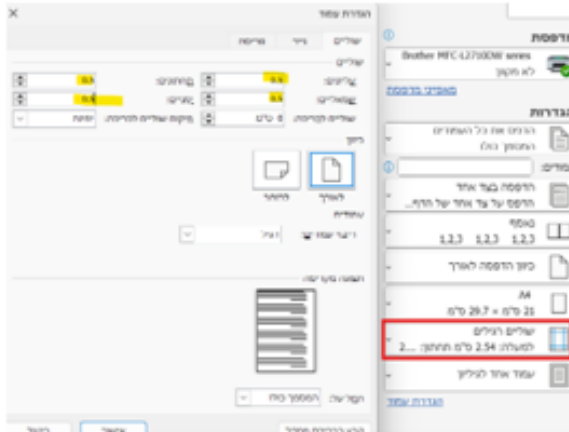


## הוראות לדף הנוסחאות

הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות  
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השולים, לבחור שולים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים



עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:

הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באות  
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון  
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.



כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאטר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$   
 $\gamma$  – הזווית מול הצלע  $c$  (יכולה להיות כל צלע במשולש).  
משפט הסינוסים (לכל סוגי המשולשים):

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$\gamma$  הזווית מול הצלע  $c$ ,  $\beta$  הזווית מול  $b$ ,  $\alpha$  הזווית מול  $a$  המהירות שמודד מד לייזר:

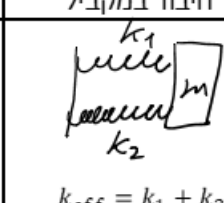
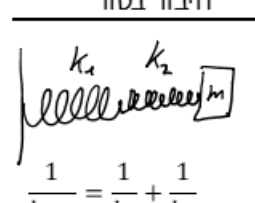
$$\vec{v} = \frac{d}{dt} |\vec{r}| = \frac{\dot{x} \cdot \hat{x} + \dot{y} \cdot \hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- מהירות זו היא הרכיב הרדיאלי של המהירות או הרכיב של המהירות שמקבל לוקטור המיקום של הגוף ביחס לצופה המודד.

### קפיצים

חוק הוק – הכוח של קפיץ:  $F = -k(x - x_0)$

כאשר  $x$  הוא מיקום הגוף ו- $x_0$  המיקום שבו הקפיץ רפוי.

| חיבור במקביל                                                                        | חיבור בטור                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |

### תנועה מעגלית (ברדיוס קבוע)

דרך בתנועה מעגלית:  $S = \Delta \theta \cdot R$   
- הדרך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל.  $\Delta \theta$  היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!

גודל המהירות הקווית הרגעית (speed):  $v(t) = \frac{ds}{dt}$   
- כיוון המהירות תמיד משיק למעגל

מהירות זוויתית:  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$f$  – התדירות,  $T$  – זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)

קשר בין המהירות הקווית לזוויתית:  $v = \omega R$

תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל):  $a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

הכוחות למרכז המעגל:  $\Sigma F_{\text{למרכז}} = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R$

תאוצה זוויתית:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

תאוצה משיקית (רק בתנועה לא קצובה):  $a_\theta = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \alpha R$

הגובה במעגל אנכי:  $h = R(1 - \cos \theta)$   
- כאשר  $h$  ו- $\theta$  נמדדים מתחתית המעגל.

הכוח הצנטריפוגלי:  $F_r = m \omega^2 R$   
- בכיוון החוצה מהמעגל.

- שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

וקטור המיקום:  $\vec{r} = R \cos \theta \hat{x} + R \sin \theta \hat{y}$

הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית:  $\vec{a}_\theta = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

קואורדינטות פולריות

$x = r \cos \theta$ ;  $y = r \sin \theta$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$ ;  $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$   
 $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = r\hat{r}$ ;  $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

### כוחות מדומים

כוח מדומה מוסיפים רק כאשר הצופה נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אין כוחות מדומים ולא תלוי בתנועת הגוף.

החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה:

$$-m\vec{a}_0 + \Sigma \vec{F}_{\text{אמיתיים}} = m\vec{a}'$$

$\vec{a}'$  היא תאוצת הגוף ביחס לצופה.

אמיתיים  $\Sigma \vec{F}$  הם כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.

" $-m\vec{a}_0$ " – הוא הכוח המדומה כאשר  $m$  היא מסת הגוף הנמדד ו- $\vec{a}_0$  היא תאוצת הצופה.

