - מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת, זו דרך לבדוק האם וקטורים מאונכים.
פתיחת סוגרים והעלאה בריבוע:

שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

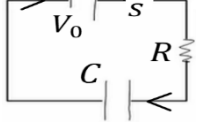
וקטור המיקום: $\vec{r} = R \cos \theta \hat{x} + R \sin \theta \hat{y}$

הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
 הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית:

$$\vec{a}_\theta = \vec{a} \times \vec{r}$$

פריקה וטעינה של קבל

מעגל טעינה:



משוואת המתחים:

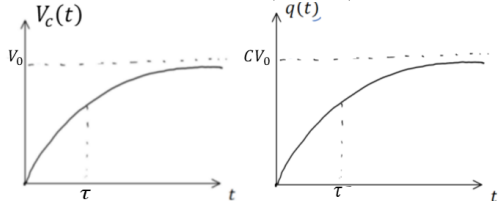
$$V_0 - \frac{q}{C} - IR = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

המטען והמתח על הקבל כתלות בזמן (בטעינה):

$$q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \quad V_C(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$\tau = RC$ הוא קבוע הזמן אופייני



הזרם כתלות בזמן:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

בהתחלה ($t = 0$) הקבל מתנהג כמו קצר, המתח והמטען על הקבל הם אפס והזרם הוא $\frac{V_0}{R}$

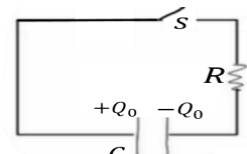
לאחר זמן רב ($t > 5\tau$) הקבל מתנהג כמו נתק, המטען והמתח קבועים והזרם מתאפס.

מעגל פריקה:

משוואת המתחים:

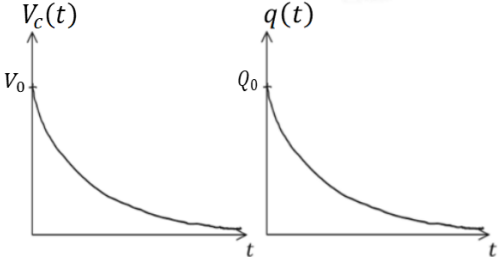
$$\frac{q}{C} - IR = 0$$

$$I = -\frac{dq}{dt}$$



המטען והמתח על הקבל כתלות בזמן (בפריקה):

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad Q_0 = CV_0$$



הזרם כתלות בזמן בפריקה זהה לטעינה: $I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

כוחות מדומים

כוח מדומה מוסיפים רק כאשר **הצופה** נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אין כוחות מדומים ולא תלוי בתנועת הגוף. החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה:

$$-m\vec{a}_0 + \vec{\Sigma F}' = m\vec{a}'$$

$\vec{a}'$ היא תאוצת הגוף ביחס לצופה.

אמיתיות $\vec{\Sigma F}$ הם כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.

" $-m\vec{a}_0$ " הוא הכוח המדומה כאשר m היא מסת הגוף הנמדד ו- $\vec{a}_0$ היא תאוצת הצופה.

הכוחות מדומים הנוספים במקרה של צופה מסתובב במהירות זוויתית קבועה:

$$\vec{F} = m\omega^2 r \hat{r}$$

הכוח הצנטריפוגלי:

$$\vec{F} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

או בצורה יותר כללית

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

כוח קוריאוליס:

כאשר $\vec{v}'$ בשתי הנוסחאות ω הוא של הצופה (ולא של הגוף)

$\vec{v}'$ - מהירות הגוף ביחס לצופה.

$\vec{r}'$ - וקטור המיקום של הגוף

כוח גרר וכוח ציפה

כוח גרר הוא כוח מהצורה:

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

כאשר $\vec{v}$ היא מהירות הגוף ו- k הוא קבוע כלשהו.

משוואת תנועה - משוואה הכוללת את x , v ו- a . בדרכ

מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.

מהירות סופית - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)

כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על **כדור בתוך נוזל**:

$$\vec{F}_v = -6\pi\eta R \vec{v}$$

η - צמיגות הנוזל, R - רדיוס הכדור

כוח ציפה: פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד.

$$F_b = \rho_l V g$$

כאשר ρ_l היא צפיפות הנוזל ו- V הוא נפח הגוף.

