

# מתמטיקה למדעי החיים

פרק 38 - תרגילים מתקדמים נוספים (הפרק באנגלית)

תוכן העניינים

1. סדרות..... 1
2. גבולות ורציפות..... 2
3. משפט ערך הביניים ומשפט ויירשטראס..... 3
4. גזירות ומשפטי הערך הממוצע..... 4
5. טורי חזקות וטורי טיילור..... 6
6. המשפט היסודי של החדוא, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן..... 7
7. נפח שטח מעטפת ומשפט פאפוס..... 9

## Convergence of a Sequence, Monotone Sequences (סדרות)

### Questions

- 1) Let  $A$  be a non-empty subset of  $\mathbb{R}$  and  $\alpha = \inf A$ . Show that there exists a sequence  $(a_n)$  such that an  $a_n \in A$  for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $a_n \rightarrow \alpha$ .
- 2) Let  $A$  be a non-empty subset of  $\mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Show that there exists a sequence  $(a_n)$  in  $A$  such that  $|x_0 - a_n| \rightarrow d(x_0, A)$ . Recall that  $d(x, A) = \inf \{|x - a| : a \in A\}$ .
- 3) Let  $(a_k)$  be a bounded sequence. For every  $n \in \mathbb{N}$ , define  $x_n = \sup\{a_k : k < n\}$ . Show that the sequence  $(x_n)$  converges.

### Cauchy Criterion, Bolzano - Weierstrass Theorem

- 4) Show that a sequence  $(x_n)$  of real numbers has no convergent subsequence if and only if  $|x_n| \rightarrow \infty$ .
- 5) Let  $(x_n)$  be a sequence in  $\mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Suppose that every subsequence of  $(x_n)$  has a subsequence converging to  $x_0$ . Show that  $x_n \rightarrow x_0$ .
- 6) Let  $(x_n)$  be a sequence in  $\mathbb{R}$ . We say that a positive integer  $n$  is a peak of the sequence if  $m > n$  implies  $x_n > x_m$  (i.e., if  $x_n$  is greater than every subsequent term in the sequence).
  - a) If  $(x_n)$  has infinitely many peaks, show that it has a decreasing subsequence.
  - b) If  $(x_n)$  has only finitely many peaks, show that it has an increasing subsequence.
  - c) From (a) and (b) conclude that every sequence in  $\mathbb{R}$  has a monotone subsequence. Further, every bounded sequence in  $\mathbb{R}$  has a convergent subsequence (An alternate proof of Bolzano-Weierstrass Theorem).

## Continuity and Limits (גבולות ורציפות)

### Questions

- 1) Let  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$ . Show that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .
- 2) Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Suppose  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  exists.  
Show that  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x + x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .
- 3) Let  $f(x) = |x|$  for every  $x \in \mathbb{R}$ . Show that  $f$  is continuous on  $\mathbb{R}$ .
- 4) Let  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $f(0) = 0$  and  $f(x) = x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  for  $x \neq 0$ .  
Is  $f$  continuous?
- 5) Let  $[\cdot]$  denote the integer part function and  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $f(x) = [x^2] \sin \pi x$ .
  - a) Show that  $f$  is continuous at each  $x \neq \sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . [Here  $\mathbb{N}$  includes 0]
  - b) Show that  $f$  is continuous at each  $x = k \in \mathbb{N}$ .
  - c) Show that  $f$  is discontinuous at each  $x = \sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  such that  $x \notin \mathbb{N}$ .
- 6) Let the function  $f : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  be one-one and onto. Suppose  $f$  is continuous.  
Show that  $f^{-1}$  is also continuous.
- 7) Let  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  be given by
 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{if } x = \frac{p}{q} \text{ where } p, q \in \mathbb{N} \text{ and } p, q \text{ have no common factor} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$
  - a) Suppose  $x_n \rightarrow x_0$  for some  $x_0$ , with  $x_n \neq x$  for all  $n \in \mathbb{N}$ , and suppose  $x_n = \frac{p_n}{q_n} \in (0, 1)$  where  $p_n, q_n \in \mathbb{N}$  have no common factors. Show that  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ .
  - b) Show that  $f$  is continuous at every irrational.
  - c) Show that  $f$  is discontinuous at every rational.

