

הוראות לדף הנוסחאות



הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמים
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את
חלון השוליים, לבחור שוליים מותאמים אישית
ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים

עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר
העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים,
תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.
בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.
אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

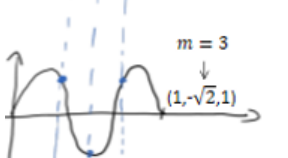
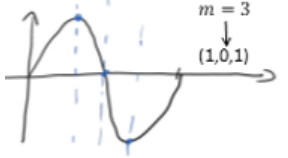
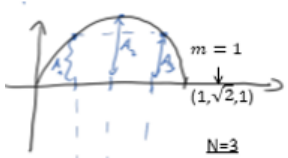
מבנה הדף:



הדף בנוי משלושה טורים.
ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.
בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באותו
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.
ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר
מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.

כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאתר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים
בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.



GOOL **משתנה רציף**

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2}$$

z - מיקום המסה ; Ψ - העתק משווי משקל
 ρ - צפיפות המסה של המערכת , כאשר Δz הוא המרווח בין שתי מסות בשווי משקל (הולך לאפס)
 $E = k \Delta z$ - מודול האלסטיות

GOOL **אנליזה פורייה**

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right]$$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).
 הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2 .

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

מכפלה פנימית:
 פונקציות אורתוגונליות:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.
 טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx$$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx$$

טור אקספוננציאלי:
 $C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$, $C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} dx$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננציאלי לטור סינוסים וקוסינוסים:

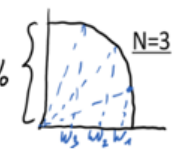
$$A_n = C_n + C_{-n} \quad , \quad B_n = i(C_n - C_{-n})$$

$$C_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n) \quad , \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(B_n + iA_n) \quad , \quad \frac{A_0}{2} = C_0$$

תופעת גיבס:
 קרוב לנקודות האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.

אמפליטודות המודים העצמיים
 נצייר לכל מוד סינוס עם m חצאי סינוס. נחלק את המקטע ל- $N+1$ חלקים שווים

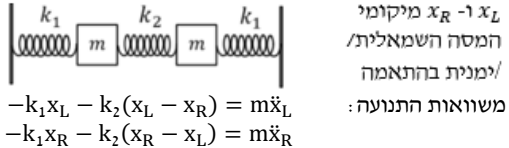
התדירויות: נצייר מעגל ברדיוס $2\omega_0$ ונחלק ל- $N+1$ גזרות שוות.



$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

תדירות תהודה: התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלית. ניתן למצוא אותה ע"י נגזרת של A לפי Ω . אם $\Gamma \ll \omega_0$ אז תדירות התהודה היא בקירוב ω_0 (תדירות התנועה ההרמונית ללא כוח מאלץ ומרסק)

GOOL **מערכת של שתי מסות**



$$-k_1 x_L - k_2 (x_L - x_R) = m \ddot{x}_L$$

$$-k_1 x_R - k_2 (x_R - x_L) = m \ddot{x}_R$$

החלפת משתנים: $x_s = x_L + x_R$; $x_f = x_L - x_R$

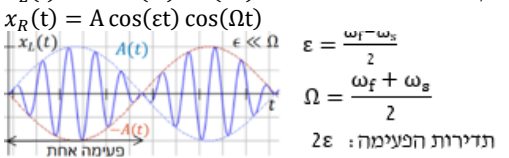
פתרון (מודים עצמיים): $x_s(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$; $x_f(t) = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad \omega_f = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

כאשר -

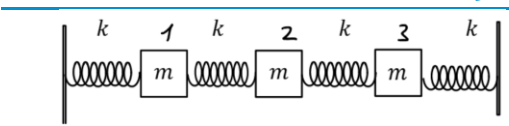
פעילות: עבור: $x_L(0) = \dot{x}_L(0) = \dot{x}_R(0) = 0$; $x_R(0) = R$

