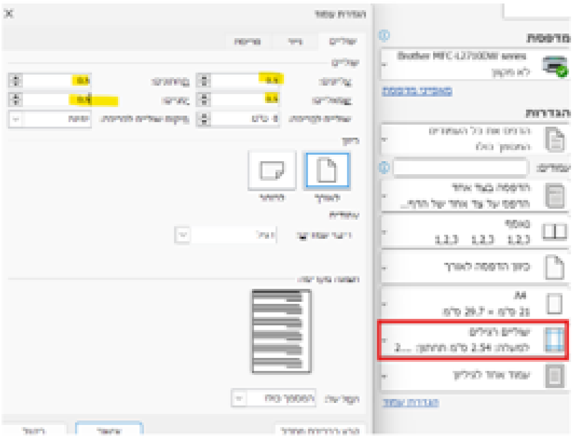
הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה! :

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השולים, לבחור שולים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

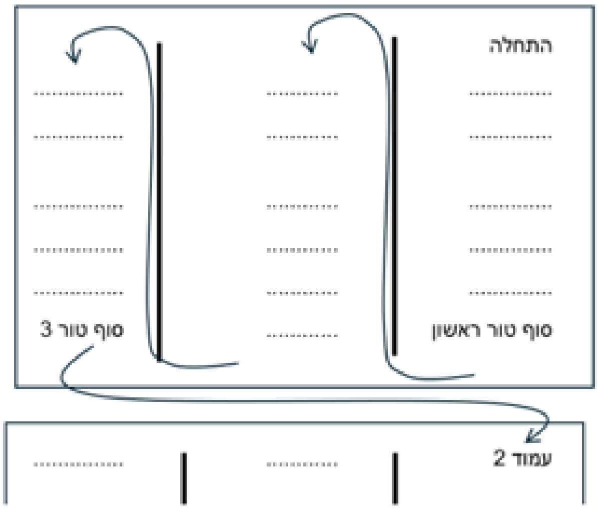
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:

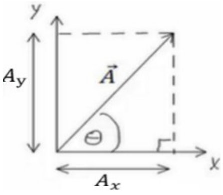
הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.



וקטורים GOOL

פירוק לרכיבים:



$$A_x = |\vec{A}|\cos\theta$$
$$A_y = |\vec{A}|\sin\theta$$
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

כפל בסקלר: $\alpha\vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y)$

מכפלה סקלרית: שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x\cdot B_x + A_y\cdot B_y = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha$$

α - זווית בין הוקטורים.
- תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
- מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת, זו דרך **לבדוק האם וקטורים מאונכים**.

פתיחת סוגרים והעלאה בריבוע:

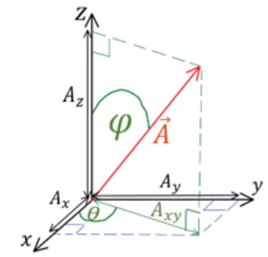
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$
$$(\vec{A}+\vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + |\vec{B}|^2$$

זווית בין שני וקטורים: $\cos\alpha = \frac{A_xB_x + A_yB_y}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$

וקטור יחידה: $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

וקטור בשלושה מימדים:

$$0 \le \varphi \le \pi$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$



$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ ;\ \cos\varphi = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}$$

- פירוק לרכיבים: $A_{xy} = |\vec{A}|\sin\varphi\ ;\ A_z = |\vec{A}|\cos\varphi$

$$A_x = |\vec{A}|\sin\varphi\cos\theta\ ;\ A_y = |\vec{A}|\sin\varphi\sin\theta$$

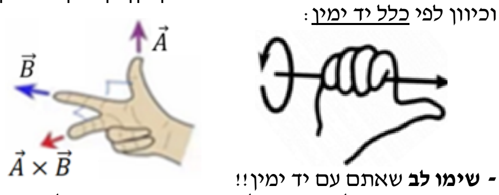
מכפלה וקטורית:
- דרך 1 לעשות את המכפלה עם דטרמיננטה:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

- דרך 2 לפי גודל וכיוון בנפרד:

גודל המכפלה הוא: $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}||\sin\alpha|$

וכיוון לפי כלל יד ימין:



- **שימו לב** שאתם עם יד ימין!!
- בתמונה השמאלית, קודם לעשות אקדח ואחר"כ לפתוח את האמה!

