

אינפי 2

פרק 11 - תרגילים מתקדמים נוספים (הפרק באנגלית)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדוא, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן..... 1

המשפט היסודי של החדו"א, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן

שאלות

(1) תהי $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת כך: $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$,

ונגדיר את $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ עבור $-1 \leq x \leq 1$.

שרטטו את הגרפים של f ו- F , בהינתן:

א. f אינה רציפה (ב-0), אבל F רציפה.

ב. F אינה גזירה ב-0.

ג. תן דוגמה לפונקציה $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, כך ש- f אינה רציפה ב-0,

אבל $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ גזירה ב-0.

(2) הוכיחו את 'משפט ערך הביניים השני לאינטגרלים', בהנחה שהפונקציות רציפות (ולא אינטגרביליות):

תהי f רציפה ב- $[a,b]$.

אם קיימת פונקציה גזירה F ב- $[a,b]$, כך ש- $F' = f$,

אז $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

(3) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

הוכיחו כי $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, f) = \int_a^b f(x) dx$.

סימונים: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ עם $x_0 = a$ ו- $x_n = b$, $S(P, f) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

(4) תהי $a_n = \ln \left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

המירו את a_n לסכום רימן ומצאו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(5) תהינה $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, כך ש- f' ו- g' רציפות ב- $[a,b]$.

הוכיחו כי $\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$.

(6) תהי $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ברציפות, ותהי f רציפה בטווח של ϕ .

$$\text{הוכיחו כי } \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$$

(7) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ויהיו $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירות.

הוכיחו כי אם הטווחים של u ו- v מוכלים ב- $[a, b]$,

$$\text{אז } \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il