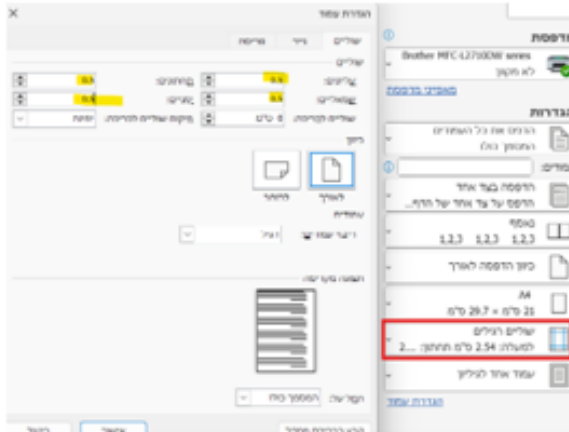


הוראות לדף הנוסחאות

הוראות הדפסה!

את הדף יש להדפיס עם שוליים מותאמות
אישית ברוחב 0.5 בכל צד.

ב WORD, יש לבחור בלשונית הדפסה את חלון השולים, לבחור שולים מותאמים אישית ולשנות ל 0.5 בכל הכיוונים



עריכה:

בדף הכנסנו כמה שיותר הסברים, נוסחאות ותמונות. אם מספר העמודים חורג ממספר העמודים המותר בבחינה ניתן לערוך את קובץ ה WORD ולהוריד הסברים מורחבים, תמונות או נוסחאות טריוויאליות. ניתן גם כמובן להוסיף הסברים שלכם או נוסחאות.

בכל מקרה מומלץ מאוד לעבור על הדף לפני המבחן!! הוא גם סיכום של החומר.

אין להוריד את הסמל של GOOL או כל סימן מסחרי אחר!!

מבנה הדף:

הדף בנוי משלושה טורים.

ההתחלה היא בפינה הימנית העליונה.

בסוף הטור הראשון עוברים לטור השני באות
עמוד (ולא לעמוד הבא). בסוף הטור האחרון
עוברים לטור הראשון (הימני) בעמוד הבא.

ניתן לשנות את כיוון הפריסה לרוחב, זה יוצר מראה יותר מרווח על חשבון מספר עמודים.



כל הזכויות שמורות למני גבאי ולאטר GOOL

הדף מיועד לכל שימוש שאינו מסחרי ובפרט לשימוש מרצים, מורים, סטודנטים ותלמידים בקורסים שונים, ניתן לערוך את הדף אך יש להשאיר סימונים של אתר גול.

$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$
 $\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$: מהירות מרכז המסה:
 $\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$: תאוצת מרכז המסה:
 עבור יותר משני גופים הנוסחאות ממשיכה בהתאמה. מספר גופים קשיחים (לא נקודתיים): עושים מרכז מסה בין מרכזי המסה.
 גוף עם חור: נעשה מרכז מסה של הגוף המלא עם מרכז מסה של החור כאשר המסה של החור שלילית.
 בשביל למצוא מרכז מסה של גוף גדול נשתמש באינטגרל:

$$x_{c.m.} = \int x dm$$

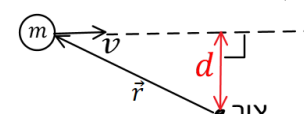
כ"ל לגבי x ו- y , לחישוב הסתכלו במבוא המתמטי. מערכת מרכז המסה:
 $\vec{p}_T = M \vec{v}_{c.m.}$: התנע הכולל של מערכת:
 ניתן להסתכל על מערכת גופים כגוף נקודתי שמסתו היא סכום המסות ומהירותו היא מהירות מרכז המסה. מערכת מרכז המסה היא מערכת שזוהי ביחד עם נקודת מרכז המסה.
 בשביל למצוא את מהירות הגופים במערכת מרכז המסה נשתמש בטרנספורמציות גליליי.
 במערכת מרכז המסה התנע הכולל של המערכת הוא אפס ולכן, במקרה של שני גופים, הגופים תמיד ינועו על ציר אחד.
 אם ההתנגשות אלסטית, גודל המהירות של כל גוף נשמר.

מומנט כוח

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$: מומנט כוח:
 כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח (ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון)

גודל המומנט: $|\vec{\tau}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| r_{\perp}$: כאשר $r_{\perp}$ הוא הרכיב של $\vec{r}$ המאונך לכוח כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג.