גרדיאנט בקרטזיות: $\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

גרדיאנט בגליליות: $\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

בכדוריות (*): $\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$

רוטור (Rot/Curl) בקרטזיות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

בגליליות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{z}$$

בכדוריות (*):

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{r\sin\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\theta\sin\varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial\theta}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\theta)\right)\hat{\varphi}$$

(*) **שימו לב שהזווית φ עם ציר ה-z והזווית θ עם ציר x**

תנועה בקו ישר (מימד אחד) GOOL

מהירות רגעית: $v_{(t)} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

מהירות ממוצעת: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

תאוצה רגעית: $a_{(t)} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

תאוצה ממוצעת: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

קשרים הפוכים: $x(t) = \int v(t)\,dt$

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$

- את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות).

מיקום ומהירות כתלות בזמן **בתאוצה קבועה בלבד**:

$$x(t) = x_0 + v_0\cdot t + \tfrac{1}{2}at^2\ ;\ v(t) = v_0 + at$$

שטחים מתחת לגרף הפונקציה (גם בתאוצה משתנה):
- השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות כתלות בזמן שווה להעתק, כאשר שטח מתח לציר הזמן מחושב כשלילי (אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרך).
- השטח מתחת לגרף של התאוצה כתלות בזמן שווה לשינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי).

תנועה במרחב (דו ותלת מימד): GOOL

וקטור המיקום: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

וקטור ההעתק: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

וקטור המהירות הממוצעת (velocity): $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

וקטור המהירות הרגעית (velocity): $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- וקטור המהירות הרגעית תמיד בכיוון משיק למסלול

וקטור התאוצה הממוצעת: $\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

וקטור התאוצה הרגעית: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

גודל המהירות (Speed): $|\vec{v}| = \frac{dS}{dt}$, כאשר S זה הדרך.

משוואת מסלול (דו מימד): פונקציה מהצורה $y(x)$.
סרטוט של הפונקציה הוא המסלול של הגוף במישור. ניתן למצוא את המשוואה באמצעות בידוד משתנה הזמן מהפונקציה $x(t)$ והצבה ב $y(t)$.

תאוצה משיקית: $|\vec{a}_t| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\ ;\ \vec{a}_t = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

- התאוצה המשיקית היא ההרכיב של התאוצה שמשיך למהירות (או למסלול) והיא משנה רק את גודל המהירות.

תאוצה נורמלית: $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$

$$|\vec{a}_n| = |\vec{a} - \vec{a}_t| = \frac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{|v|}$$

- התאוצה הנורמאלית היא ההרכיב של התאוצה שמאונך למהירות (או למסלול) והיא משנה רק את כיוון המהירות.

רדיוס עקמומיות: $R = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_n|}$

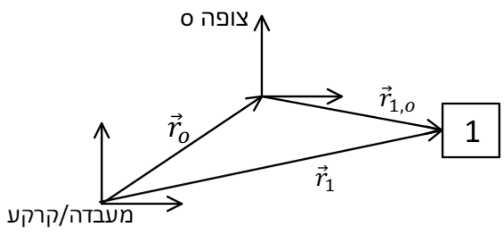
תנועה יחסית (טרנס' גליליי) GOOL

המיקום, המהירות והתאוצה של גוף 1 ביחס לגוף 2:

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\ ;\ \vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2\ ;\ \vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

הנוסחה וקטורית אבל אפשר להשתמש לכל ציר בנפרד.

שיטה שניה -שימוש בתרשים וקטורים:
1. נצייר ראשית ונשרטט את הוקטורים $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_0$ יוצאים מהראשית לפי האינפורמציה הנתונה בתרגיל (הגודל והכיוון שלהם).
2. נצייר ראשית צירים של הצופה בקצה הוקטור $\vec{r}_o$.
3. נשרטט את הוקטור $\vec{r}_{1,o}$ מהראשית של הצופה לפי הנתונים בתרגיל וכך שהראש שלו נפגש עם הראש של הוקטור $\vec{r}_1$.
4. נעשה טריגו ונמצא את נתוני הוקטורים החסרים.



משפט הקוסינוס (לכל סוגי המשולשים):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

γ – הזווית מול הצלע c (יכולה להיות כל צלע במשולש).