הכוחות מדומים הנוספים במקרה של צופה מסתובב במהירות זוויתית קבועה:

הכוח הצנטריפוגלי:  $\vec{F} = m\omega^2 r \hat{r}$

או בצורה יותר כללית:  $\vec{F} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

כוח קוריאוליס:  $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

כאשר  $\vec{v}'$  בשתי הנוסחאות  $\omega$  הוא של הצופה (ולא של הגוף)

$\vec{v}'$  – מהירות הגוף ביחס לצופה.  
 $\vec{r}'$  – וקטור המיקום של הגוף

כאשר הצופה מסתובב במהירות זוויתית משתנה אז נוסף את כוח אוילר:

$$\vec{F}' = -m\vec{\omega} \times \vec{r}'$$

(שימו לב שיש נגזרת בזמן מעל אומגה)

כוח ציפה: פועל על גוף בנוזל. כיוונו הפוך לכוח הכובד.

כאשר  $\rho_l$  היא צפיפות הנוזל ו- $V$  הוא נפח הגוף.

כוח גרר וכוח ציפה

כוח גרר הוא כוח מהצורה:  $\vec{F} = -k\vec{v}$

כאשר  $\vec{v}$  היא מהירות הגוף ו- $k$  הוא קבוע כלשהו.

משוואת התנועה – משוואה הכוללת את  $x$ ,  $v$  ו- $a$ . בדרכ מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.

מהירות סופית – המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)

כוח סטוקס – כוח גרר שפועל על כדור בתנועה נוזל:

$$\vec{F}_b = -6\pi\eta R \vec{v}$$

$\eta$  – מציגות הנוזל,  $R$  – רדיוס הכדור

עבודה ואנרגיה

עבודה של כוח קבוע:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \alpha = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

כאשר  $\alpha$  היא הזווית בין הכוח להעתק.

העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת. אם הגוף לא זז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).

הקשר בין העבודה כוללת לאנרגיה קינטית:

$$W_{SF} = \Delta E_k$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

כוח משמר:

העבודה במסלול סגור מתאפסת.

יש לו אנרגיה פוטנציאלית כך ש:

$$W_c = -\Delta U$$

$$U_g = mgh$$

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

כאשר  $x$  ההתארכות הקפיץ ממצב רפוי ו- $k$  קבוע הקפיץ.

חץ מ- $U_g$  ו- $U_{el}$  יכולים להיות עוד כוחות משמרים ועבורם יהיו עוד אנרגיות פוטנציאליות

אנרגיה (מכאנית) כללית:  $E = E_k + U$

כוח משמר:  $U_i + W_{NC} = E_f$

אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות היא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת

העבודה של כוח לא קבוע:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

בשביל הנוסחה צריך גם משוואה של המסלול.

דוגמה בן-מימד: נתון  $x(t) = 5t^3$ , באמצעות המשוואה עוברים משתנה אחד. בדוגמה, נציב באינטגרל במקום  $y$  את  $x^5$  ו- $dx$  נגזרת  $dy$ , בדוגמה  $5x^4 dx$ .

הגבולות של המשתנה אליו עברנו (בדוגמה גבולות של  $x$ ) אין בודקים אם כוח הוא משמר:

אם ורק אם  $\vec{F} \times \vec{r} = 0$ , אז הכוח משמר.

נוסחת הרוטור בפרק וקטורים.

הערה: צריך שכל רכיב יתאפס בנפרד.

נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר:  $\Sigma \vec{F} = 0$  או  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$

שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתווזה קטנה):  $U''_x > 0$

שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתווזה קטנה):  $U''_x < 0$

שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה

- אם יש כמה ממדים אז  $\vec{U} = 0$

שיווי משקל יציב – כל הנגזרות השניות גדולות מאפס

שיווי משקל רופף – כל הנגזרות השניות קטנות מאפס

אוכף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס

חישוב אנרגיה פוטנציאלית מכוח משמר:

נתונה פונקציית כוח וצריך למצוא  $U$  שמקיימת

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$$

$$U = -\int F_x dx + g(y, z)$$

שלב 1 – נעשה  $g(y, z)$  כאשר פונקציה כללית שתלויה רק ב  $y, z$

$$F(x, y, z) = 2xyz\hat{x} + (zx^2 + 3)\hat{y} + yx^2\hat{z}$$

$$U = -\int 2xyz dx + g(y, z) = -x^2yz + g(y, z)$$

שלב 2 – נעשה  $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$  ומשם נמצא את  $g(y, z)$