תנע זוויתי (תנ"ז)

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$: תנ"ז:
 $\vec{r}$ הוא וקטור המיקום של הגוף, $\vec{p}$ - התנע הקווי
 עבור גוף העו בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי:

 כאשר d זה המרחק האפקטיבי.
 v - המהירות.
 הקשר בין תנ"ז

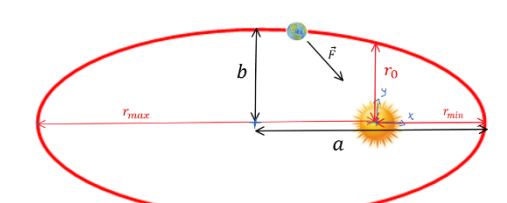
למומנט כוח: $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$:
 חוק שימור התנע הזוויתי:
 אם $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ אז התנע הזוויתי נשמר

כבידה וכוח מרכזי

כוח מרכזי: $\vec{F}(r) = f(r) \hat{r}$:
 - תלוי רק ב r ובכיוון רדיאלי בלבד.
 - כוח משמר (אנרגיה).
 - לא מפעיל מומנט כוח ולכן הוא משמר גם תנע זוויתי.

כוח הכובד: $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$:
 כאשר $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} m^{-3} kg^{-1} s^{-2}$
 - קרוב לכדה"א $\frac{GMm}{r^2} = \frac{GM_E m}{R_E^2} \approx mg$
 כאשר $r \approx R_E \approx 6400 km$; $M_E \approx 5.97 \cdot 10^{24} kg$
 ו- $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$

האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד: $U(r) = -\frac{GMm}{r}$:
 הצורה הזו של האנרגיה היא צורה כללית של כוחות נוספים והרבה פעמים רושמים אותה כ: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$
 כאשר α קבוע כלשהו. עבור הכובד $\alpha = GMm$
 המסלול של גוף תחת כוח הכובד: $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$:
 כאשר $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$; r_0 , E היא האנרגיה הכוללת של הגוף ו- L הוא התנ"ז.
 צורת המסלול מתחלקת ל-3 מקרים:

מקרה 1: מעגל $\varepsilon = 0$. במקרה הזה ניתן להשוות את הכוח ל- $\frac{mv^2}{r}$ ולקבל ש: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$
 מקרה 2: אליפסה $0 < \varepsilon < 1$


$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$
 בשביל הנוסחה צריך גם משוואה של המסלול.
 דוגמה ב-2D מימד: נתון $y(x) = x^5$, באמצעות המשוואה עוברים למשתנה אחד. בדוגמה, נציב באינטגרל במקום y את x^5 ו- dx נגזרת $dy = 5x^4 dx$. בדוגמה $dy = 5x^4 dx$. הגבולות של המשתנה אליו עברנו (בדוגמה גבולות של x) איך בודקים אם כוח הוא משמר:
 אם ורק אם $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$, אז הכוח משמר.
 נוסחת הרוטור בפרק וקטורים.
 הערה: צריך שכל רכיב יתאפס בנפרד.

נקודת שיווי משקל מתקיימת כאשר: $\Sigma \vec{F} = 0$ או $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$
 $U_x > 0$: שיווי משקל יציב (הגוף חוזר בתזוזה קטנה).
 $U_x < 0$: שיווי משקל רופף (הגוף מתרחק בתזוזה קטנה).
 $U_x = 0$: שיווי משקל אדיש (לא חוזר ולא ממשיך) כשאנרגיה קבועה
 - אם יש כמה ממדים אז $\vec{\nabla} U = 0$
 שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס
 שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס
 אוכף-חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס
 חישוב אנרגיה פוטנציאלית מכוח משמר:
 נתונה פונקציית כוח וצריך למצוא U שמקיימת
 $\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x$ וגם $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$ וגם $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$
 שלב 1 - נעשה $U = -\int F_x dx + g(y, z)$
 כאשר $g(y, z)$ היא פונקציה כללית שתלויה רק ב y, z
 דוגמה: $\vec{F}(x, y, z) = 2xyz\hat{x} + (zx^2 + 3)\hat{y} + yx^2\hat{z}$
 $U = -\int 2xyz dx + g(y, z) = -x^2 yz + g(y, z)$
 שלב 2 - נעשה $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$ ומשם נמצא את $g(y, z)$
 באמצעות אינטגרל על y ונוסיף $h(z)$. בדוגמה:
 נציב ב $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$: $-x^2 z + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = -(zx^2 + 3)$
 נעשה אינטגרל ונוסיף $h(z)$: $g(y, z) = -3y + h(z)$
 עכשיו $U = -x^2 yz - 3y + h(z)$
 שלב 3 - נעשה $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$ ומשם נמצא את $h(z)$ באמצעות אינטגרל על z ונוסיף קבוע. בדוגמה:
 נציב ב $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$: $-x^2 y + \frac{\partial h(z)}{\partial z} = -yx^2$
 נעשה אינטגרל ונוסיף קבוע:
 $h(z) = C$
 קבלנו: $U = -x^2 yz - 3y + C$
 שלב 4 - בשביל למצוא את C צריך תנאי על האנרגיה לדוגמה $U(0,0,0) = 0$, אם אין תנאי נשאיר C את C .
 - אם אין תלות ב- z בבעיה אז רק שלבים 1-2 וקבוע.