משפט הסינוסים (לכל סוגי המשולשים):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

γ הזווית מול הצלע c, β הזווית מול b, α הזווית מול a

המהירות שמודדת מד לייזר:

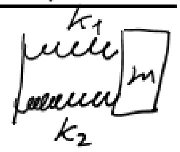
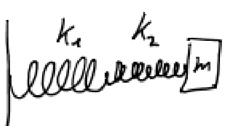
$$\vec{v}_{\text{שמודד לייזר}} = \frac{\dot{x}\cdot\hat{x} + \dot{y}\cdot\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{d}{dt}|\vec{r}|$$

- מהירות זו היא הרכיב הרדיאלי של המהירות או הרכיב של המהירות שמקביל לוקטור המיקום של הגוף ביחס לצופה המודד.

קפיצים GOOL

חוק הוק – הכוח של קפיץ: $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$

כאשר x הוא מיקום הגוף ו- x_0 המיקום שבו הקפיץ רפוי.

חיבור במקביל	חיבור בטור
	
$k_{eff} = k_1 + k_2$	$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

תנועה מעגלית (ברדיוס קבוע) GOOL

הדרך בתנועה מעגלית: $S = \Delta\theta\cdot R$

- הדרך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל. $\Delta\theta$ היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!

גודל המהירות הקווית הרגעית (speed): $v(t) = \frac{dS}{dt}$

-כיוון המהירות תמיד משיק למעגל

מהירות זוויתית: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

f - התדירות, T - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)

קשר בין המהירות הקווית לזוויתית: $v = \omega R$

תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל): $a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

הכוחות למרכז המעגל: $\Sigma F_{\text{למרכז המעגל}} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$

תאוצה זוויתית: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

תאוצה משיקית(רק בתנועה לא קצובה): $a_\theta = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \alpha R$

הגובה במעגל אנכי: $h = R(1 - \cos\theta)$

- כאשר h ו- θ נמדדים מתחתית המעגל.

הכוח הצנטריפוגלי: $F_r = m\omega^2 R$

- בכיוון החוצה מהמעגל.
- שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

וקטור המיקום: $\vec{r} = R\cos\theta\,\hat{x} + R\sin\theta\,\hat{y}$

הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית: $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית:

$$\vec{a}_\theta = \vec{\alpha}\times\vec{r}$$

כוחות מדומים GOOL

כוח מדומה מוסיפים רק כאשר **הצופה** נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אין כוחות מדומים ולא תלוי בתנועת הגוף.

החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה:

$$-m\vec{a}_0 + \Sigma\vec{F}_{\text{אמיתיים}} = m\vec{a}'$$

$\vec{a}'$ היא תאוצת הגוף **ביחס לצופה**.

$\Sigma\vec{F}_{\text{אמיתיים}}$ הם כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.

"$-m\vec{a}_0$" הוא הכוח המדומה כאשר m היא מסת הגוף הנמדד ו- $\vec{a}_0$ היא תאוצת **הצופה**.

הכוחות מדומים הנוספים במקרה של צופה מסתובב במהירות זוויתית קבועה:

הכוח הצנטריפוגלי: $\vec{F} = m\omega^2 r\hat{r}$

או בצורה יותר כללית $\vec{F} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

כוח קוריאוליס: $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

כאשר בשתי הנוסחאות ω הוא של הצופה (ולא של הגוף)

$\vec{v}'$ - מהירות הגוף ביחס לצופה.

$\vec{r}$ - וקטור המיקום של הגוף

כוח גרר וכוח ציפה GOOL

כוח גרר הוא כוח מהצורה: $\vec{F} = -k\vec{v}$

כאשר $\vec{v}$ היא מהירות הגוף ו-k הוא קבוע כלשהו.

משוואות תנועה - משוואה הכוללת את x, v ו- a . בדרך מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.

מהירות סופית - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)

כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על **כדור** בתוך נוזל:

$\vec{F}_v = -6\pi\eta R\vec{v}$; η - צמיגות הנוזל, R - רדיוס הכדור

כוח ציפה: פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד.

$$F_b = \rho_l V g$$

כאשר ρ_l היא צפיפות הנוזל ו- V הוא נפח **הגוף**.

עבודה ואנרגיה GOOL

עבודה של כוח קבוע:

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = |\vec{F}|\cdot|\Delta\vec{r}|\cdot\cos\alpha = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

כאשר α היא הזווית בין הכוח להעתק.
- העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.
- אם הגוף לא זז אז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).