עבודה ואנרגיה

עבודה של כוח קבוע:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \alpha = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

כאשר α היא הזווית בין הכוח להעתק.

העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.

אם הגוף לא זז אז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).

הקשר בין העבודה כוללת לאנרגיה קינטית:

$$W_{EF} = \Delta E_k$$

העבודה של כוח קבוע קינטית

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

כוח משמר:

העבודה שמצטב כוח משמר אינה תלויה במסלול, היא תלויה רק בנקודת ההתחלה והסיום של התנועה.

העבודה במסלול סגור מתאפסת.

$$W_c = -\Delta U$$

$$U_g = mgh$$

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

כאשר x ההתארכות הקפיץ ממצב רפוי ו- k קבוע הקפיץ.

חוץ מ- U_{el} ו- U_g יכולים להיות עוד כוחות משמרים ועבורם יהיו עוד אנרגיות פוטנציאליות

$$E = E_k + U$$

אנרגיה (מכאנית) כללית:

U - סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בבעיה.

משפט עבודה אנרגיה:

$$E_i + W_{NC} = E_f$$

W_{NC} העבודה של כל הכוחות הלא משמרים

חוק שימור האנרגיה:

אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת

העבודה של כוח לא קבוע:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

בשביל הנוסחה צריך גם משוואה של המסלול.

דוגמה בדו-מימד: נתון $y(x) = x^5$, באמצעות המשוואה עוברים למשתנה אחד. בדוגמה, נציב באינטגרל במקום y את x^5 ו- dx נגזרת $dy = 5x^4 dx$.

הגבולות של המשתנה אליו עברנו (בדוגמה גבולות של x)

נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר: $\vec{F} = 0$ או $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$

שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתזוזה קטנה): $U''_x > 0$

שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתזוזה קטנה): $U''_x < 0$

שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה

אם יש כמה ממדים אז $\vec{\nabla} U = 0$

שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס

שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס

אוכף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס

הספק ונצילות

הספק ממוצע:

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$$

הספק רגעי:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos \alpha$$

$\vec{F}$ - הכוח שפועל על הגוף ו- $\vec{v}$ היא מהירות הגוף.

נצילות:

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{w_{out}}{E_{in}}$$

כאשר P_{out} מציין את החלק המנוצל על ידי המערכת ו- P_{in} מציין את כל מה שמושקע.

מתקן ותנע

התנע של גוף:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

המתקן של כוח:

$$\vec{J} = \int \vec{F} dt$$

המתקן הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות בזמן (לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות במיקום).

המתקן הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:

$$\vec{J}_{\Sigma \vec{F}} = \Delta \vec{p}$$

חוק שימור התנע: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.

הנוסחה משימור תנע: $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$

בד"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.

התנגשות אלסטית: יש גם שימור אנרגיה ונוסף למשוואת התנע את המשוואה: $m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$

אם ההתנגשות חזיתית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרשום:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2$$

התנגשות אלסטית לא חזיתית בין שני גופים בעלי **מסות שוות ואחד הגופים במנוחה לפני ההתנגשות**: הזווית בין המהירויות אחרי ההתנגשות תהיה 90 מעלות.

התנגשות פלסטית (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$$

בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה.

התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להניח את ההשפעה (המתקן) של כוחות קבועים כמו הכובד.

מקדם תקומה:

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$$

בין 0 ל 1, ככל שיותר גבוה יותר אנרגיה נשמרת אך לא ניתן לדעת כמה. שווה 1 באלסטית ו-0 בפלסטית.

התנגשויות ללא שימור תנע: אם בפגיעה הנורמל גדול מאוד אז לא נזיח אותו ונחשב את המתקן שלו והשינוי בתנע של המערכת כתוצאה מכך. בנוסף גם החיכוך הקינטי יכול להיות מאוד גדול בעקבות הנורמל ונחשב גם בו.