## Existence of Extrema, Intermediate Value Property (משפט ערך הביניים ומשפט ויירשטראס)

### Questions

- 1) Give an example of a function  $f$  on  $[0,1]$  which is not continuous but satisfies the IVP\*. \*We say that  $f$  has the property IVP [Intermediate Value Property] on  $[a,b]$  if for every  $x, y \in [a,b]$  and  $\alpha$  satisfying  $f(x) < \alpha < f(y)$  or  $f(x) > \alpha > f(y)$  there exists  $x_0 \in [x, y]$ , such that  $f(x_0) = \alpha$ .
- 2) Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function. Show that  $f$  is a constant function if
  - a)  $f(x)$  is rational for each  $x \in \mathbb{R}$ .
  - b)  $f(x)$  is an integer for each  $x \in \mathbb{Q}$ .
- 3) Let  $p(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a polynomial function of odd degree. Show that  $p$  is onto.
- 4) Let  $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous such that
 
$$\inf\{f(x) : x \in [0,1]\} = \inf\{g(x) : x \in [0,1]\}.$$
 Show that there exists  $x_0 \in [0,1]$  such that  $f(x_0) = g(x_0)$ .
- 5) A cross country runner runs continuously an eight kilometers course in 40 minutes without taking rest. Show that, somewhere along the course, the runner must have covered a distance of one kilometer in exactly 5 minutes.
- 6) Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function.
  - a) Suppose  $f$  attains each of values exactly two times. Given:
 
$$f(x_1) = f(x_2) = \alpha \text{ for some } x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ and } f(x_0) > \alpha \text{ for some } x_0 \in [x_1, x_2].$$
 Show that  $f$  attains its maximum in  $[x_1, x_2]$  exactly at one point.
  - b) Using (a) show that  $f$  cannot attain each of its values exactly two times.

## Mean Value Theorem, L'Hôpital's Rule, Differentiability (משפט לגראנז', כלל לופיטל וגזירות)

### Questions

- 1) Does there exist a differentiable function  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 4$  and  $f'(x) \leq 2$ , for all  $x \in [0, 2]$ ?
- 2) Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be differentiable such that for some  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|f'(x)| \leq \alpha < 1$  for all  $x \in \mathbb{R}$ . Let  $a_1 \in \mathbb{R}$  and define a sequence  $(a_n)$  recursively by  $a_{n+1} = f(a_n)$ . Show that  $(a_n)$  converges.
- 3) Let  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  be differentiable and let  $\alpha \in \mathbb{R}$  be such that  $f'(a) < \alpha < f'(b)$ . Define  $g(x) = f(x) - \alpha x$  for all  $x \in [a, b]$ .
  - a) Show that there exists  $c \in [a, b]$  such that  $g'(c) = 0$ .  
Hint: prove by contradiction, noting that  $g'(a) < 0$  and  $g'(b) < 0$ .
  - b) From the above, conclude that if a function  $f$  is differentiable on an interval  $[a, b]$ , then  $f'$  has the Intermediate Value Property on  $[a, b]$ .
- 4) Suppose  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous and  $\int_0^1 f(t) dt = 1$ .
  - a) Show that there exists  $c \in (0, 1)$  such that  $f(c) = 1$ .
  - b) Show that there exist  $c_1 \neq c_2$  in  $(0, 1)$  such that  $f(c_1) + f(c_2) = 2$ .
- 5) Let  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  be such that  $|f'(x)| < 10$  for all  $x \in (0, 1)$  and let  $(x_n)$  be a sequence in  $(0, 1)$  satisfying the Cauchy criterion. Show that the sequence  $(f(x_n))$  converges.
- 6) Let  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  and  $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$   
Show that:
  - a) if  $f$  is continuous, then  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converges;
  - b) if  $f$  is differentiable and  $|f'(x)| < \frac{1}{2} \forall x \in [0, 1]$ , then  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos n) \sqrt{n}$  converges.

- 7) Let  $p(x) = a + bx + cx^2$ . Find all values of  $a, b, c \in \mathbb{R}$  for which the function  $p(|x|)$  is differentiable at 0.

## Power Series, Taylor Series (טורי חזקות וטורי טיילור)

### Questions

- 1) Let  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  be infinitely differentiable and let  $x_0 \in (a, b)$ . Suppose that there exists  $M > 0$  such that  $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$  for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $x \in (a, b)$ . Show that Taylor's series of  $f$  around  $x_0$  converges to  $f(x)$  for all  $x \in (a, b)$ .
- 2) Let  $(a_n)$  be a sequence of nonnegative reals and suppose that  $(a_n^{\frac{1}{n}})$  is a bounded sequence. For each  $n$ , define  $A_n = \sup\{a_k^{\frac{1}{k}} : k \geq n\}$ .  $(A_n)$  converges since it is decreasing and bounded below (by 0). So  $A_n \rightarrow L$  for some  $L \geq 0$ .
- a) Show that if  $L < 1$ , the series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converges and if  $L > 1$  the series diverges.
- b) Show that the radius of convergence of the power series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  is  $\frac{1}{L}$ .