מקבלים: $x_L(t) = A \sin(\epsilon t) \sin(\Omega t)$; $x_R(t) = A \cos(\epsilon t) \cos(\Omega t)$



כוח מרסן ומאלץ
 המשוואות והפתרונות עבור x_s ו- x_f הן אלו של תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת
 במקרה $\Gamma \ll 2\omega$ (תדירות הכוח המאלץ, Γ מקדם הכוח המרסק)
 אם $\omega \approx \omega_s$ אז $A_f \gg A_s$ ו- $x_L \approx x_R$ כלומר רק המוד מתעורר (1,1)
 אם $\omega \approx \omega_f$ אז $A_s \gg A_f$ ו- $x_L \approx -x_R$ כלומר רק המוד מתעורר (1,-1)

GOOL **מערכת של שלוש מסות**



$$-k x_1 - k(x_1 - x_2) = m \ddot{x}_1$$

$$-k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) = m \ddot{x}_2$$

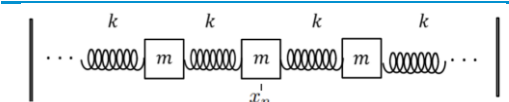
$$-k x_3 - k(x_3 - x_2) = m \ddot{x}_3$$

פתרון (לאחר אלגברה עם מטריצה):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_m t + \phi_m) + A_f \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_f t + \phi_f) + A_s \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_s t + \phi_s)$$

כאשר - $\omega_s = \omega_f = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \omega_0$; $\omega_m = \sqrt{2} \omega_0$
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\sqrt{2 - \sqrt{2}} \omega_0$

GOOL **מערכת N מסות**



המשוואות: $-k(x_n - x_{n-1}) - k(x_n - x_{n+1}) = m \ddot{x}_n$

פתרון כללי: $x_n(t) = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) e^{i\omega t} = C_1 \cos(n\theta) \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin(n\theta) \cos(\omega t + \phi_2)$

כאשר - $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_0^2} \right)$

בתנאי שפה קבועים (קירות): $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^N C_m \sin\left(\frac{n\pi m}{N+1}\right) \cos(\omega_m t + \phi_m)$$

$$\theta_m = \frac{\pi m}{N+1} ; \quad \omega_m = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{2(N+1)}\right)$$

כלומר יש N מודים עצמיים (בתדירויות ω_m) ו- x_n הם קומבינציות לינאריות של המודים האלו. המקדמים C_m ו- ϕ_m נקבעים מתנאי ההתחלה של כל ה- x_n

GOOL **תנועה הרמונית פשוטה**

משוואת התנועה: $-k(x - x_0) = m \ddot{x}$

k ו- m הם קבועים חיוביים כלשהם.
 x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.
 x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או משתנה אחר.
 $\ddot{x}$ - נגזרת שנייה של המשתנה.
 חייב להיות מינוס לפני k .

פתרון המשוואה: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה $\Sigma \vec{F} = 0$.
 A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משווי המשקל.
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - תדירות זוויתית

ϕ - פאזה.
 מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{x}{\ddot{x}}}$$

של המקדם x / של המקדם $\ddot{x}$

ϕ , A מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ ו- $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית: $v_{max} = \omega A$

האנרגיה: $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m A^2$

- האנרגיה הכוללת קבועה ואפשר לחשב אותה דרך האמפליטודה.
 - חילופי האנרגיה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, הפוטנציאלית מקסי' בקצוות והקינטית בשיווי משקל.
בור פוטנציאלי: כאשר גוף נע בסביבה קרובה מאוד למינימום של הפוטנציאל (האנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית במינימום) אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

x_0 - מיקום נק' המינימום, ו- $U''(x_0)$ נגזרת שנייה בנקודה.

GOOL **תנועה הרמונית מרוסנת**

בנוסף לכוח הקפיץ נוסף **כוח מרסן** מהצורה: $F = -\lambda v$

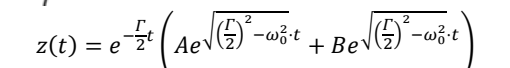
v - מהירות הגוף ו- λ קבוע.