מתקן תנע

התנע של גוף: $\vec{p} = m\vec{v}$
 הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון: $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
 המתקן של כוח: $\vec{J} = \int \vec{F} dt$:
 המתקן הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות בזמן (לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות במיקום).
 המתקן הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:
 $\vec{J}_{\Sigma \vec{F}} = \Delta \vec{p}$
 חוק שימור התנע: אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.
 הנוסחה ששימור תנע: $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$
 בדי"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.
 התנגשות אלסטית: יש גם שימור אנרגיה ונוסיף למשוואת התנע את המשוואה: $m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$
 אם ההתנגשות חזיתית (במימד אחד) אז במקום המשוואה של האנרגיה נרושם: $v_1 + u_1 = v_2 + u_2$
 התנגשות אלסטית לא חזיתית בין שני גופים בעלי מסות שוות ואחד הגופים במנוחה לפני ההתנגשות: הזווית בין המהירויות אחרי ההתנגשות תהיה 90 מעלות.
 התנגשות פלסטית (שני הגופים נעים יחדיו לאחר ההתנגשות):
 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$
 בהתנגשות פלסטית לא יכול להיות שימור אנרגיה. התנגשויות שהן לא פלסטיות ולא אלסטיות: אין שימור אנרגיה והגופים לא נעים יחדיו. יהיה רק שימור תנע.
 התנגשויות קיצרות: ברוב ההתנגשויות הזמן של ההתנגשות מאוד קצר ולכן ניתן להזניח את ההשפעה (המתקן) של כוחות קבועים כמו הכובד.

מקדם תקומה

בין 0 ל-1, ככל שיותר גבוה יותר אנרגיה נשמרת אך לא ניתן לדעת כמה. שווה 1 באלסטיות ו-0 בפלסטיות.

מרכז מסה

מיקום מרכז המסה: $\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$:
 ניתן לרושם אותה לכל רכיב בנפרד, לדוגמה לרכיב x :

כוח גרר וכוח ציפה

כוח גרר הוא כוח מהצורה: $\vec{F} = -k\vec{v}$:
 כאשר $\vec{v}$ היא מהירות הגוף ו- k הוא קבוע כלשהו.
 משוואת תנועה - משוואה הכוללת את x , v ו- a . בדרכ מגיעים אליה ממשוואת הכוחות.
 מהירות סופית - המהירות הקבועה שהגוף מגיע אליה לאחר זמן רב. (תאוצה שווה לאפס)
 כוח סטוקס - כוח גרר שפועל על כדור בתוך נוזל:

$\vec{F}_v = -6\pi\eta R \vec{v}$ - צמיגות הנוזל, R - רדיוס הכדור
GOOL (ברדיוס קבוע)
 תנועה מעגלית

הדרך בתנועה מעגלית: $S = \Delta\theta \cdot R$:
 - הדרך בתנועה מעגלית היא אורך הקשת שעבר הגוף במעגל. $\Delta\theta$ היא שינוי הזווית או הזווית שמול הקשת ויש להציב אותה ברדיאנים!
 גודל המהירות הקווית הרגעית (speed): $v(t) = \frac{ds}{dt}$:
 - כיוון המהירות תמיד משיק למעגל
 מהירות זוויתית: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$:
 - f - התדירות, T - זמן המחזור והם מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה (גודל המהירות קבוע)
 קשר בין המהירות הקווית לזוויתית: $v = \omega R$
 תאוצה רדיאלית (למרכז המעגל): $a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