באמצעות אינטגרל על  $y$  ונוסיף  $h(z)$ . בדוגמה:

$$-x^2z + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = -(zx^2 + 3) \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -F_y$$

$$g(y, z) = -3y + h(z) \quad h(z) = -x^2yz - 3y + h(z)$$

עכשיו  $U = -x^2yz - 3y + h(z)$

שלב 3 – נעשה  $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$  ומשם נמצא את  $h(z)$  באמצעות אינטגרל על  $z$  ונוסיף קבוע. בדוגמה:

$$-x^2y + \frac{\partial h(z)}{\partial z} = -yx^2 \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$$

$$h(z) = C$$

$$U = -x^2yz - 3y + C$$

שלב 4 – בשביל למצוא את  $C$  צריך תנאי על האנרגיה לדוגמה  $U(0,0,0) = 0$ , אם אין תנאי נשאר את  $C$ .

- אם אין תלות ב- $z$  בבעיה אז רק שלבים 1-2 וקבוע.

### הספק ונצילות

הספק ממוצע:  $P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$

הספק רגעי:  $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos \alpha$

$\vec{F}$  – הכוח שפועל על הגוף ו- $\vec{v}$  היא מהירות הגוף.

נצילות:  $\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{W_{out}}{E_{in}}$

כאשר  $out$  מציין את החלק המנוצל על ידי המערכת ו- $in$  מציין את כל מה שמושקע.

### מתקן ותנועה

התנועה של גוף:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

המתקן של כוח:

$$\vec{J} = \int \vec{F} dt$$

המתקן הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות בזמן (לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות במיקום).

המתקן הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנועה שלו:

$$\vec{J}_{SF} = \Delta \vec{p}$$

חוק שימור התנועה: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנועה הכולל של המערכת נשמרת.

הנוסחה לשימור תנע:  $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$

בד"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.

התנגשויות אלסטיות: יש גם שימור אנרגיה ונוסיף למשוואות התנועה את המשוואה:  $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$

אם ההתנגשויות חזיית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרשום:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2$$

התנגשויות אלסטיות לא חזייתיות בין שני גופים בעלי מסות שוות ואחד הגופים במנוחה לפני ההתנגשות: הזווית בין המהירויות אחרי ההתנגשות תהיה 90 מעלות.

התנגשויות פלסטיות (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$$

בהתנגשויות פלסטיות לא יכול להיות שימור אנרגיה. התנגשויות שחן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.

התנגשויות קצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להזניח את ההשפעה (המתקן) של כוחות קבועים כמו הכובד.

מקדם תקבומה:  $e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$

בין 0 ל 1, ככל שיותר גבוה יותר אנרגיה נשמרת אך לא ניתן לדעת כמה. שווה 1 באלסטיות ו-0 בפלסטיות.

התנגשויות ללא שימור תנע: אם בפגיעה הנורמל גדול מאוד אז לא נזיח אותו ונחשב את המתקן שלו והשינוי בתנועה של המערכת כתוצאה מכך. בנוסף גם החיכוך הקינטי יכול להיות מאוד גדול בעקבות הנורמל ונחשב גם בו.

### מסה משתנה

הנוסחה  $\vec{F} = m\vec{a}$  לא נכונה עבור גוף שהמסה שלו משתנה. נעבור לניסוח הכללי יותר של חוק שני:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

נוסחה כללית לתנועה גופים שפולטים מסה:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt}$$

כאשר  $\frac{dm}{dt}$  הוא קצב הפליטה (חיובי) כאשר חומר יוצא מהגוף ושילי אם חומר נכנס לגוף).

$\vec{v}_{rel}$  – מהירות החומר שנפלט ביחס לגוף (אם החומר נפלט אחורה אז היא צריכה להיות שלילית)

$ext$  – הכוונה לסכום הכוחות החיצוניים

### מרכז מסה

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

מיקום מרכז המסה:

ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x:

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

מהירות מרכז המסה:

$$\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

תאוצת מרכז המסה:

$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממשיכה בהתאמה.

מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים): עושים מרכז מסה בין מרכזי המסה.

גוף עם חור: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מרכז מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.