משוואת התנועה: $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$

כאשר $z = x - x_0$, $\Gamma = \frac{\lambda}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

מקרה (I) - ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$
 אין תנודות



$$z(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left(A e^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

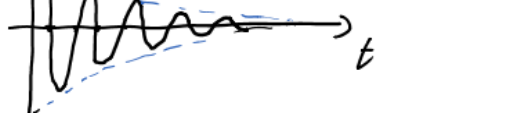
מקרה (II) - ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$
 דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.



מקרה (III) - ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

$$z(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\tilde{\omega} t + \phi) ; \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.



GOOL **תנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת**

בנוסף לכוח הקפיץ והמרסן נוסף **כוח מאלץ** מהצורה:

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

Ω ו- F_0 קבועים כלשהם

משוואת התנועה: $\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$

פתרון משוואת התנועה:

$$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{homog}(t)$$

$x_{homog}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים ...

- במצב עמיד (לאחר זמן רב) נוניח את הפתרון ההומוגני.

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

בנקודת אי הרציפות אנוחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים).

התמרת (טרנספורם) פורייה:

$$f(k)=FT[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\,dx$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(k)e^{ikx}\,dx$$

תכונות:

$$FT[af(x)+\beta g(x)]=\alpha FT[f(x)]+\beta FT[g(x)]$$

אם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\neq 0$ אז $f(x)\in G$ אם $f(x)\in G$ אז $F(k)\in F(k)$ רציפה.

אם $f(x)\in G$ אז $\lim_{k\rightarrow\pm\infty}F(k)=0$,רימן-לבג

אם $f(x)$ זוגית אז $F(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos(kx)\,dx$
אם $f(x)$ אי-זוגית אז:

$$F(k)=-\frac{i}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin(kx)\,dx$$

אם $f(x)$ ממשית אז $\overline{F(k)}=F(-k)$
התמרות של פונקציות מיוחדות:

$$FT[Ae^{-ax^2}]=\frac{Ae^{-\frac{k^2}{4a}}}{2\sqrt{\pi a}}$$

גאוסיאן:

$$FT[Ae^{-a|x|}]=\frac{aA}{\pi(a^2+k^2)}$$

אקספוננט:

$$FT\left[\frac{a}{a^2+x^2}\right]=\frac{1}{2}e^{-a|k|}$$

לורנציאן:

$$FT[\delta(x)]=\frac{1}{2\pi}$$

פונקציית דלתא:

$$FT[1]=\delta(k)$$

קבוע:

נוסחת הכפל באקספוננט , קוסינוס או סינוס (מודולציה):

$$FT[f(x)e^{iCx}]=F(k-C)$$

$$FT[f(x)\cos(Cx)]=\frac{F(k-C)+F(k+C)}{2}$$

$$FT[f(x)\sin(Cx)]=\frac{F(k-C)-F(k+C)}{2i}$$

נוסחת הכיווץ והזזה: $FT[f(ax+b)]=\frac{1}{|a|}e^{i\frac{kb}{a}}F\left(\frac{k}{a}\right)$

נוסחת הנגזרת: אם $f(x),f'(x)\in G$ ו- $\lim_{x\rightarrow\pm\infty}f(x)=0$ אז:

$$FT[f'(x)]=ikF(k)$$

או:

נוסחת המומנט: אם $xf(x)\in G$ אז $F(k)\propto k^2$ (משרעת)

$$FT[xf(x)]=i\frac{d}{dk}F(k)$$

ו- $F(k)\propto A^2$, E , A היא האמפליטודה (משרעת) משוואת הגלים במימד אחד:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

כל פונקציה מהצורה $f(x\pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים.
סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.