הכוחות למרכז המעגל: $\Sigma F_{\text{למרכז}} = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$:
 תאוצה זוויתית: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$:
 תאוצה משיקית (רק בתנועה לא קצובה): $a_{\theta} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \alpha R$:
 הגובה במעגל אנכי: $h = R(1 - \cos \theta)$
 - כאשר h ו- θ נמדדים מתחתית המעגל.
 הכוח הצנטריפוגלי: $F_r = m\omega^2 R$
 - בכיוון החוצה מהמעגל.
 - שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

וקטור המיקום: $\vec{r} = R \cos \theta \hat{x} + R \sin \theta \hat{y}$
 הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
 הקשר הכללי בין התאוצה המשיקית לתאוצה הזוויתית: $\vec{a}_{\theta} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

תנועה תחת שדה אלקטרומגנטי

מסת פרוטון ונייטרון: $m_p \approx m_n = 1.67 \cdot 10^{-27} kg$:
 מסת אלקטרון: $m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} kg \approx \frac{1}{2000} m_p$:
 מטען האלקטרון והפרוטון: $q_e = -q_p = -1.6 \cdot 10^{-19} C = -e$
 - גודל המטען e הוא גודל יסודי והמטען הכולל של כל גוף חייב להיות כפולה שלמה.
 - לנייטרון אין מטען והוא לא מושפע מהכוח החשמלי.
 הכוח החשמלי (חוק קולון). הכוח בין שני חלקיקים טעונים: $\vec{F} = \frac{kq_1 q_2}{r^2} \hat{r}$:
 עבודה ואנרגיה

עבודה של כוח קבוע

כאשר α היא הזווית בין הכוח להעתק. העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת. אם הגוף לא זז אז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס). הקשר בין העבודה כוללת לאנרגיה קינטית:
 $W_{\Sigma F} = \Delta E_k$ העבודה של כל הכוחות שפועלים על הגוף
 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ אנרגיה קינטית
 כוח משמר:
 - העבודה שמבצע כוח משמר אינה תלויה במסלול, היא תלויה רק בנקודת ההתחלה והסיום של התנועה.
 - העבודה במסלול סגור מתאפסת.
 - יש לו אנרגיה פוטנציאלית כך כ: $W_c = -\Delta U$
 האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית: $U_g = mgh$
 האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית: $U_{el} = \frac{1}{2} k x^2$
 כאשר x ההתארכות הקפיץ ממצב רפו ו- k קבוע הקפיץ.
 - חוץ מ- U_g ו- U_{el} יכולים להיות עוד כוחות משמרים ועבורם יהיו עוד אנרגיות פוטנציאליות

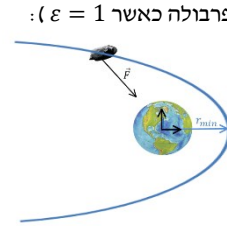
אנרגיה (מכאנית) כללית: $E = E_k + U$:
 - סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בבעיה.
 משפט עבודה אנרגיה: $E_i + W_{NC} = E_f$:
 W_{NC} העבודה של כל הכוחות הלא משמרים
 חוק שימור האנרגיה:
 אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת העבודה של כוח לא קבוע:

- מקור הכוח נמצא באחד ממוקדי האליפסה.

- נמצא $v(r_{min}) = v_{max}$; $v(r_{max}) = v_{min}$ בד"כ נמצא המהירויות באמצעות שימור אנרגיה ותנ"י.

$$r_{min} = \frac{r_0}{1+\varepsilon} ; r_{max} = \frac{r_0}{1-\varepsilon} ; \varepsilon = \frac{r_{max}-r_{min}}{r_{max}+r_{min}} ; a = \frac{r_{min}+r_{max}}{2} = \frac{r_0}{1-\varepsilon^2} ; b = \frac{r_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

- שטח האליפסה: $S = \pi ab$
מקרה 3: היפרבולה $\varepsilon \geq 1$ (פרבולה כאשר $\varepsilon = 1$):



$v(r_{min}) = v_{max}$
מהירות מילוט -
המהירות הדרושה להגיע לאינסוף.