## המשפט היסודי של החדו"א, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן

### שאלות

$$(1) \text{ תהי } f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת כך: } f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ונגדיר את  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  עבור  $-1 \leq x \leq 1$ .

שרטטו את הגרפים של  $f$  ו- $F$ , בהינתן:

א.  $f$  אינה רציפה (ב-0), אבל  $F$  רציפה.

ב.  $F$  אינה גזירה ב-0.

ג. תן דוגמה לפונקציה  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f$  אינה רציפה ב-0,

אבל  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  גזירה ב-0.

(2) הוכיחו את 'משפט ערך הביניים השני לאינטגרלים', בהנחה שהפונקציות רציפות (ולא אינטגרביליות):

תהי  $f$  רציפה ב- $[a,b]$ .

אם קיימת פונקציה גזירה  $F$  ב- $[a,b]$ , כך ש- $F' = f$ ,

$$\text{אז } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(3) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה.

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, f) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{סימונים: } P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b$$

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$$

$$(4) \text{ תהי } a_n = \ln \left( \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \right) \text{ לכל } n \in \mathbb{N}$$

המירו את  $a_n$  לסכום רימן ומצאו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(5) תהינה  $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f'$  ו- $g'$  רציפות ב- $[a,b]$ .

$$\text{הוכיחו כי } \int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

(6) תהי  $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ברציפות, ותהי  $f$  רציפה בטווח של  $\phi$ .

$$\text{הוכיחו כי } \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx$$

(7) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ויהיו  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירות.

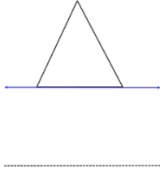
הוכיחו כי אם הטווחים של  $u$  ו- $v$  מוכלים ב- $[a, b]$ ,

$$\text{אז } \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## נפח שטח מעטפת ומשפט פאפוס

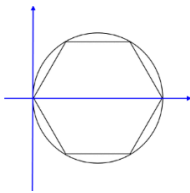
### שאלות



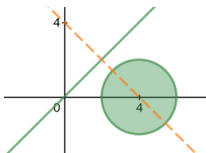
- (1) נתון משולש שווה צלעות עם בסיס המתלכד עם ציר ה- $x$ .  
 אורך צלע המשולש  $a$ .  
 השתמשו במשפט פאפוס על מנת לחשב את נפח הגוף,  
 הנוצר על ידי סיבוב המשולש סביב הישר  $y = -a$ .



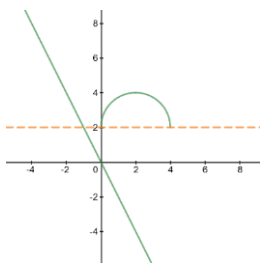
- (2) השתמשו במשפט פאפוס ומצאו את מרכז הכובד של התחום  
 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$ .  
 רמז: נפח כדור בעל רדיוס  $r$ , הוא  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .



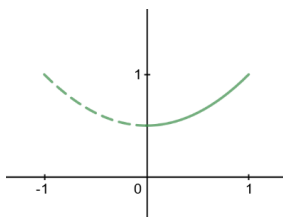
- (3) נתון משושה החסום במעגל  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ .  
 המשושה מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
 מצאו את שטח הפנים של השטח שנוצר,  
 ואת נפח הגוף שנוצר.



- (4) הדיסק המעגלי  $(x-4)^2 + y^2 \leq 4$  מסתובב סביב הציר  $y = x$ .  
 מצאו את נפח הגוף שנוצר.



- (5) נתבונן בקשת המעגלית  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4, y \geq 2$ .  
 הקשת מסתובבת סביב הציר  $y + 2x = 0$ .  
 מצאו את שטח הפנים של הגוף שנוצר.



- (6) יהיו  $(\bar{x}, \bar{y})$  מרכז העקום  $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1), 0 \leq x \leq 1$ .  
 מצאו את  $\bar{x}$  בעזרת משפט פאפוס.