התאבכות - סכימה של גלים שנפגשים

חזית גל - אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן

גלים מחזוריים:

λ - אורך הגל; T -זמן המחזור; v - מהירות הגל

תדירות (מספר המחזורים בשנייה):

$$f=\frac{1}{T}$$

גל הרמוני:

$$y(x,t)=A\cos(kx\pm\omega t+\varphi)$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},k$$

גל עומד:

מורכב משני גלים נעים זהים בכיוונים מנוגדים

$$y(x,t)=A\sin(kx)\cos(\omega t+\varphi)=\frac{A}{2}\sin(kx-(\omega t+\varphi))+\frac{A}{2}\sin(kx+(\omega t+\varphi))$$

נקודות צומת (node)- נקודות שלא זזות . אין מהירות גל.

נקודת טבור (antinode) - אמפליטודה מקסימאלית .

פעימות: $\Psi_1(t)=A\cos(\omega_1t)$ ו- $\Psi_2(t)=A\cos(\omega_2t)$

$$\Psi_T(t)=\Psi_1(t)+\Psi_2(t)=2A\cos(\epsilon t)\cos(\Omega t)$$

$$\epsilon=\frac{\omega_f-\omega_s}{2}$$

$$\Omega=\frac{\omega_f+\omega_s}{2}$$

$$\Psi_T(t)=A(t)\cos(\epsilon t)$$

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

משוואת הגלים:

T - המתיחות במיתר, ρ - צפיפות המסה ליחידת אורך, ψ - פונקציית הגל, ההעתק הרוחבי של כל חתיכה במיתר.

$$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

מהירות הגל:

פתרון המשוואה:

$$\psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)+B\sin(kx-\omega t)+C\cos(kx+\omega t)+D\sin(kx+\omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega=v\cdot k$.
אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\begin{aligned}\psi(x,t)&=A_1\cos(kx-\omega t+\phi_1)+A_2\cos(kx-\omega t+\phi_2)=B_1\cos kx\cos\omega t+B_2\cos kx\sin\omega t+B_3\sin kx\cos\omega t+B_4\sin kx\sin\omega t=C_1\cos kx\cos(\omega t+\phi_1)+C_2\sin kx\cos(\omega t+\phi_2)\end{aligned}$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

$$\psi(x,t)=A_1e^{i(kx+\omega t)}+A_2e^{i(kx-\omega t)}+A_3e^{-i(kx+\omega t)}+A_4e^{-i(kx-\omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_4=A_2^*=A_3=A_1^*$ והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}+Be^{-i(kx+\omega t)}$$

פתרון באמצעות נוסחת ד'אלמבר:

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2}[\psi(x-vt,0)+\psi(x+vt,0)]+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\psi(x',0)dx'$$

החזרה והעברה

תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב- $x=0$:

- רציפות הפונקציה: $\psi_L(0,t)=\psi_R(0,t)$
- רציפות הכוח: $F_L=F_R$

אם המתיחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הנגזרת:

$$\frac{\partial\psi_L}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{\partial\psi_R}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

$$\psi_L(x,t)=\psi_r(x,t)+\psi(x,t);\psi_R(x,t)=\psi_t(x,t)$$

$$\psi_r(x,t)=r\psi(-x,t)$$

$$\psi_t(x,t)=t\psi\left(\frac{v_1}{v_2}x,t\right)$$

$$v_1=\sqrt{\frac{T}{\rho_1}}v_2=\sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$$

$$r=\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}=\frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2}-\sqrt{\rho_1}}$$

$$t=\frac{2v_2}{v_2+v_1}=\frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}.$$

הערה: את הנוסחאות של מקדם ההעברה וההחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.