מרכז מסה

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

מיקום מרכז המסה:

ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x:

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

מהירות מרכז המסה:

$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

תאוצת מרכז המסה:

עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממושיכה בהתאמה.

מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים): נעשים מרכז מסה בין מרכזי המסה.

גוף עם חור: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מרכז מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.

תאוצת מרכז המסה תלויה רק בכוחות החיצוניים:

$$\Sigma F_{ext} = ma_{c.m.}$$

אם אין כוחות חיצוניים (ומרכז המסה במנוחה בהתחלה) אז מיקום מרכז המסה נשמר. ניתן לעשות "שימור מרכז מסה" לחשב אותו בהתחלה ובסוף ולהשוות.

בשביל למצוא מרכז מסה של גוף גדול נשתמש באינטגרל:

$$x_{c.m.} = \int x dm$$

כנ"ל לגבי y ו-z, לחישוב dm הסתכלו במבוא המתמטי.

מסה משתנה

הנוסחה $\vec{F} = m\vec{a}$ לא נכונה עבור גוף שהמסה שלו משתנה. נעבור לניסוח הכללי יותר של חוק שני:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

נוסחה כללית לתנועה גופים שפולטים מסה:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt}$$

כאשר $\frac{dm}{dt}$ הוא קצב הפליטה ((חיובי כאשר חומר יוצא מהגוף ושלילי אם חומר נכנס לגוף).

$\vec{v}_{rel}$ - מהירות החומר שנפלט ביחס לגוף (אם החומר נפלט אחורה אז היא צריכה להיות שלילית)

ext - הכוונה לסכום הכוחות החיצוניים

מומנט התמד

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב **כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית** (אך לא באותה מהירות קווית)

$$I = \Sigma m_i r_i^2$$

מומנט התמד של מערכת גופים נקודתיים:

$$I' = I_{c.m.} + md^2$$

משפט שטיינר:

כאשר d הוא המרחק בין הצירים ו- m היא המסה הכוללת של הגוף. **הערה:** משפט שטיינר פועל רק לצירים **מקבילים**, ורק כאשר אחד הצירים עובר במרכז המסה.

אדטיביות: ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל. $I_T = I_1 + I_2$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו:

$$I = mR^2$$

טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי:

$$I_{c.m.} = mR^2$$

דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z-אנך לדיסקה

$$I_{c.m.} = \frac{1}{2}mR^2$$

דיסקה במרכז מסה סביב ציר x-במישור הדיסקה

$$I_{c.m.} = \frac{1}{4}mR^2$$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו:

$$I = mR^2$$

טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי:

$$I_{c.m.} = mR^2$$

דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z-אנך לדיסקה

$$I_{c.m.} = \frac{1}{2}mR^2$$

דיסקה במרכז מסה סביב ציר x-במישור הדיסקה

$$I_{c.m.} = \frac{1}{4}mR^2$$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו:

$$I = mR^2$$

טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי:

$$I_{c.m.} = mR^2$$

דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z-אנך לדיסקה

$$I_{c.m.} = \frac{1}{2}mR^2$$

דיסקה במרכז מסה סביב ציר x-במישור הדיסקה

$$I_{c.m.} = \frac{1}{4}mR^2$$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו:

$$I = mR^2$$

טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי:

$$I_{c.m.} = mR^2$$

דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z-אנך לדיסקה

$z(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}t} + Be^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}t} \right)$

מקרה (II) - ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$

$z(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}$

דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

מקרה (III) - ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

$z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\tilde{\omega}t + \phi)$; $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

GOOL **תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת**

בנוסף לכוח הקפיץ והמרסן נוסף כוח מאלץ מהצורה:

$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$

Ω ו- F_0 קבועים כלשהם

משוואת התנועה: $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$

פתרון משוואת התנועה:

$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$

(t) הומוגני- x הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...

- במצב עמיד (לאחר זמן רב) נוניח את הפתרון ההומוגני.

