תיאוריית הקוונטים ב מספר הקורס 141421

פרק 4 - תרגילים ברמת מבחן

תוכן העניינים

שאלות חזרה קצרות בנושאים ספציפיים

שאלות

1) המודל הקוונטי לאטום המימן 1

האם לפי המודל הקוונטי לאטום המימן מרחק האלקטרון מהגרעין במצב היסוד חייב להיות שווה לרדיוס בוהר?

2) המודל הקוונטי לאטום המימן 2

האם המודל של בוהר נותן את הערך המדויק של התנ״ז באטום המימן?

3) המודל הקוונטי לאטום המימן 3

גז של אטומי מימן נמצא ברמה $4d$ $(n=4,\ l=2)$.

כמה קווי פליטה נוכל לראות מהגז? ספרו את כל קווי הפליטה האפשריים עד שהאטומים מגיעים לרמת היסוד.

4) המודל הקוונטי לאטום המימן 4

אטום מימן נמצא במצב $n=3,\ l=1$. האם הזווית בין התנ״ז של האלקטרון לשדה המגנטי חיצוני יכולה להיות 135 מעלות?

5) המודל הקוונטי לאטום המימן 5

מערכת מסוימת נמצאת במצב הקוונטי $\psi(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{21}}\left(4Y_4^2-Y_4^3+2Y_3^3\right)$, כאשר

Y_l^m הן הספריות ההרמוניות.

מה ההסתברות שבמדידת גודלו של התנז יתקבל הערך $\sqrt{20}\hbar$?

6) אפקט זימן 1

מהו גודלו של השדה המגנטי הקבוע הדרוש על מנת שעבור אטום מימן הרמה $(n=5,\ l=4, m=3)$ תתלכד עם הרמה $(n=6,\ l=2, m=-1)$? התעלמו מספין האלקטרון.

7) אפקט זימן 2

כמה קווים ספקטרלים שונים ניתן לראות בעקבות מעברים באפקט זימן הנורמאלי?

8) אפקט זימן 3

אטום דמוי מימן מורכב מאלקטרון אחד וגרעין בעל מסה $3m_p$ ומטען $5e$.

שמים את האטום באזור עם שדה מגנטי חיצוני אחיד שגודלו $2\cdot10^4T$.

מצאו את אורך הגל הקצר ביותר שיוכל להתקבל מהמעבר של האלקטרון מהמצב $2p$ לרמת היסוד.

תשובות סופיות

1) לא
2) לא
3) 5 מעברים.
4) הזווית אפשרית.
5) $\frac{17}{21}$
6) 718 T
7) 3 קווים.
8) 48.4 אנגסטרום.

תרגילים בתורת הקוונטים:

שאלות:

1) תרגיל - בור סופי

חלקיק בעל מסה m משוחרר ברגע $t=0$ בתוך בור פוטנציאל סופי בגובה V_0.

כלומר פוטנציאל מהצורה:
$$V(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le l\\ V_0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

פונקציית הגל ב $t=0$ היא
$$\psi(x,t=0)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) & 0\le x\le l\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

א. מהו ערך התוחלת (ערך תצפית/ממוצע) של אנרגיית החלקיק ב $t=0$?
ב. האם ערך התוחלת של האנרגיה ישתנה בזמן? נמקו.
ג. האם פונקציית הגל של החלקיק היא פונקציה עצמית של ההמילטוניאן?
ד. האם פונקציית הגל תשתנה כתלות בזמן? אם כן הסבירו איכותית כיצד ניתן לחשב את פונקציית הגל כתלות בזמן. אם לא הסבירו את שיקולכם.
ה. מהו התנאי על נתוני הבעיה המתאר מצב קשור (כלומר מצב שבו החלקיק לא יכול להגיע לאינסוף)?

2) תרגיל - חלקיק בחלק שמאלי של בור אינסופי

חלקיק נמצא בתוך בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l. מצב החלקיק ב $t=0$ הוא $\psi(x)=\alpha\phi_1(x)+\beta\phi_2(x)$ כאשר $\phi_1(x)$ ו- $\phi_2(x)$ הן המצבים העצמיים של רמת היסוד והרמה הראשונה בבור.

α ו- β קבועים נתונים.