הקשר בין העבודה כוללת לאנרגיה קינטית:
$W_{\Sigma F} = \Delta E_k$ העבודה של **כל הכוחות** שפועלים על הגוף
$E_k = \frac{1}{2}mv^2$ אנרגיה קינטית

כוח משמר:
- **העבודה שמבצע כוח משמר אינה תלויה במסלול**, היא תלויה רק בנקודת ההתחלה והסיום של התנועה.
- העבודה במסלול סגור מתאפסת.
- יש לו אנרגיה פוטנציאלית כך ש: $W_c = -\Delta U$

האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית: $U_g = mgh$
האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית: $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$
כאשר x ההתארכות הקפיץ ממצב רפוי ו- k קבוע הקפיץ.
- חוץ מ- U_g ו- U_{el} יכולים להיות עוד כוחות משמרים ועבורם יהיו עוד אנרגיות פוטנציאליות

אנרגיה (מכאנית) כללית: $E = E_k + U$
U - סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בבעיה.
משפט עבודה אנרגיה: $E_i + W_{NC} = E_F$
W_{NC} העבודה של כל הכוחות הלא משמרים

חוק שימור האנרגיה:
אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת

העבודה של כוח לא קבוע:
$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$
בשביל הנוסחה צריך גם משוואה של המסלול.
דוגמה בדו-מימד: נתון $y(x) = x^5$, באמצעות המשוואה עוברים למשתנה אחד. בדוגמה, נציב באינטגרל במקום y את x^5 ו- $dy = \text{נגזרת} \cdot dx$, בדוגמה $dy = 5x^4dx$.
הגבולות של המשתנה אליו עברנו (בדוגמה גבולות של x)

איך בודקים אם כוח הוא כוח משמר:
אם ורק אם $\vec\nabla \times \vec F = 0$, אז הכוח משמר.
נוסחת הרוטור בפרק וקטורים.
הערה: צריך שכל רכיב יתאפס בנפרד.

נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר: $\Sigma\vec F = 0$ או $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$
שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתזוזה קטנה): $U''_x > 0$
שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתזוזה קטנה): $U''_x < 0$
שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה
- אם יש כמה ממדים אז $\vec\nabla U = 0$

שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס
שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס
אוכף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס

חישוב אנרגיה פוטנציאלית מכוח משמר:
נתונה פונקציית כוח וצריך למצוא U שמקיימת
$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x$ וגם $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$ וגם $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$
שלב 1 – נעשה $U = -\int F_x dx + g(y,z)$
כאשר $g(y,z)$ היא פונקציה כללית שתלויה רק ב z,y
דוגמה: $\vec F(x,y,z) = 2xyz\hat x + (zx^2+3)\hat y + yx^2\hat z$
$$U = -\int 2xyzdx + g(y,z) = -x^2yz + g(y,z)$$
שלב 2 – נעשה $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$ ומשם נמצא את $g(y,z)$
באמצעות אינטגרל על y ונוסיף $h(z)$. בדוגמה:
נציב ב $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$: $-x^2z + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = -(zx^2+3)$
נעשה אינטגרל ונוסיף $h(z)$: $g(y,z) = -3y + h(z)$
עכשיו $U = -x^2yz - 3y + h(z)$
שלב 3- נעשה $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$ ומשם נמצא את $h(z)$ באמצעות אינטגרל על z ונוסיף קבוע. בדוגמה:
נציב ב $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$: $-x^2y + \frac{\partial h(z)}{\partial z} = -yx^2$
נעשה אינטגרל ונוסיף קבוע: $h(z) = C$
קבלנו: $U = -x^2yz - 3y + C$
שלב 4 - בשביל למצוא את C צריך תנאי על האנרגיה לדוגמה $U(0,0,0) = 0$, אם אין תנאי נשאר את C.
- אם אין תלות ב- Z בבעיה אז רק שלבים 1-2 וקבוע.

הספק ונצילות GOOL

הספק ממוצע: $P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$
הספק רגעי: $P = \frac{dW}{dt} = \vec F\cdot\vec v = |\vec F||\vec v|cos\alpha$
$\vec F$ - הכוח שפועל על הגוף ו- $\vec v$ היא מהירות הגוף.
נצילות: $\eta = \frac{W_{out}}{E_{in}} = \frac{P_{out}}{P_{in}}$
כאשר out מציין את החלק המנוצל על ידי המערכת ו- in מציין את כל מה שמושקע.