$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$

$\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$

תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי. ניתן למצוא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω . אם $\omega_0 \ll \Omega$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות התנועה ההרמונית ללא כוח מאלץ ומרסן)

GOOL **מבוא מתמטי**

קואורדינטות גליליות: (r, θ, z)

$x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$
 $z = z$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$dl = dr/r d\theta$ (טבעת) $/dz$
 $ds = r dr d\theta$ (דיסקה) $/rd\theta dz$ (קליפה גלילית עבה)
 $dv = r dr d\theta dz$ (גליל מלא או קליפה גלילית עבה)

קואורדינטות כדוריות: (r, θ, ϕ)

$z = r \cos \theta$
 $x = r \sin \theta \cos \phi$
 $y = r \sin \theta \sin \phi$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$
 $\cos \phi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$dl = dr/r \sin \phi d\theta / r d\phi$
 $ds = r^2 \sin \phi d\theta d\phi$ (כדור)
 $dv = r^2 \sin \phi d\theta d\phi dr$ (קליפה כדורית עבה)

GOOL **כבידה וכוח מרכזי**

כוח מרכזי: $\vec{F}(r) = f(r)\hat{r}$

- תלוי רק ב r ובכיוון רדיאלי בלבד.
כוח משמר (אנרגיה).
 - לא מפעיל מומנט כוח ולכן הוא משמר גם תנע זוויתי.

כוח הכובד: $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$

כאשר $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$

- קרוב לכדה"א $\frac{GM_E}{r^2} \approx mg$

כאשר $r \approx R_E \approx 6400 \text{km}$; $M_E \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{kg}$

ו- $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$

האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד: $U(r) = -\frac{GMm}{r}$

אנרגיה קינטית סיבובית:

- סביב ציר קבוע כלשהו:
 $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

- תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה):
 $E_k = \frac{1}{2} m v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} I_{c.m.} \omega^2$

- תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (*):
 $E_k = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + m \vec{r}_{c.m.o} \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$

כאשר I_0 מומנט ההתמד ביחס לציר, $\vec{v}_0$ היא מהירות הציר ו- $\vec{r}_{c.m.o}$ הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר. (*השימוש בנוסחה מאוד נדיר)

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

תנועה סיבובית	תנועה בקו ישר
θ	x
$\omega = \dot{\theta}$	$v = \dot{x}$
$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$	$a = \dot{v} = \ddot{x}$
I	m
L	p
τ	F

לגלול ללא החלקה: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח מתאפסת (ביחס למשטח) $\leftarrow a_{c.m.} = \alpha R$; $v_{c.m.} = \omega R$

- בגל"ה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.

א"ר נגשים לשאלות?

דרכי כוחות ומומנטים

עושים:

1. חוק $\Sigma F = m a_{c.m.}$
2. משוואת מומנטים: $\Sigma \tau = I \alpha$
3. קשר בין התאוצות, לדוגמה $a_{c.m.} = \alpha R$

בודקים מה נשמר:

1. אנרגיה אם כל הכוחות משמרים.
2. תנע קווי אם סכום הכוחות החיצוניים מתאפס.
3. תנ"ז אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס.

GOOL **תנועה הרמונית פשוטה**

משוואת התנועה: $-k(x - x_0) = m\ddot{x}$

1- k ו- m הם קבועים חיוביים כלשהם.
 x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
 x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זוויתי או משתנה אחר.
 $\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.
 חייב להיות מינוס לפני k .

פתרון המשוואה: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma \vec{F} = 0$.
 A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משיווי המשקל.
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - תדירות זוויתית
 ϕ - פאזה.
מצייאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$

φ, A מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{\max} = \omega A$

מטוסלת פיזיקלית: גוף קשיח שתולים בנקודה כלשהי

$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$

I_0 - מומנט ההתמד בנקודת התליה

האנרגיה: $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m A^2$

- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.

- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.

תנועה הרמונית מרוסנת

בנוסף לכוח הקפיץ נוסף כוח מרסן מהצורה: $F = -\lambda v$

v - מהירות הגוף ו- λ קבוע.