א. מהי ההסתברות שהחלקיק נמצא בחצי השמאלי של הבור ב $t=0$?
ב. מצאו את ההסתברות שהחלקיק נמצא בחלק השמאלי כתלות בזמן?
ג. אילו ערכים יכולים להתקבל במדידת האנרגיה של החלקיק? מהו הערך הממוצע של האנרגיה ב $t=0$?
ד. חזרו על סעיף ג' עבור $t>0$.

3) תרגיל - בור חצי אינסופי

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת פוטנציאל של בור חצי אינסופי, כלומר:

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x\geq 0\\ 0 & -l\leq x<0\\ V_0 & x<-l\end{cases}$$

יש לבטא את התשובות באמצעות הנתונים בשאלה וקבועי הטבע.

עבור חלקיק המגיע משמאל לבור עם אנרגיה $E>V_0$

א. מהו הסיכוי להחזרה של החלקיק מהבור? מה היחס בין מספר הגל של החלקיק מחוץ לבור ובתוך הבור?

ב. מהי פונקציית הגל של החלקיק? (מצאו את הקבועים של הפונקציה כביטוי של הקבוע של פונקציית התנועה משמאל)

עבור חלקיק עם אנרגיה $E<V_0$

ג. מהן האנרגיות המותרות במערכת? ניתן להשאיר משוואה סתומה עם האנרגיה כנעלם יחיד.

4) מציאת פוטנציאל בהינתן פונקציית גל

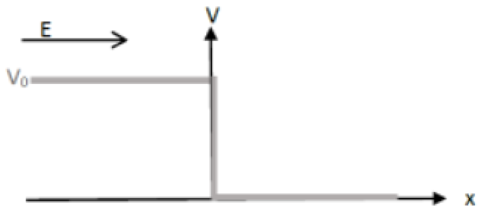
נתון ההמילטוניאן של מערכת חד מימדית מהצורה: $H=\frac{P^2}{2m}+V(x)$

נתון כי אנרגית רמת הייסוד היא אפס ופונקציית הגל של רמת הייסוד היא: $\psi_0(x)=\frac{A}{\sin h(x)}$

כאשר A קבוע נרמול. מצאו את $V(x)$.

5) פיזור ממדרגה הפוכה

אלומת חלקיקים בעל מסה m ואנרגיה E מגיעה משמאל ופוגשת מדרגת פוטנציאל "הפוכה":



$$E>V_0 \qquad V=\begin{cases}V_0>0 & x<0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

א. רשמו את משוואת שרדינגר בכל המרחב ופתרו אותה. ציירו סכמתית את פונקציית הגל בכל המרחב.

ב. מצאו את מקדם ההחזרה והראו כי ניתן לבטא אותו בעזרת:

$$R=\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{V_0}{E}}}{1+\sqrt{1-\frac{V_0}{E}}}\right)^2$$

ג. נויטרון בעל אנרגיה קינטית 4MeV פוגע בגרעין מסוים.
נתון כי ההסתברות של הנויטרון להירתע ולא לחדור כלל לתוך הגרעין היא 0.25.
בהנחה כי המצב המתואר בסעיפים הקודמים הוא קרוב טוב לבעיה זו, מהי האנרגיה הפוטנציאלית בבעיה?

6) ניוון באוסילטור דו מימדי

ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני דו מימדי נתון לפי:

$$H=\frac{P_x^2+P_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_1^2X^2+\frac{1}{2}m\omega_2^2Y^2$$

כאשר $\omega_1\neq\omega_2$ נתון כי לרמת הייסוד אנרגיה E_0 ולרמה המעוררת הראשונה אנרגיה $\frac{5}{3}E_0$. מהו הניוון של הרמה המעוררת השניה?

7) מדידת ספין ב zxz

פונקציית הגל של חלקיק עם ספין חצי נתונה בבסיס S_z לפי:

$$\sqrt{\frac{3}{5}}|1/2>+\sqrt{\frac{2}{5}}|-1/2>$$

מודדים את רכיב ה z של הספין ואחרכ את רכיב ה x ואחר"כ שוב את רכיב ה z של הספין. מה ההסתברות לקבל $\frac{1}{2}\hbar$ במדידה האחרונה?