עכבה

$$Z=\sqrt{\rho T}=\frac{T}{v}$$

עכבה (impedance):

$$|Z|=\frac{|F_y|}{|V_y(t)|}$$

F_y - הכוח על אלמנט מסה

$V_y(t)$ - מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)

מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2:

$$r=\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}$$

$$t=\frac{2z_1}{z_1+z_2}$$

$$r=0\rightarrow t=1\Leftarrow z_1=z_2$$

אנרגיה הספק ותנע

אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר

$$\varepsilon(x,t)=\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=\rho v^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho\omega^2|A|^2$$

$$P^{\pm}=\pm Z\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2=\pm v\varepsilon(x,t)$$

$P^{\pm}$ הוא הספק רגעי של הגע בכיוון החיובי/שלילי

$$\bar{P}^{\pm}=\pm\frac{1}{2}z\omega^2|A|^2$$

$$R=\frac{P_1^-}{P_1^+}=r^2=\left(\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right)^2$$

$$T=\frac{P_2^+}{P_1^+}=\frac{z_2}{z_1}t^2=\frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}$$

$$R+T=1$$

$$R+T=1$$

$$\psi(x=0,t)=0\Rightarrow\psi(x,t)=C\sin(kx)\sin(\omega t+\varphi)$$

קצה חופשי:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x=0}=0\Rightarrow\psi(x,t)=C\cos(kx)\cos(\omega t+\varphi)$$

מיתר סופי:

2 קצוות קשורים: $\psi(x=0,t)=\psi(x=L,t)=0$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n};k_n=\frac{\pi n}{L};n=0,1,2,3...;f_n=\frac{vn}{2L}$$

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(k_nx)\sin(\omega_nt+\varphi_n)$$

קצה קשור וקצה חופשי:

$$\psi(x=0,t)=0,\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x=L}=0$$

$$k_n=\frac{\pi}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right);n=0,1,2,3...;\lambda_n=\frac{2L}{(n+\frac{1}{2})}$$

$$f_n=\frac{v}{2L}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(k_nx)\sin(\omega_nt+\varphi_n)$$

מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x=L}=0$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n};f_n=\frac{vn}{2L};k_n=\frac{\pi n}{L};n=0,1,2,3...$$

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos(k_nx)\sin(\omega_nt+\varphi_n)$$

גלי קול בצינור

גל אורכי - תנועת המולקולות בכיוון ההתקדמות הגל $\psi(x,t)$ -פונקציית ההעתק של מולקולות הגז משוויי משקל. x מציין את מיקום המולקולות בשוויי מישקל ולא את המיקום שלהן כתלות בזמן.

$\psi_p(x,t)$ -פונקציית הלחץ העודף
 $\Delta p(x,t)$ -פונקציית השינוי בצפיפות

נק' צומת בפונקציית ההעתק היא נק' טבור בפונקציות הצפיפות והלחץ ולהפך

גז אידיאלי בתהליך אדיאבטי: $PV^\gamma=const$

כאשר P - לחץ, V - נפח, γ - קבוע הקשור לסוג הגז.

הקשר בין פונקציית ההעתק לפונקציית הלחץ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{1}{\gamma P_0}\psi_p$$

$$B_a=\gamma P_0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\rho_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

$$\Delta\rho=-\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{Z}{A}=\rho_0v$$

ρ_0 - צפיפות המסה בשוויי משקל, A - שטח החתך של הצינור, v - מהירות הקול בחומר

האנרגיה הכוללת ליחידת אורך:

$$\varepsilon(x,t)=\frac{1}{2}A\rho_0\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]=A\rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$$

השוויון האחרון הוא עבור גלים נעים בלבד

אנרגיה פוטנציאלית וקינטית ממוצעת בזמן ליחידת אורך:

$$\bar{U}_{dx}=\bar{E}_{k\,dx}=\frac{1}{4}\rho_0A\omega^2\psi_{max}^2$$

אנרגיה כוללת ממוצעת בזמן ליחידת אורך:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho_0A\omega^2\psi_{max}^2$$