משוואת התנועה: $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$

כאשר $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$

אין תנודות

מוט במרכז המסה

$I_{c.m.} = \frac{1}{12} mL^2$

מוט בקצה

$I = \frac{1}{3} mL^2$

כדור מלא במרכז מסה

$I_{c.m.} = \frac{2}{5} mR^2$

תיבה או לוח במרכז מסה

$I_{c.m.} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$

נוסחה המקשרת בין צירים שונים: $I_z = I_x + I_y$

אם $I_x = I_y$ (בדרכי מסמטריה) אז $I_z = 2I_x$

מבנה הגוף סימטרי לאורך ציר Z: מומנט ההתמד של הגוף סביב ציר Z יהיה כמו של גוף משטחי במישור xy. לדוגמה מומנט ההתמד של גליל יהיה כמו של דיסקה ומומנט ההתמד של קוביה יהיה כמו של מלבן שהוא בסיס הקוביה.

חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח: $I = \int r^2 dm$

כאשר r הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית). אם ציר הסיבוב הוא ציר z: $r^2 = x^2 + y^2$

GOOL **מומנט כוח**

מומנט כוח: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)

גודל המומנט: $|\vec{\tau}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| r_{\perp}$

כאשר $r_{\perp}$ הוא הרכיב של $\vec{r}$ המאונך לכוח כיוון לפי כלל די ימין או כלל הברור.

GOOL **תנע זוויתי (תנ"ז)**

תנ"ז: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{r}$ - הוא וקטור המיקום של הגוף, $\vec{p}$ - התנע הקווי

עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי:

$|\vec{L}| = mvd$

כאשר d זה המרחק האפקטיבי.

v - המהירות.
הקשר בין תנ"ז

למומנט כוח: $\Sigma \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

חוק שימור התנע הזוויתי:

אם $\Sigma \vec{\tau}_{ext} = 0$ אז התנע הזוויתי נשמר

תנ"ז של תנועה משולבת, מערכת גופים שמסתובבים סביב מרכז מסה שנע: $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר $\vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$ זה התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת ו- $\vec{L}_{c.m.}$ התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר סך התנ"ז של הגופים במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.

פרצסיה (נקיפה):

לתנע הזוויתי יש רכיב במישור xy שמסתובב סביב ציר z. נגזרת בזמן של הרכיב הזה נותנת לנו את מומנט הכוח שפועל על המערכת.

GOOL **גוף קשיח**

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל נקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה מהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)

תנע קווי של גוף קשיח: $\vec{p} = M \vec{v}_{c.m.}$

תנ"ז:

- גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$

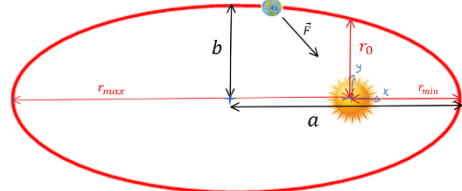
- תנ"ז גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע: $\vec{L} = I \vec{\omega}$

כאשר I מומנט ההתמד ביחס לציר

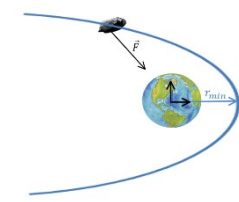
- תנ"ז של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב מרכז המסה): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר $\vec{L}_{c.m.}$ הוא התנ"ז ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל- $\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.} \vec{\omega}$

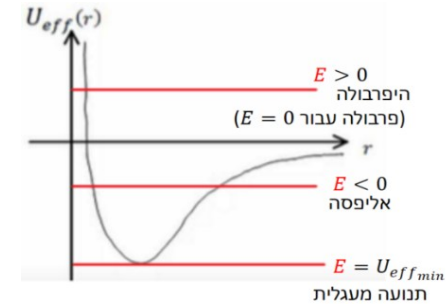
הצורה הזו של האנרגיה היא צורה כללית שיש לכוחות נוספים והרבה פעמים רשמים אותה כ: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ כאשר $\alpha = GMm$ הכובד עבור הכובד: המסלול של גוף תחת כוח הכובד: $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ כאשר $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{ma^2}}$; $r_0 = \frac{L^2}{ma}$; E היא האנרגיה הכוללת של הגוף ו- L הוא התנאי. צורת המסלול מתחלקת ל-3 מקרים: מקרה 1: מעגל $\varepsilon = 0$. במקרה הזה ניתן להשוות את הכוח ל- $\frac{mv^2}{r}$ ולקבל ש: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ מקרה 2: אליפסה $0 < \varepsilon < 1$ מקור הכוח נמצא באחד ממוקדי האליפסה.