מתקף ותנע GOOL

התנע של גוף: $\vec p = m\vec v$

הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון: $\sum\vec F = \frac{d\vec p}{dt}$
המתקף של כוח: $\vec J = \int\vec F\,dt$
המתקף הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות **בזמן** (לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות **במיקום**).
המתקף הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:
$\vec J_{\Sigma\vec F} = \Delta\vec p$
חוק שימור התנע: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.
הנוסחה משימור תנע: $m_1\vec v_1 + m_2\vec v_2 = m_1\vec u_1 + m_2\vec u_2$
בד"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.
התנגשות אלסטית: יש גם שימור אנרגיה ונוסיף למשוואת התנע את המשוואה: $m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2$
אם ההתנגשות חזיתית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרשום: $v_1 + u_1 = v_2 + u_2$
התנגשות אלסטית לא חזיתית בין שני גופים בעלי **מסות שוות ואחד הגופים במנוחה לפני ההתנגשות**: הזווית בין המהירויות אחרי ההתנגשות תהיה 90 מעלות.
התנגשות פלסטית (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות): $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_1)u$
בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה.
התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.
התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להזניח את ההשפעה (המתקף) של כוחות קבועים כמו הכובד.
מקדם תקומה: $e = \frac{u_2-u_1}{v_1-v_2}$
בין 0 ל 1, ככל שיותר גבוה יותר אנרגיה נשמרת אך לא ניתן לדעת כמה. שווה 1 באלסטית ו- 0 בפלסטית.
התנגשויות ללא שימור תנע: אם בפגיעה הנורמל גדול מאוד אז לא נזניח אותו ונותן את המתקף שלו והשינוי בתנע של המערכת כתוצאה מכך. בנוסף גם החיכוך הקינטי יכול להיות מאוד גדול בעקבות הנורמל ונתחשב גם בו.

מסה משתנה GOOL

הנוסחה $\Sigma\vec F = m\vec a$ לא נכונה עבור גוף שהמסה שלו משתנה. נעבור לניסוח הכללי יותר של חוק שני: $\Sigma\vec F = \frac{d\vec p}{dt}$
נוסחה כללית לתנועה גופים שפולטים מסה:
$$\sum\vec F_{ext} = M(t)\frac{d\vec v}{dt} + \vec v_{rel}\frac{dm}{dt}$$
כאשר $\frac{dm}{dt}$ הוא קצב הפליטה ((חיובי כאשר חומר יוצא מהגוף ושלילי אם חומר נכנס לגוף).
$\vec v_{rel}$ - מהירות החומר שנפלט ביחס לגוף (אם החומר נפלט אחורה אז היא צריכה להיות שלילית)
ext - הכוונה לסכום הכוחות החיצוניים

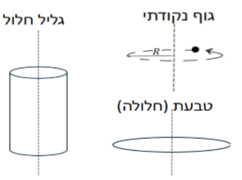
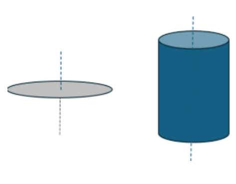
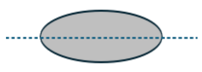
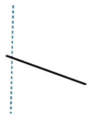
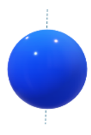
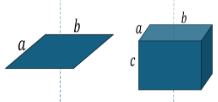
מרכז מסה GOOL

מיקום מרכז המסה: $\vec r_{c.m.} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2}$
ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x :
$$x_{c.m.} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$
מהירות מרכז המסה: $\vec v_{c.m.} = \frac{m_1\vec v_1+m_2\vec v_2}{m_1+m_2}$
תאוצת מרכז המסה: $\vec a_{c.m.} = \frac{m_1\vec a_1+m_2\vec a_2}{m_1+m_2}$
עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממשיכות בהתאמה.
מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים): עושים מרכז מסה בין מרכזי המסה.
גוף עם חור: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.
תאוצת מרכז המסה תלויה רק בכוחות החיצוניים:
$\Sigma F_{ext} = ma_{c.m}$
אם אין כוחות חיצוניים (ומרכז המסה במנוחה בהתחלה) אז מיקום מרכז המסה נשמר. ניתן לעשות "שימור מרכז מסה"- לחשב אותו בהתחלה ובסוף ולהשוות.
בשביל למצוא מרכז מסה של גוף גדול נשתמש באינטגרל:
$$x_{c.m} = \int xdm$$
כנ"ל לגבי y ו- z, לחישוב dm הסתכלו במבוא המתמטי.

