אינפי 2

פרק 11 - תרגילים מתקדמים נוספים (הפרק באנגלית)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדוא, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן 1

המשפט היסודי של החדו"א, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן

שאלות

1) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת כך: $f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\end{cases}$,

ונגדיר את $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ עבור $-1\le x\le 1$.

שרטטו את הגרפים של f ו- F, בהינתן:

א. f אינה רציפה (ב- 0), אבל F רציפה.

ב. F **אינה** גזירה ב- 0.

ג. תן דוגמה לפונקציה $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- f אינה רציפה ב- 0, אבל $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ גזירה ב- 0.

2) הוכיחו את 'משפט ערך הביניים השני לאינטגרלים', בהנחה שהפונקציות רציפות (ולא אינטגרביליות):

תהי f רציפה ב- $[a,b]$.

אם קיימת פונקציה F גזירה ב- $[a,b]$, כך ש- $F'=f$,

אז $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

3) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכיחו כי $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f)=\int_a^b f(x)dx$.

סימונים: $P=\{\overset{=a}{x_0},x_1,...,\overset{=b}{x_n}\}$, $S(P,f)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,

$c_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\|P\|=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$.

4) תהי $a_n=\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

המירו את a_n לסכום רימן ומצאו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

5) תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, כך ש- f' ו- g' רציפות ב- $[a,b]$.

הוכיחו כי $\int_a^b f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) תהי $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, ותהי f רציפה בטווח של ϕ.
הוכיחו כי $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)dt=\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$.

7) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ויהיו $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירות.
הוכיחו כי אם הטווחים של u ו-v מוכלים ב-$[a,b]$,
אז $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt=f\left(v(x)\right)\frac{dv}{dx}-f\left(u(x)\right)\frac{du}{dx}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il