בד"כ נמצא המהירויות באמצעות שימור אנרגיה ותנאי: $v(r_{min}) = v_{max}$; $v(r_{max}) = v_{min}$ $r_{min} = \frac{r_0}{1 + \varepsilon}$; $r_{max} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon}$; $\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$; $a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon^2}$; $b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ שטח האליפסה: $S = \pi ab$ מקרה 3: היפרבולה $\varepsilon \geq 1$ (פרבולה כאשר $\varepsilon = 1$): $v(r_{min}) = v_{max}$ מהירות מילוט - המהירות הדרושה להגיע לאינסוף. $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

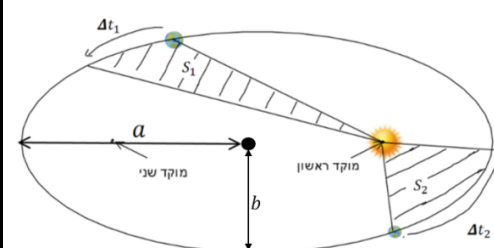


אנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית: בבעיות שבהן האנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק ב r ניתן לרשום את האנרגיה הכוללת של הגוף כתלות במשתנה r בלבד. $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$ כאשר: $U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$ עבור $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ נקבל את הגרף הבא עבור U_{eff} :



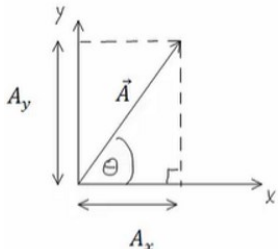
חוק 1 של קפלר: צורת המסלול של כל כוכב לכת סביב השמש היא אליפסה, שהשמש נמצאת באחד ממוקדיה. החוק 2 - חוק השטחים השווים: הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש (רדיוס המקום) מכסה שטחים שווים במרחקים שווים. מעבר לכך ניתן להגיד שגם אם הזמנים לא שווים היחס של השטח חלקי הזמן קבוע.

$\frac{S_1}{\Delta t_1} = \frac{S_2}{\Delta t_2} = \frac{S_T}{T}$ $S_T = \pi ab$ - שטח כל האליפסה, a/b - מחצית הציר הראשי/משני של האליפסה, T - זמן המחזור



חוק 3 קפלר: $(\frac{T}{2\pi})^2 = \frac{a^3}{GM}$ - מסת הכוכב שבמוקד במקרה של מערכת בינארית שבה שני הכוכבים זזים הנוסחה היא: $(\frac{T}{2\pi})^2 = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}$

וקטורים פירוק לרכיבים: $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$; $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$ $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$; $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$ כפל בסקלר: $\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$ **יחסות פרטית**



GOOL תיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות (אינרציאליות).

עקרונות יסוד בתורת היחסות: חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות. האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו. מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס. אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור. בוואקום. מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס. הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם: x, y, z). שעוברת טרנספורמציה.

פקטור גאמה: $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_0}{c})^2}}$; $\beta = \frac{v_0}{c}$ γ_0 תמיד גדולה מ 1 טרנספורמציות לורנץ למיקום והזמן: $x' = \gamma_0(x - v_0 t)$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = \gamma_0(t - \frac{v_0 x}{c^2})$; $\beta = \frac{v_0}{c}$; $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_0}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ טרנספורמציה הפוכה:

$x = \gamma_0(x' + v_0 t')$; $y' = y$; $z' = z$; $t = \gamma_0(t' + \frac{v_0 x'}{c^2})$ - הצירים של המערכות חייבים להיות מקבילים. - בזמן $t = t' = 0$ חייבים שהראשיות מתלכדות. המערכת העצמית: מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

- זמן עצמי τ מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם. - אורך עצמי l_0 האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה. התכווצות האורך: שינוי האורך ממערכת המנוחה (העצמית) למערכת נעה.