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

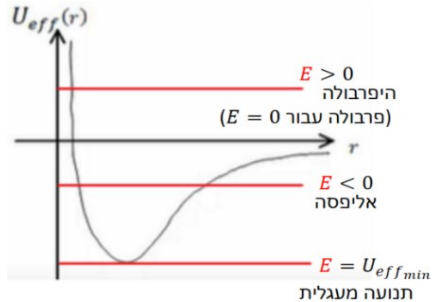
אנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית:

בבעיות שבהן האנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק ב r ניתן לרשום את האנרגיה הכוללת של הגוף כתלות במשתנה r בלבד.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

כאשר: $U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$

עבור $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ נקבל את הגרף הבא עבור U_{eff} :



מסה משתנה **GOOL**

הנוסחה $\vec{F} = m\vec{a}$ לא נכונה עבור גוף שהמסה שלו משתנה. נעבור לניסוח הכללי יותר של חוק שני:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

נוסחה כללית לתנועה גופים שפולטים מסה:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt}$$

כאשר $\frac{dm}{dt}$ הוא קצב הפליטה ((חיובי כאשר חומר יוצא מהגוף ושלילי אם חומר נכנס לגוף).

$\vec{v}_{rel}$ - מהירות החומר שנפלט ביחס לגוף (אם החומר נפלט אחורה אז היא צריכה להיות שלילית)

ext - הכוונה לסכום הכוחות החיצוניים

יחסות פרטית **GOOL**

תיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות (אינרציאליות).

עקרונות יסוד בתורת היחסות:

- חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.
- האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.
- מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.
- אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור.
- בוואקום, מכאן, מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.
- הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם: x, y, z) שעוברת טרנספורמציה.

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v_0}{c})^2}} ; \beta = \frac{v_0}{c}$$

γ_0 תמיד גדולה מ 1
טרנספורמצית לורנץ למיקום והזמן:

$$x' = \gamma_0(x - v_0 t) ; y' = y ; z' = z$$

$$t' = \gamma_0 \left(t - \frac{v_0 x}{c^2} \right) ; \beta = \frac{v_0}{c} ; \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v_0}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$x = \gamma_0(x' + v_0 t') ; y' = y ; z' = z$$

$$t = \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0 x'}{c^2} \right)$$

- הצירים של המערכות **חייבים** להיות מקבילים.

- בזמן $t = t' = 0$ **חייבים** שהראשיות מתלכדות.

המערכת העצמית:

מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

- **זמן עצמי** τ מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

- **אורך עצמי** l_0 האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

התכונות האורך: שינוי האורך ממערכת המנוחה

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0} \quad \text{(העצמית) למערכת נעה}$$

התארכות הזמן: שינוי הזמן ממערכת המנוחה (העצמית) למערכת נעה)

$$\Delta t = \gamma_0 \tau$$

שינוי זווית במדידת אורך: $\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$

θ' - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת העצמית
 θ - זווית ביחס לציר ה x (ציר התנועה) במערכת אחרת.

אפקט דופלר היחסות:

$$T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tau$$

זמן המחזור של הגל:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda'$$

אורך הגל:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f'$$

תדירות הגל:

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} ; v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0 (1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$$

טרנספורמצית לורנץ למהירויות:

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0 (1 - \frac{v_0 v_x}{c^2})}$$

אברציה - שינוי זווית המהירות:

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0 (\cos \theta - \frac{v_0}{c})}$$

שימו לב שפה השינוי הוא בזווית של וקטור המהירות (כיוון התנועה) ולא שינוי זווית של הגוף כמו למעלה.

פונקציית הגל של החומר: **GOOL**

ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא:

$$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$

כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.

מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$

המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המיקום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצא אותו על ידי נגזרת).

שוונת: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

כאשר - $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$

עקרון אי הוודאות של הייזנברג: **GOOL**

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

אי ודאות מיקום תנע:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot S$$

1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית.

2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד.

3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב- X והמיקום ב- Y בו זמנית.

אי ודאות זמן אנרגיה: $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן.

2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.