מערכת מרכז המסה:
התנע הכולל של מערכת: $\vec p_T = M\vec v_{c.m.}$
ניתן להסתכל על מערכת גופים כגוף נקודתי שמסתו היא סכום המסות ומהירותו היא מהירות מרכז המסה.
מערכת מרכז המסה היא מערכת שזזה ביחד עם נקודת מרכז המסה.
בשביל למצוא את מהירות הגופים במערכת מרכז המסה נשתמש בטרנספורמציית גליליי.
במערכת מרכז המסה **התנע הכולל של המערכת הוא אפס** ולכן, במקרה של שני גופים, הגופים תמיד ינועו על ציר אחד.
אם ההתנגשות אלסטית, **גודל המהירות של כל גוף נשמר.**

מומנט התמד GOOL

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)
מומנט התמד של מערכת גופים נקודתיים: $I = \Sigma m_i r_i^2$
משפט שטיינר: $I' = I_{c.m.} + md^2$
כאשר d הוא המרחק בין הצירים ו m היא המסה הכוללת של הגוף. הערה: משפט שטיינר פועל רק **לצירים מקבילים**, ורק כאשר אחד הצירים עובר **במרכז המסה**.
אדטיביות: ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל. $I_T = I_1 + I_2$

גוף נקודתי סביב ציר כלשהו: $I = mR^2$ טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי: $I_{c.m.} = mR^2$	
דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z- אנך לדיסקה $I_{c.m.} = \frac{1}{2}mR^2$	
דיסקה במרכז מסה סביב ציר x -במישור הדיסקה $I_{c.m.} = \frac{1}{4}mR^2$	
מוט במרכז המסה $I_{c.m.} = \frac{1}{12}mL^2$	
מוט בקצה $I = \frac{1}{3}mL^2$	
כדור מלא במרכז מסה $I_{c.m.} = \frac{2}{5}mR^2$	
תיבה או לוח במרכז מסה $I_{c.m.} = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$	

נוסחה המקשרת בין צירים שונים: $I_z = I_x + I_y$
אם $I_x = I_y$ (בדר"כ מסימטריה) אז $I_z = 2I_x$
מבנה הגוף **סימטרי לאורך ציר Z**: מומנט ההתמד של הגוף סביב ציר Z יהיה כמו של גוף משטחי במישור xy .
לדוגמה מומנט ההתמד של גליל יהיה כמו של דיסקה ומומנט ההתמד של קוביה יהיה כמו של מלבן שהוא בסיס הקוביה.
חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח: $I = \int r^2\,dm$
כאשר r הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית). אם ציר הסיבוב הוא ציר z: $r^2 = x^2 + y^2$

מומנט כוח GOOL

מומנט כוח: $\vec\tau = \vec r\times\vec F$
כאשר $\vec r$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)
גודל המומנט: $|\vec\tau| = |\vec r||\vec F|\sin\alpha = |\vec F|r_\perp$
כאשר $r_\perp$ הוא הרכיב של $\vec r$ המאונך לכוח
כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

גוף קשיח GOOL

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)
תנע קווי של גוף קשיח: $\vec p = M\vec v_{c.m.}$
תנ"ז:
- גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית): $\vec L = \vec r_{c.m.}\times\vec p_{c.m.}$
- תנ"ז גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע: $\vec L = I\vec\omega$

כאשר I מומנט ההתמד ביחס לציר

- תנ״ז של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב מרכז המסה): $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר $\vec{L}_{c.m.}$ הוא התנ״ז ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל- $\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.}\vec{\omega}$

<u>אנרגיה קינטית סיבובית</u>:

- סביב ציר **קבוע** כלשהו: $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
- תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה): $E_k = \frac{1}{2}mv_{c.m.}^2 + \frac{1}{2}I_{c.m.}\omega^2$
- תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (*):

$$E_k = \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2 + m\vec{r}_{c.m.,o} \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$$