8) שלושה מצבים עם שלוש אנרגיות

נתון חלקיק בעל ספין 1 . ידוע שלאנרגיה של החלקיק שלושה מצבים שונים בלבד E_0 , E_1 ו- E_2 . ידוע גם כי אם החלקיק במצב ספין |1> אז ההסתברות למדוד אנרגיה E_0 היא $\frac{1}{2}$ וההסתברות למדוד את האנרגיה E_1 היא $\frac{1}{2}$. עוד ידוע שאם החלקיק במצב ספין |0> אז ההסתברות למדידת כל אחד מערכי האנרגיה שווה. מהן ההסתברויות למדידת כל אחד מערכי האנרגיה אם החלקיק במצב ספין |-1>?

9) המילטוניאן AA דגר

נתון ההמילטוניאן:

$$H=\frac{1}{2m}\left(iP-\hbar f(X)\right)\left(-iP-\hbar f(X)\right)$$

כאשר $f(x)$ פונקציה ממשית.

א. רישמו את ההמילטוניאן בצורה $H=\frac{1}{2m}AA^{\dagger}$, הראו כי הוא הרמיטי וכי האנרגיות העצמיות הן אי שליליות.

ב. נתון כי $f(x)=Cx^{2n-1}$ עבור $n\geq 1$ שלם ו - C חיובי. מהי פונקצית הגל של האנרגיה אפס (עד כדי קבוע נרמול)?

10) אופרטור העלאה והורדה להמילטוניאן

נתונים שני אופרטורים המקיימים :

$$[H_0,A]=cA \text{ ו} [H_0,B]=-cB$$

א. הראו כי אם $|\psi_n>$ היא פונקציה עצמית של H_0 אז גם $A|\psi_n>$ ו- $B|\psi_n>$ הן פונקציות עצמיות של H_0 .

ב. נתון כי אנרגיית רמת היסוד היא E_0 וש $B|\psi_n>=0$ רק עבור רמת היסוד וגם ש $A|\psi_n>\neq 0$. אילו ערכי אנרגיה ניתן למדוד?

ג. נתון כי AB הרמיטי. עבור ההמילטוניאן :

$$H=H_0+\alpha AB$$

כאשר $\alpha>0$ הוא קבוע נתון. אילו אנרגיות של H יהיו שונות מאלו של H_0 ?

ד. נתון כי $A|\psi_n>$ ו- $B|\psi_n>$ מנורמלים. מהו הערך המוחלט של השינוי ברמות האנרגיה של הסעיף הקודם?

11) המילטוניאן עם אופרטור סיבובי כללי

נתונים האופרטורים A_1 , A_2 ו- A_3 המקיימים את יחסי החילוף הבאים $[A_i,A_j]=i\varepsilon_{ijk}A_k$ כאשר ε_{ijk} הוא סימן לוי-צ׳יוויטה.

נתון ההמילטוניאן $H=\alpha A_3^2+\beta(A_1^2+A_2^2)$ כאשר α ו- β הם מספרים ממשיים.

א. מהן רמות האנרגיה של המערכת?

מוסיפים להמילטוניאן תיקון מהצורה $H'=\lambda(A_1^2-A_2^2)$.

ב. מה התיקון מסדר ראשון לכל אחת מרמות האנרגיה?

12) בור עם מדרגה באמצע

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת השפעת הפוטנציאל הבא :

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0\leq x\leq L\\ V_0 & L\leq x\leq 2L\\ 0 & 2L\leq x\leq 3L\\ \infty & x>3L\end{cases}$$

מצב החלקיק ב- $t=0$ הוא:

$$\psi(x,t=0)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) & 2L<x<3L\\ 0 & else\end{cases}$$

א. חשבון את ערך התצפית של אופרטור האנרגיה כתלות בזמן $<H(t)>$.
נמדוד מספר מערכות זהות למערכת המתוארת למעלה במקביל.
האם בכל המערכות נמדוד את אותה אנרגיה? הסבירו.

ב. מהו ערך התצפית של אופרטור המקום ברגע $t=0$? האם ערך תצפית זה ישתנה בזמן? הסבירו.

ג. כתבו את פונקציית הגל ב- $t=0$ כסופרפוזיציה של שני מצבים עצמיים של אופרטור התנע. מהו ערך התצפית של אופרטור התנע ב- $t=0$?