תאוצת מרכז המסה תלויה רק בכוחות החיצוניים:

$$\Sigma F_{ext} = m a_{c.m.}$$

אם אין כוחות חיצוניים (ומרכז המסה במנוחה בהתחלה) אז מיקום מרכז המסה נשמר. ניתן לעשות "שימור מרכז מסה" לחשב אותו בהתחלה ובסוף ולהשוות. בשביל למצוא מרכז מסה של גוף גדול נשתמש באינטגרל:

$$x_{c.m.} = \int x dm$$

כנ"ל לגבי z, x, y, לחישוב הסתכלו במבוא המתמטי. מערכת מרכז המסה:

התנע הכולל של מערכת:  $\vec{p}_T = M\vec{v}_{c.m.}$ . ניתן להסתכל על מערכת גופים כגוף נקודתי שמסתו היא סכום המסות ומהירותו היא מהירות מרכז המסה. מערכת מרכז המסה היא מערכת שזזה ביחד עם נקודת מרכז המסה. בשביל למצוא את מהירות הגופים במערכת מרכז המסה נשתמש בטרנספורמציות גליליי.

במערכת מרכז המסה התנע הכולל של המערכת הוא אפס ולכן, במקרה של שני גופים, הגופים תמיד ינועו על ציר אחד. אם ההתנגשות אלסטית, גודל המהירות של כל גוף נשמר.

## גודל המומנט

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)

מומנט התמד של מערכת גופים נקודתיים:  $I = \sum m_i r_i^2$ . משפט שטיינר:  $I' = I_{c.m.} + md^2$

כאשר d הוא המרחק בין הצירים ו m היא המסה הכוללת של הגוף. הערה: משפט שטיינר פועל רק לצירים מקבילים, ורק כאשר אחד הצירים עובר במרכז המסה. אדטיביות: ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל.  $I_T = I_1 + I_2$

|                                                  |              |           |
|--------------------------------------------------|--------------|-----------|
| גוף נקודתי סביב ציר כלשהו:                       | גוף נקודתי   | גליל חלול |
| $I = mR^2$                                       |              |           |
| טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי:                | טבעת (חלולה) |           |
| $I_{c.m.} = mR^2$                                |              |           |
| דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר z- אנך לדיסקה |              |           |
| $I_{c.m.} = \frac{1}{2} mR^2$                    |              |           |
| דיסקה במרכז מסה סביב ציר x- במישור הדיסקה        |              |           |
| $I_{c.m.} = \frac{1}{4} mR^2$                    |              |           |
| מוט במרכז המסה                                   |              |           |
| $I_{c.m.} = \frac{1}{12} mL^2$                   |              |           |
| מוט בקצה                                         |              |           |
| $I = \frac{1}{3} mL^2$                           |              |           |
| כדור מלא במרכז מסה                               |              |           |
| $I_{c.m.} = \frac{2}{5} mR^2$                    |              |           |
| תיבה או לוח במרכז מסה                            |              |           |
| $I_{c.m.} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$             |              |           |

נוסחה המקשרת בין צירים שונים:  $I_z = I_x + I_y$

אם  $I_x = I_y$  (בדרכי מסמטריה) אז  $I_z = 2I_x$ . מבנה הגוף סימטרי לאורך ציר z: מומנט ההתמד של הגוף סביב ציר z יהיה כמו של גוף משטחי במישור xy. לדוגמה מומנט ההתמד של גליל יהיה כמו של דיסקה ומומנט ההתמד של קוביה יהיה כמו של מלבן שהוא בסיס הקוביה.

חישוב עם אינטגרל, עבור גוף קשיח:  $I = \int r^2 dm$ . כאשר r הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית) ו a, c ציר הסיבוב הוא ציר z:  $r^2 = x^2 + y^2$

## גודל המומנט

מומנט כוח:  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

כאשר  $\vec{r}$  הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)

גודל המומנט:  $|\vec{\tau}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| r_{\perp}$ . כאשר  $r_{\perp}$  הוא הרכיב של  $\vec{r}$  המאונך לכוח כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

## תנע זוויתי (תנ"ז)

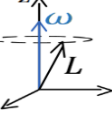
תנ"ז:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ .  $\vec{r}$  הוא וקטור המיקום של הגוף,  $\vec{p}$  התנע הקווי עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי:  $|\vec{L}| = mvd$

כאשר d הוא המרחק האפקטיבי. v - המהירות. הקשר בין תנ"ז למומנט כוח:  $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

חוק שימור התנע הזוויתי: אם  $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$  אז התנע הזוויתי נשמר תנ"ז של תנועה משולבת, מערכת גופים שמסתובבים סביב מרכז מסה שני:  $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר  $\vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$  זה התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת ו-  $\vec{L}_{c.m.}$  התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר סך התנ"ז של הגופים במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.