כאשר I_0 מומנט ההתמד ביחס לציר, $\vec{v}_0$ היא מהירות הציר ו- $\vec{r}_{c.m.,o}$ הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר.
(*)השימוש בנוסחה מאוד נדיר

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

תנועה סיבובית	תנועה בקו ישר
θ	x
$\omega = \dot{\theta}$	$v = \dot{x}$
$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$	$a = \dot{v} = \ddot{x}$
I	m
L	p
τ	F

<u>גלגול ללא החלקה</u>: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח מתאפסת (ביחס למשטח)← $v_{c.m.} = \omega R$; $a_{c.m.} = \alpha R$

- בגל״ה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.

<u>איך נגשים לשאלות?</u>

חוקי שימור | דרך כוחות ומומנטים

בודקים מה נשמר:
1. אנרגיה אם כל הכוחות משמרים.
2. תנע קווי אם סכום הכוחות החיצוניים מתאפס.
3. תנ"ז אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס.

עושים:
1. חוק II: $\Sigma F = ma_{c.m}$
2. משוואת מומנטים: $\Sigma\tau = I\alpha$
3. קשר בין התאוצות, לדוגמה $a_{c.m} = \alpha R$

תנועה מחזורית GOOL

<u>תנועה מחזורית</u>: היא תנועה המורכבת מקטע תנועה מסוים החוזר על עצמו באופן מדויק כל מרווח זמן קבוע.
הגדרה: תנועה מחזורית היא תנועה שבה קיים T קבוע עבורו מתקיים $\vec{x}(t) = \vec{x}(t+T)$ לכל $\vec{x}(t)$ כאשר T הוא זמן המחזור. שימו לב, כל תנועה הרמונית היא תנועה מחזורית אבל לא כל תנועה מחזורית היא הרמונית.
בתנועה הרמונית יש תנאים נוספים שהכוח ביחס ישר למיקום.

תנועה הרמונית GOOL

<u>המיקום כתלות בזמן בתנועה הרמונית</u>:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- הראשית היא בנקודת שיווי המשקל.
- נקודת שיווי המשקל היא הנקודה שבה סכום הכוחות שווה לאפס (התאוצה גם שווה לאפס והמהירות מקסי')

A - אמפליטודת התנועה, מרחק מקסימאלי משווי משקל.
ω - תדירות זוויתית. φ – פאזה.

<u>המהירות בתנועה הרמונית</u>: $v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$

<u>התאוצה בתנועה הרמונית</u>: $a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$

<u>קשר בין התדירות הזוויתית (אומגה) לתדירות וזמן המחזור</u>: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

<u>עבור מסה המחוברת לקפיץ</u>: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

כאשר k הוא קבוע הקפיץ ו- m היא מסת הגוף.

<u>הפאזה</u>: $\varphi = \omega \cdot t_0$

כאשר t_0 הוא הזמן שעבר מהרגע שבו הגוף היה בקצה החיובי עד ש $t = 0$ (מתחילים למדוד את התנועה)

<u>בדר״כ נמצא את A ו- φ מתנאי התחלה</u>:

$$x(t=0) = A\sin\varphi \quad ; \quad v(t=0) = -\omega A\sin\varphi$$

<u>מהירות ותאוצה מקסימליים</u>:

$$v_{max} = \pm\omega A \quad ; \quad a_{max} = \pm\omega^2 A$$

<u>תוספת של כוח קבוע למערכת</u>: משנה רק את נקודת שיווי המשקל (ולא את התדירות). במקרה כזה נקודת שיווי המשקל לא תהיה הנקודה שבה הקפיץ רפוי וצריך להבחין ביניהם. מקרה נפוץ הוא של **קפיץ אנכי.** בקפיץ אנכי כוח הכובד הוא כוח קבוע, הוא לא משפיע על התנועה למעט שינוי נקודת שיווי המשקל. אפשר לחשוב שכוח הכובד גורם למתיחה התחלתית של הקפיץ עד לנקודה שבה כוח הקפיץ שווה לכוח הכובד (נקי ש.מ. חדשה) משם התנועה תהיה כרגיל. אפשר לקבוע את x=0 בנקודת ש.מ ולהתעלם מהכובד.