ד. כעת התייחסו לפוטנציאל V_0 כאל הפרעה קטנה.
מהי רמת האנרגיה המעוררת הראשונה במערכת בפיתוח עד לסדר ראשון בתורת ההפרעות?
מהו התנאי על הפוטנציאל V_0 כך שניתן להשתמש בתורת ההפרעות?

13) סופרפוזיציה 3 ו-4 באוסילטור הרמוני

חלקיק נמצא תחת פוטנציאל של אוסילטור הרמוני קוונטי.
מצב החלקיק נתון לפי פונקציית הגל הבאה:

$$\psi(x)=c_1\phi_3(x)+c_2\phi_4(x)$$

כאשר c_1 ו- c_2 הם קבועים ממשיים ו- ϕ_3, ϕ_4 הן הפונקציות העצמיות של ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני חד מימדי עבור $n=3,4$ בהתאמה.
נתון כי ההסתברות של החלקיק להיות במצב ϕ_4 גדולה פי 2 מההסתברות שלו להיות במצב ϕ_3.

א. חשבון את המקדמים c_1 ו- c_2.

ב. מה ערכי האנרגיה האפשריים של החלקיק?
מהו ערך התצפית של האנרגיה?

ג. מהי האנרגיה הפוטנציאלית ומהי האנרגיה הקינטית של החלקיק?

ד. על החלקיק בוצעה מדידה ונמצא כי האנרגיה שלו היא: $\frac{9\hbar\omega}{2}$,
לאחר זמן מה בוצעה מדידה נוספת, מהן התוצאות האפשריות למדידה זו?

הסבירו כיצד התשובה מסתדרת עם עיקרון אי הודאות באנרגיה ובזמן $\Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$.

ה. כעת נתון כי החלקיק נמצא ברמת היסוד ומסיפים להמילטוניאן הפרעה קטנה מהצורה: $H' = A_3x^3 + A_4x^4$.
חשבו את התיקון הראשון לאנרגיית רמת הייסוד של החלקיק.
העזרו ב:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-(\alpha x)^2}{2}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

$$\hat{a}|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle \qquad \hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle$$

14) ניתוח רמה באטום המימן

פוטון באורך גל של: $6562.79\cdot 10^{-10}m$ נפלט מאטום מימן.

א. מצאו מאיזו לאיזו רמה נפלט הפוטון וחשבו את רדיוס מסלול האלקטרון, על פי מודל בוהר, אחרי הפליטה.

ב. על פי מודל שרדינגר ובהנחה שהתנע הזוויתי המסלולי הוא אפס, רשמו את פונקציית הגל המלאה של האלקטרון אחרי הפליטה. (העזרו בנוסחאות).

ג. חשבו מהו המרחק המסתבר ביותר שבו ניתן למצא את האלקטרון. יש להגיע למשוואה עם r^3, אין צורך לפתור אותה.

ד. חשבו מהו ערך התצפית של מרחק האלקטרון מהגרעין $\langle r\rangle$ ברמה זו?

$$\int_0^\infty x^n e^{\frac{-x}{a}}dx = a^{n+1}\cdot n!$$

ה. הסבירו את ההבדל בין סעיף ג' ל-ד'.

ו. כעת נניח שהאטום נמצא תחת שדה חשמלי חלש E_0 בכיוון z, חשבו את התיקון מסדר ראשון לרמת האנרגיה של האלקטרון. ההמילטוניאן של השדה הוא: $H' = eE_0z$, כאשר e הוא מטען האלקטרון.

15) הפרעה באטום המימן

נתון המילטוניאן של אטום המימן עם הפרעה.

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{ke^2}{r} + \lambda \frac{\delta(r)}{r^2}$$

אילו רמות אנרגיה יקבלו תיקון השונה מאפס בסדר ראשון של λ?

תשובות סופיות:

1)

א. $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}$

ב. לא ישתנה , לפי משפט ארנפסט

ג. הפונקציה אינה פונקציה עצמית כי היא לא מקיימת את התנאי של רציפות הנגזרת בשפה

ד. מכיוון שפונקציית הגל אינה פונקציה עצמית של ההמילטוניאן היא תשתנה עם הזמן, בשביל למצא את ההתפתחות בזמן יש למצא את הפונקציות העצמיות ולרשום את פונקציית הגל בקומבינציה לינארית של הפונקציות העצמיות. משם לפתח כל פונקציה עצמית בזמן.