פרצסיה (נקיפה): לתנע הזוויתי יש רכיב במישור xy שמסתובב סביב ציר z. נגזרת בזמן של הרכיב הזה נותנת לנו את מומנט הכוח שפועל על המערכת.



## גוף קשיח

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)

תנע קווי של גוף קשיח:  $\vec{p} = M\vec{v}_{c.m.}$ . תנ"ז:  $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$

גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית):  $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$

תנ"ז גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע:  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ . כאשר I מומנט ההתמד ביחס לציר תנ"ז של תנועה משולבת (הגוף גם זז וגם מסתובב סביב מרכז המסה):  $\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$

כאשר  $\vec{L}_{c.m.}$  הוא התנ"ז ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל-  $\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.} \vec{\omega}$ . אנרגיה קינטית סיבובית:  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

סביב ציר קבוע כלשהו: תנועה משולבת (גוף נע ומסתובב סביב מרכז המסה):  $E_k = \frac{1}{2} m v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} I_{c.m.} \omega^2$

תנועה משולבת שהסיבוב אינו סביב מרכז מסה (\*):  $E_k = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + m \vec{r}_{c.m.,0} \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$

כאשר  $I_0$  מומנט ההתמד ביחס לציר,  $\vec{v}_0$  היא מהירות הציר ו-  $\vec{r}_{c.m.,0}$  הוא מיקום מרכז המסה ביחס לציר. השימוש בנוסחה מאוד נדיר

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

| תנועה סיבובית                           | תנועה בקו ישר            |
|-----------------------------------------|--------------------------|
| $\theta$                                | x                        |
| $\omega = \dot{\theta}$                 | $v = \dot{x}$            |
| $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ | $a = \dot{v} = \ddot{x}$ |
| I                                       | m                        |
| L                                       | p                        |
| $\tau$                                  | F                        |

לגולל ללא החלקה: מהירות הנקודה שנוגעת במשטח מתאפסת (ביחס למשטח)  $v_{c.m.} = \omega R$ ;  $a_{c.m.} = \alpha R$ . בגל"ה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.

## אין נגשים לשאלות?

חוקי שימור: בודקים מה נשמר: 1. אנרגיה אם כל הכוחות משמרים. 2. תנע קווי אם סכום הכוחות החיצוניים מתאפס. 3. תנ"ז אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס.

## תנועה הרמונית פשוטה

משוואת התנועה:  $-k(x - x_0) = m\ddot{x}$ . k ו- m הם קבועים חיוביים כלשהם.  $x_0$  - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי. x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זוויתי או משתנה אחר.  $\ddot{x}$  - נגזרת שניה של המשתנה. חייב להיות מינוס לפני k.

פתרון המשוואה:  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$ .  $x_0$  - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה  $\sum \vec{F} = 0$ . A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משווי המשקל.  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  - תדירות זוויתית

מציאת הקבועים בפתרון:  $\varphi$ , A מוצאים מתנאי התחלה  $x(0)$  ו-  $\dot{x}(0)$ . נוסחה למהירות המקסימאלית:  $v_{max} = \omega A$

מטוטלת פיזיקאלית: גוף קשיח שתולים בנקודה כלשהי

תלייה:  $\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$ .  $I_0$  - מומנט ההתמד בנקודת התלייה

האנרגיה:  $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m A^2$ . האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.

חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי בקצוות והקינטית בשיווי משקל. בור פוטנציאלי: כאשר גוף נע בסביבה קרובה מאוד למינימום של הפוטנציאל (האנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית במינימום) אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$ .  $x_0$  - מיקום נק' המינימום, ו-  $U''(x_0)$  נגזרת שניה בנקודה.

## תנועה הרמונית מרוסנת

בנוסף לכוח הקפיץ נוסף כוח מרוסן מהצורה:  $F = -\lambda v$ . מהירות הגוף ו-  $\lambda$  קבוע.

משוואת התנועה:  $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ . כאשר  $z = x - x_0$ ,  $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים: מקרה (I) - ריסון חזק:  $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$

אין תנודות

מקרה (II) - ריסון קריטי:  $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$

מקרה (III) - ריסון חלש:  $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

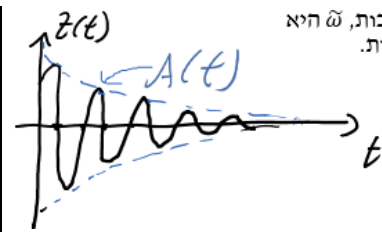
דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

מקרה (I) - ריסון חזק:  $z(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left( A e^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}t} + B e^{-\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}t} \right)$

מקרה (II) - ריסון קריטי:  $z(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}$

מקרה (III) - ריסון חלש:  $z(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$ ;  $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$

יש תנודות דועכות,  $\tilde{\omega}$  היא תדירות התנודות.



## תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת GOOL

בנוסף לכוח הקפיץ והמרסן נוסף כוח מאולץ מהצורה:

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

$\Omega$  ו-  $F_0$  קבועים כלשהם

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

משוואת התנועה:

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

פתרון משוואת התנועה:

$$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$$

( $t$ ) הומוגני - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...

- במצב עמיד (לאחר זמן רב) נזניח את הפתרון ההומוגני.

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה  $A(\Omega)$

מקסימאלי. ניתן למצוא אותה ע"י נגזרת של  $A$  לפי  $\Omega$ . אם

$\omega_0 \ll \Gamma$  אז תדירות התהודה היא בקירוב  $\omega_0$  (תדירות

בוואקום. מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס

## יחסות פרטית GOOL

תיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות (אינרציאליות).

## עקרונות יסוד בתורת היחסות:

- חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.

- האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.

- מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.

- אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור

- בוואקום. מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.

- הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם:  $x, y, z$ ) שעוברת טרנספורמציה.

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \beta = \frac{v_0}{c}$$

פקטור גאמה

$\gamma_0$  תמיד גדולה מ 1

טרנספורמצית לורנץ למיקום והזמן:

$$x' = \gamma_0(x - v_0 t); y' = y; z' = z$$

$$t' = \gamma_0\left(t - \frac{v_0 x}{c^2}\right); \beta = \frac{v_0}{c}; \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$x = \gamma_0(x' + v_0 t'); y = y; z = z$$

$$t = \gamma_0\left(t' + \frac{v_0 x'}{c^2}\right)$$

- הצירים של המערכות חייבים להיות מקבילים.

- בזמן  $t = t' = 0$  חייבים שהראשיות מתלכדות.

המערכת העצמית:

מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

- זמן עצמי  $\tau$  מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות

כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

- אורך עצמי  $l_0$  האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף

נמצא במנוחה.

התכונות האורך: שינוי האורך ממערכת המנוחה

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$$

(העצמית) למערכת נעה

התארכות הזמן: שינוי הזמן ממערכת המנוחה (העצמית)

למערכת נעה

$$\Delta t = \gamma_0 \tau$$

שינוי זווית במדידת אורך:

$$\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$$

$\theta'$  - זווית ביחס לציר ה  $x$  (ציר התנועה) במערכת העצמית

$\theta$  - זווית ביחס לציר ה  $x$  (ציר התנועה) במערכת אחרת.

אפקט דופלר היחסות:

$$T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tau$$

זמן המחזור של הגל:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda'$$

אורך הגל:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f'$$

תדירות הגל:

$\lambda', f', \tau$  - הזמן, התדירות ואורך הגל במערכת העצמית

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}; \text{טרנספורמצית לורנץ למהירויות}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}; v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

אברציה - שינוי זווית המהירות:

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0 \left(\cos \theta - \frac{v_0}{c}\right)}$$

שימו לב שפה השינוי הוא בזווית של וקטור המהירות (כיוון התנועה) ולא שינוי זווית של הגוף כמו למעלה.

תנע ואנרגיה יחסותיים:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}; E = \gamma m c^2$$

- הגודל  $\gamma$  קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ולא למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות.

נוסחאות נוספות:

$$E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4; |p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot m c$$

$$E_0 = m c^2$$

אנרגיית מנוחה:

$$E_k = E - E_0 = m c^2 (\gamma - 1)$$

אנרגיה קינטית:

$$E = |p| c = h \nu$$

ניוטרינו) והאנרגיה הקינטית היא:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$\nu$  היא התדירות ו-  $h$  קבוע פלאנק

טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:

$$E' = \gamma_0 (E - v_0 p_x); p'_x = \gamma_0 (p_x - v_0 E / c^2)$$

$$p'_y = p_y; p'_z = p_z$$

$$\left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c}\right)$$

וקטור תנע אנרגיה:

"גודל הוקטור"מינוס באנרגיה) זהה בכל מערכות הייחוס:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = \text{const}$$

- הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.

- עבור גוף יחיד הקבוע הוא:  $m^2 c^2$ .

פיזור קומפטון:

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.

$$E_\gamma - \text{פוטון פוגע}$$

$$E'_\gamma - \text{פוטון לאחר הפגיעה}$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$