<u>האנרגיה בתנועה הרמונית</u>:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

תנועה הרמונית פשוטה GOOL

<u>משוואת התנועה:</u> $-k(x - x_0) = m\ddot{x}$

k ו- m הם קבועים **חיוביים** כלשהם.
x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.
$\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.
חייב להיות מינוס לפני k.

<u>פתרון המשוואה</u>: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + x_0$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma\vec{F} = 0$.
A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משוויי המשקל.
ω - תדירות זוויתית $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.
φ - פאזה.

<u>מציאת הקבועים בפתרון:</u>

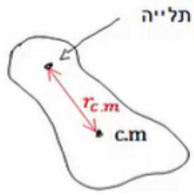
x_0 - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{x \text{ של המקדם}}{\ddot{x} \text{ של המקדם}}}$$

φ, A מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.

<u>נוסחה למהירות המקסימאלית:</u> $v_{max} = \omega A$

<u>מטוטלת פיזיקאלית:</u>
גוף קשיח שתולים בנקודה כלשהיא



$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$$

I_0 – מומנט ההתמד בנקודת התליה

<u>האנרגיה</u>: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}mA^2$

- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
- חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.

<u>בור פוטנציאל</u>: כאשר גוף נע בסביבה קרובה מאוד למינימום של הפוטנציאל (האנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית במינימום) אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

x_0 - מיקום נקי' המינימום, ו- $U''(x_0)$ נגזרת שניה בנקודה.

תנועה הרמונית מרוסנת GOOL

בנוסף לכוח הקפיץ נוסף <u>כוח מרסן</u> מהצורה: $F = -\lambda v$

v – מהירות הגוף ו- λ קבוע.

<u>משוואת התנועה:</u> $\ddot{z} + \Gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$

כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

<u>פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:</u>

<u>מקרה (I) - ריסון חזק</u>: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$

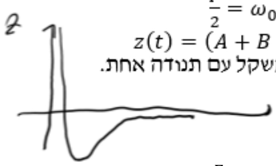
אין תנודות

$$z(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\cdot t} + Be^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\cdot t}\right)$$

<u>מקרה (II) - ריסון קריטי</u>: $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$

$$z(t) = (A + B\cdot t)\cdot e^{-\omega_0 \cdot t}$$

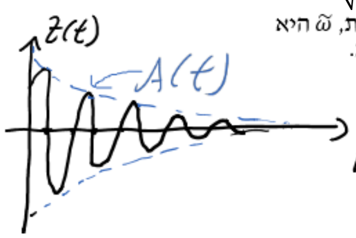
דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.



<u>מקרה (III) - ריסון חלש</u>: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

$$z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi) \; ; \; \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.



תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת GOOL

בנוסף לכוח הקפיץ והמרסן נוסף <u>כוח מאלץ</u> מהצורה:

$$\vec{F}(t) = F_0\sin(\Omega t)$$

Ω ו- F_0 קבועים כלשהם

<u>משוואת התנועה</u>: $\ddot{z} + \Gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$

<u>פתרון משואת התנועה</u>:

$$x(t) = A(\Omega)\sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...
- במצב עמיד (לאחר זמן רב) נזניח את הפתרון ההומוגני.

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2\Omega^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma\,\Omega}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2\Omega^2}}$$

<u>תדירות תהודה</u>: התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי. ניתן למצא אותה ע״י נגזרת של A לפי Ω . אם $\Gamma \ll \omega_0$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות התנועה ההרמונית ללא כוח מאלץ ומרסן)

כבידה GOOL

<u>החוק השלישי של קפלר</u>: $\left(\frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$

$\bar{r}$ – רדיוס הקפה ממוצע של כל גרם שמיים.
T – זמן המחזור של כל גרם שמיים.

<u>גודל כוח הכבידה בין שני גופים</u>: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ – קבוע הכבידה האוניברסלי.
m – מסות הגופים. r - המרחק בין מרכזי הגופים.

<u>אנרגיה פוטנציאלית כובדית</u>:

$$U_G = -\frac{GMm}{r} \qquad (U_{G(r\to\infty)} = 0)$$

M – מסת הגוף המשפיע. m – מסת הגוף המושפע.
r – מרחק בין הגופים.

<u>אנרגיה של לוויין במסלול מעגלי</u>:

קינטית: $E_k = \frac{GMm}{2r} = -\frac{U_G}{2}$

כוללת: $E = -\frac{GMm}{2r}$