ה.

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2} < V_0$$

2)

תשובות

3)

תשובות

א) מכיוון שהפוטנציאל אינסוף בראשית החלקיק מחויב לחזור, ולכן R=1

$$\boxed{\frac{k_2}{k_1}=\sqrt{1-\frac{V}{E}}}$$

ב)

$$\boxed{\begin{aligned} B &= A\,\frac{ik_2\sin(k_2 l)+k_1\cos(k_2 l)}{ik_2\sin(k_2 l)-k_1\cos(k_2 l)}\,e^{-2ik_1 l} \\ C &= \frac{Ak_2e^{ik_1 l}}{k_1\cos(k_2 l)-ik_2\sin(k_2 l)} \\ D &= -C \end{aligned}}$$

ג)

$$\boxed{\sqrt{\frac{E}{V_0-E}}=-\tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}l\right)}$$

4) $V(x)=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1+\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)}\right]$

5) א.

$x<0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V\psi=E\psi$$

$$\psi_2(x)=Ae^{ik_2x}+Be^{ik_2x}$$

$$k_2=\frac{2m(E-V_0)}{\hbar}$$

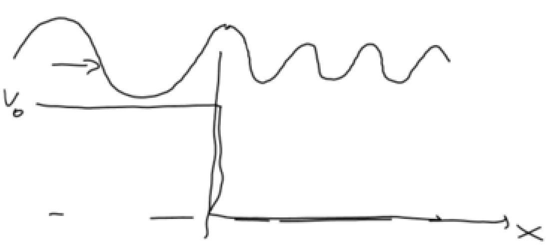
$x>0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=E\psi$$

$$\psi_R(x)=Ce^{ik_Rx}$$

$$k_R=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$k_R=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$



ב. הוכחה.

ג. $V_0\approx 32\text{MeV}$

6) 2

7) 0.5

8)

9) א. הוכחה בסרטון
ב. $\psi_0(x)=\alpha e^{-\frac{c}{2n}x^{2n}}$

10) א. הוכחה בסרטון
ב. $E_n=E_0+nc$
ג. כל האנרגיות מלבד E_0
ד. α

11) א. $E_{lm}=\alpha m^2+\beta(l(l+1)-m^2)$
ב. 0

12) א. $< H(t) >=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, החישוב נותן רק ערך ממוצע של הרבה מדידות של מערכות זהות, יש אינסוף ערכים אפשריים של אנרגיה שניתן לקבל במדידה ספציפית.
ב. $< x(t=0) >=2L$, ישתנה בזמן כי הוא לא מתחלף עם ההמילטוניאן.
ג. $< p(t=0) >=0$, $\psi(x,t=0)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{L}x}-e^{-i\frac{\pi}{L}x}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}$
ד. $V_0 << \frac{\hbar^2}{mL^2}$, $E'_2=\frac{2\pi^2\hbar^2}{9mL^2}+\frac{V_0}{3}\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)$

13) א. $c_1=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_2=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
ב. $E_3=\frac{7}{2}\hbar\omega$, $E_4=\frac{9}{2}\hbar\omega$, $< E >=\frac{25}{6}\hbar\omega$
ג. $< U >=< E_k >=\frac{25}{12}\hbar\omega$
ד. $E=\frac{9}{2}\hbar\omega$
ה. $\frac{A_4}{4\alpha^4}$

14) א. $n=3\rightarrow n=2$, $r=2.1\cdot10^{-10}m$
ב. $\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}}\left(2-\frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}\frac{l}{\sqrt{4^{\frac{1}{11}}}}$
ג. $-r^3+8r^2a-16ra^2+8a^3=0$
ד. $6a$
ה. אם נעשה מספר רב של מדידות על מערכות זהות אז הכי הרבה אלקטרונים יצאו לפי התוצאה של הערך המסתבר ביותר. הערך הממוצע של כל המדידות

תהיה התוצאה בסעיף ד' והן לא יהיו זהות.

ו. $E_2^{(1)} = 0$

15) האנרגיות של $l = 0$ יקבלו תיקון שונה מאפס בסדר ראשון