ψ_{max} - האמפליטודה של פונקציית ההעתק - קבוע

ω - התדירות הזוויתית

הספק של גל קול נע (למה אנרגיה עוברת דרך שטח חתך ביחידת זמן) בכיוון החיובי/שלילי:

$$P(x,t)=\pm v\varepsilon(x,t)$$

(לא לבלבל עם P של לחץ)
עוצמה של הגל (ההספק ליחידת שטח):

$$I(x,t)=\frac{|P(x,t)|}{A}=v\rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$$

$$\bar{I}=\frac{1}{2}v\rho_0\omega^2\psi_{max}^2:$$

$$I_a=I_0\cdot 10^a$$

$$a=\frac{10}{\log\left(\frac{I_a}{I_0}\right)}$$

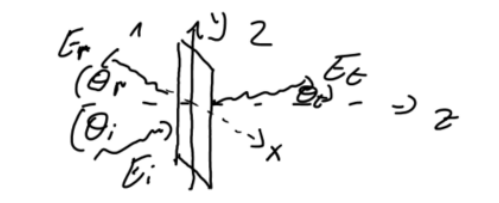
$$I(r)=\frac{P}{4\pi r^2}$$

$$\psi=0$$

- קצה סגור $\psi=0$ (כמו קצה קשור במיתר)

פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי:

מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים ו- $\theta_i = \theta_r$
חוק סנל: $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t}$

אם: $n_t > n_i$ אז קיימת **זווית קריטית**.
אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר (תהיה החזרה מלאה):
 $\theta_c = \text{shiftsin}\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$
משוואות פרנל עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך למישור הפגיעה):

$$\begin{aligned} \Gamma^\perp &= \frac{E_{t0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \\ &= \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \\ \tau^\perp &= \frac{E_{t0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \\ &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \\ 1 + \Gamma^\perp &= \tau^\perp \end{aligned}$$

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל למישור הפגיעה):

$$\begin{aligned} \Gamma^\parallel &= \frac{E_{t0}^\parallel}{E_{i0}^\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \\ &= \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \\ \tau^\parallel &= \frac{E_{t0}^\parallel}{E_{i0}^\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \\ &= \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \\ 1 + \Gamma^\parallel &= \tau^\parallel \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \end{aligned}$$

זווית ברוסטר היא הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).

זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי: $\sin^2 \theta_B^\parallel = \frac{1 - \frac{\mu_t \epsilon_i}{\mu_i \epsilon_t}}{1 - \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon_i}\right)^2}$
אם: $\mu_1 \approx \mu_2$ אז: $\tan \theta_B^\parallel = \frac{n_t}{n_i}$; $\sin \theta_B^\parallel = \frac{1}{1 + \epsilon_i/\epsilon_t}$
בקיטוב אנכי (מאוד נדיר בטבע): $\sin^2 \theta_B^\perp = \frac{1 - \frac{\mu_t \epsilon_t}{\mu_t \epsilon_i}}{1 - \left(\mu_i/\mu_t\right)^2}$

במעבר של יותר מתווך אחד נציב את תנאי השפה עבור כל נקודת מעבר.

מבוא לאופטיקה

חוק סנל: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
כאשר n הם מקדמי השבירה של התווך ו- θ הן הזוויות בין הקרן שפוגעת/מוחזרת לבין האנך למשטח.

נוסחת העדשות: $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$
 u – מרחק העצם מהעדשה. v – מרחק הדמות מהעדשה.
 f – מוקד העדשה.

הגדלה קווית: $m = \frac{H_i}{H_o} = \frac{|v|}{|u|}$
 H_i – גובה הדמות. H_o – גובה העצם.

עוצמת העדשה: $C = \frac{1}{f}$

יחס הדיספרסיה בגל: $\omega = u|k| = u\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

הכיוון של $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל ובגל מישורי תמיד $\vec{E} \perp \vec{k}$

לכיוון של $\vec{E}$ (המסומן בדרכ"ב- $\hat{n}$) קוראים כיוון הקיטוב של הגל.

כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל.
התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי. (אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B} = \frac{1}{u} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

העכבה של התווך: $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}, \quad \vec{E} = -\eta \hat{k} \times \vec{H}$$

וקטור פוינטינג (כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.

הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).
הממוצע של הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא גם **העוצמה** של הגל):

$$\vec{S}_{Avg} = \langle \vec{S} \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{E} \times \vec{H}^*}{2} \right\}$$

ו- $\vec{H}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.

המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$
קיטוב מעגלי ואליפטי:

הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה **החשמלי** (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב – מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב לינארי – כיוון השדה קבוע.

קיטוב מעגלי ימני – רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב- 90° .
כלומר הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z .

קיטוב מעגלי שמאלי – רכיב y מקדים את רכיב x ב- 90° .
 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z).

קיטוב אליפטי – מתקבל כאשר יש הפרש פאזה של 90° והאמפליטודה של הרכיבים שונה או אם הפרש הפאזה שונה מ- 90° .

פגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:

כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר
תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקור.
אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה.
 $D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free} \quad B_{2\perp} = B_{1\perp}$
 $E_{2\parallel} = E_{1\parallel} \quad H_{2\parallel} - H_{1\parallel} = k_{free}$
 σ_{free} – צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה.
 k_{free} – צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה.
בפגיעה ישרה (או פגיעה בניצב) לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.

בתווך דיאלקטרי: $\sigma_{free} = k_{free} = 0$
הקשר בין האמפליטודות:

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

השוויון השני נכון רק אם: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים). לא לבלבל בין n ל- η .

מקדם העברה: $\tau = \frac{E_t}{E_0}$

מקדם החזרה: $\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$

בפגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי $1 + \Gamma = \tau$

- קצה פתוח $\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi_p = 0$ (כמו קצה חופשי במיתר)
ערך RMS של פונקציית סינוס/קוסינוס הוא הערך

המקסימלי חלקי $\sqrt{2}$
מטריצת מומנט ההתמד:

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$$

$$I_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} + i \cdot j)$$

כאשר i, j, k מקבלים את הערכים x, y, z

יחס נפיצה (דיספרסיה) ומהירות החבורה

ייצוג פונקציית הגל באמצעות פורייה:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dx$$

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx$$

$$v_\varphi(k) = \frac{\omega}{k}$$

$$v_g(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma^4 + 4\beta^2 t^2}{\sigma^2}$$

כאשר σ היא הרוחב ההתחלתי ו- $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0}$

אם מספר הגל יוצא מורכב עבור תדירויות מסוימות, נקבל **גל דועך**. קבוע הדעיכה הוא החלק המדומה של מספר הגל.
במכניקת הקוונטים, פונקציית גל מתארת הסתברות למצוא חלקיק במיקום מסוים.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

משוואת שרדינגר:
התנע של חלקיק: $p = \hbar k$

בגלי מים, יחס הדיספרסיה הכללי עבור גלים בנוזל הוא:

$$\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \tan h(kH)$$

σ – קבוע מתח הפנים. כוח ליחידת אורך או אנרגיה ליחידת שטח, H – עומק הנוזל, g – תאוצת הכובד ρ – צפיפות המסה ליחידת נפח
בגלים קצרים (גלי מתח פנים): $\lambda \ll \lambda_c \sim 2cm$

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$$

עבור גלים ארוכים (גלי כבידה) אבל קצרים מעומק המים (או הנוזל): $\omega = \sqrt{gk}, \quad H \gg \lambda \gg \lambda_c$

עבור גלים ארוכים וגדולים מעומק המים (או הנוזל):

$$\omega = \sqrt{gHk}, \quad \lambda \gg H \gg \lambda_c$$

משוואת הגלים האלקטרומגנטיים

משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}$
משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

כאשר $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ובריק: המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.
המשוואה זהה לשדה המגנטי.

אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר): $n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק):

פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

מעבר לייצוג קופלקסי:

$$\cos(kx - \omega t) = \text{Re} [e^{i(kx - \omega t)}]$$

כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב- $t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.

יחס הדיספרסיה: $\omega = uk$
אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:

$$u_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad u_g = \frac{d\omega}{dk}$$

גל אלקטרומגנטי מישורי:

הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

כאשר $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$
וקטור הגל: $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$
הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.