משוואת שרדינגר: **GOOL**

$$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$$

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \Psi(x,t)$$

- תנאים נוספים: 1. פסי מנורמלת. 2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת. 3. פסי רציפה. 4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$

כאשר: $\psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל אינסופי: **GOOL**

פונקציית הגל, חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$

חבילת גלים:

$\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$

בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה

פוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית.

עקרונות לציר פונקציית גל:

- ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
- עבור המצב ה- n ציירו גל עם $n - 1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
- ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולחיצה).
- פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
- פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שהפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מנהור (tunneling): **GOOL**

מקדם ההעברה עבור $T \ll 1$ (ההסתברות לעבור):

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$$

l , $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$ - אורך המחסום, $U_0 > E$ גובה הפוטנציאל במחסום.

מקדם החזרה: $R = 1 - T$

אוסילטור הרמוני: **GOOL**

$$\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \quad b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{2} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_3(x) = 8\sqrt{3} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

רמות האנרגיה, n שלם שמתחיל מ 1: $E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

או שאפשר להתחיל את n מאפס ואז $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

ייצוג באמצעות אלגברה לינארית: **GOOL**

תכונות המכפלה הפנימית:

$$\langle u|v \rangle = \langle v|u \rangle^*$$

$\langle v|v \rangle = \langle v|v \rangle^*$ תמיד ממשי גדול או שווה לאפס

אם $\langle v|v \rangle = 0$ אז $|v\rangle = |0\rangle$

הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$$

נורמה: $\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}$

מכפלה פנימית: $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum \alpha_i^* \beta_i$ כאשר α_i ו- β_i הם המקדמים של פונקציות הגל באותו בסיס

אי שוויון שוורץ: **GOOL**

$$|\langle a|b \rangle|^2 \leq \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle$$

זווית מוכללת בין וקטורים: $\cos \theta = \frac{\langle a|b \rangle \langle b|a \rangle}{\langle a|a \rangle \langle b|b \rangle}$

אי שוויון המשולש: $|\langle a| + \langle b| \rangle| \leq \langle a| + \langle b|$

אופרטורים בייצוג אלגברי **GOOL**

אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

- האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i (כפול סקלר כלשהו): $Q_{ij} = \langle e_i | \hat{Q} | e_j \rangle$, שורה i , עמודה j .

- אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

- כתיב נוסף: $\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} \psi_2 \rangle$

$$\langle \hat{Q} \psi | = (\hat{Q} | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | \hat{Q}^\dagger$$

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משוחלפת:

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$

צמד הרמיטי:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

כפל מטריצות: $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$

כפל מטריצות הוא לא חילופי: $AB \neq BA$

יחס חילוף בין מטריצות: $[A, B] = AB - BA$

מטריצה ההופכית: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

מטריצה אוניטרית: $U^\dagger = U^{-1}$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger; \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A; \quad (\langle \psi_1 | \hat{A}^\dagger | \psi_2 \rangle)^* = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$$

$$(AB)^T = B^T A^T; \quad \langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

- הגודל של עייע של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.

אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים

נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.

פונקציות של אופרטורים והפרופוגטור GOOL

אם $f(x) = \sum_n \alpha_n x^n$ אז ניתן להגדיר $f(\hat{A}) = \sum_n \alpha_n \hat{A}^n$
אם ורק אם $\hat{A}$ אלכסונית ו- a_i הם הע"ע שלה

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \text{ כלומר אם}$$

אז:

$$\hat{B} = f(\hat{A}) = \begin{pmatrix} f(a_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(a_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

זיהויית:

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = 0 \text{ אז } [\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

אם $[\hat{A}, \hat{B}] = cI$ כאשר I היא מטריצת יחידה ו- c קבוע. אז

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = c \frac{df(\hat{B})}{dx}$$

אם $f(x)$ ממשית (ואנליטית, כלומר ניתן לפתח אותה לטור)

$$f^\dagger(\hat{A}) = f(\hat{A}^\dagger)$$

הפרופוגטור: $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle$

$$\hat{U}(t) = \sum e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} |E_n\rangle \langle E_n| = e^{-i \frac{\hat{H} t}{\hbar}}$$

הפרופוגטור הוא אופרטור אוניטרי ולכן הנורמה של

פונקציית הגל נשמרת במהלך ההתפתחות בזמן.