$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$ התארכות הזמן: שינוי הזמן ממערכת המנוחה (העצמית) למערכת נעה. $\Delta t = \gamma_0 \tau$ שינוי זווית במדידת אורך: $\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$ θ' - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת העצמית θ - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת אחרת. אפקט דופלר היחסות:

זמן המחזור של הגל: $T = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tau$ אורך הגל: $\lambda = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda'$ תדירות הגל: $f = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f'$ τ, f', λ' הזמן, התדירות ואורך הגל במערכת העצמית

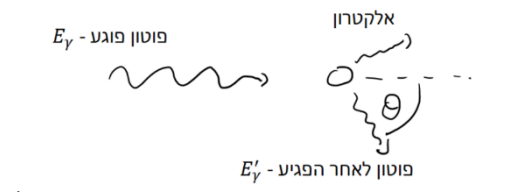
טרנספורמציות לורנץ למהירויות: $v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$; $v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$; $v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$ אברציה - שינוי זווית המהירות:

$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0(\cos \theta - \frac{v_0}{c})}$ שימו לב שפה השינוי הוא בזווית של וקטור המהירות (כיוון התנועה) ולא שינוי זווית של הגוף כמו למעלה. תנע ואנרגיה יחסותיים: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$; $E = \gamma mc^2$ - הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ולא למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות. נוסחאות נוספות:

$E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4$; $|p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} mc$ אנרגיית מנוחה: $E_0 = mc^2$ אנרגיה קינטית: $E_k = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$

עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, ניוטרינו) והאנרגיה הקינטית היא: $E = |p|c = hv$ היא התדירות ו- $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ קבוע פלאנק טרנספורמציה של התנע והאנרגיה: $E' = \gamma_0(E - v_0 p_x)$; $p'_x = \gamma_0(p_x - v_0 E/c^2)$; $p'_y = p_y$; $p'_z = p_z$; $(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c})$ וקטור תנע אנרגיה: "גודל הוקטור" (מינוס באנרגיה) זהה בכל מערכות הייחוס:

$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - (\frac{E}{c})^2 = const$ - הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר ממוקד אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת. - עבור גוף יחיד הקבוע הוא: $m^2 c^2$. פיזור קומפטון: פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה E_γ - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה E'_γ - מסת אלקטרון m_e - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה. θ יחידת האלקטרון וולט: $1 eV = 1.60 \times 10^{-19} J$ המרת מסת הגופים לאנרגיה:

$m_e \approx 8.19 \cdot 10^{-14} J (\approx 511 keV)$; $m_p \approx 1.50 \cdot 10^{-10} J (\approx 938 MeV)$; $m_{Uranium} \approx 3.55 \cdot 10^{-8} J (\approx 225 GeV)$ - ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ- $\frac{E}{c}$ כלומר הכמות (המספר) זהה רק ביחידות נחלק ב c.

כוחות ביחסות פרטית: $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \gamma^3 \vec{a}_{||} + m \gamma \vec{a}_{\perp}$ הרכיב המאונך והמקביל של התאוצה למהירות $\vec{a}_{||}, \vec{a}_{\perp}$ גודל הרכיב המקביל של התאוצה: $a_{||} = \dot{v}$ טרנספורמציה של הכוחות:

$F'_x = F_x - \frac{v_0(F_y v_y + F_z v_z)}{c^2 - v_0 v_x}$; $F'_y = \frac{F_y}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$; $F'_z = \frac{F_z}{\gamma_0(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$ טרנספורמציה הפוכה: $F_x = F'_x + \frac{v_0(F'_y v'_y + F'_z v'_z)}{c^2 + v_0 v'_x}$; $F_y = \frac{F'_y}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$; $F_z = \frac{F'_z}{\gamma_0(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2})}$