

# מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 11 - תנע זוויתי -

תוכן העניינים

1. נוסחאות וחוקי שימור..... 1
2. תנע זוויתי ביחס למרכז מסה..... 5

## נוסחאות וחוקי שימור:

### רקע

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{r}$  - הוא וקטור המיקום של הגוף  
 $\vec{p}$  - התנע הקווי

עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי  $L = mvd$  כאשר  $d$  זה המרחק האפקטיבי

הקשר בין תנ"ז למומנט כוח:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

חוק שימור התנע הזוויתי:  
 אם  $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$  אז התנע הזוויתי נשמר

סיכום חוקי שימור:

תנע -  $\sum \vec{F}_{ext} = 0$   
 אנרגיה - האם כל הכוחות משמרים?  
 תנ"ז -  $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$

### שאלות:

#### 1) תנ"ז בזריקה משופעת

אבן נזרקת בזריקה משופעת במהירות  $v_0$  ובזווית  $\alpha$ ,

כוח הכובד שפועל על האבן  $\vec{F} = -mg\hat{y}$ .

א. מהו התנ"ז של האבן ביחס לנקודת המוצא כתלות בזמן?

ב. מהו מומנט הכוח של כוח הכובד?

ג. הראה כי השינוי של התנ"ז בזמן שווה למומנט הכוח של כוח הכובד.

**(2) גוף מסתובב על שולחן ונמשך למרכז**

מסה  $m_1$  מחוברת לחוט המחובר למרכז שולחן.



המסה נעה במסלול מעגלי ברדיוס קבוע  $r_1$  ובמהירות קבועה  $v_0$ .

ברגע מסוים מושכים את המסה למרכז המעגל (מקצרים את אורך החוט) ומפסיקים כאשר אורך החוט שווה  $r_2$  והמסה מסתובבת שוב בתנועה מעגלית קבועה.

רגע לאחר מכן מניחים מסה נוספת  $m_2$  במסלול של  $m_1$  והמסות מתנגשות התנגשות פלסטית. מצאו את מהירות המסות לאחר ההתנגשות.

**(3) שתי מחליקות על הקרח**



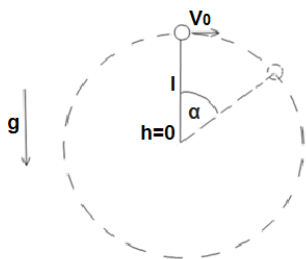
שתי מחליקות תאומות בעלות מסה זהה  $m$  מחליקות בכיוונים מנוגדים ובמהירות  $v_0$ . המחליקות נעות על קווים ישרים והמרחק בין הקווים הוא  $d$ . באמצע ביניהן שמים חבל, כאשר הן מגיעות לחבל, שתיהן תופסות את החבל ומתחילות להסתובב סביב המרכז ביניהן.

- א. מה המהירות הזוויתית שהן מסתובבות?
- ב. כעת המחליקות מושכות את החבל ומתקרבות זו לזו עד אשר המרחק

$$\frac{d}{2}$$

מצא את המהירות הזוויתית החדשה של המחליקות.

**(4) כדור מסתובב אנכית**



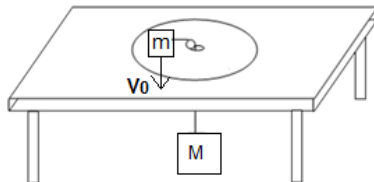
כדור בעל מסה  $m$  מחובר לחוט בעל אורך  $l$  ומסתובב במעגל אנכי.

נתון כי מהירות הכדור בשיא הגובה היא  $v_0$ .

- א. מצא את מומנט הכוח הפועל על הכדור כפונקציה של הזווית  $\alpha$ .
- ב. מצא את התנע הזוויתי של הכדור כפונקציה של הזווית  $\alpha$ .

**(5) כדור בתוך חרוט**

כדור קטן נע בתוך חרוט המחובר הפוך למשטח. נתון כי מהירות הכדור ההתחלתית היא  $v_0$  בכיוון אופקי ומשיק לדופן החרוט. גובהו ההתחלתי  $H$ . מצא את הגובה המקסימאלי אליו יגיע הכדור (החרוט אינו זז). הנחיות: מספיק להגיע למשוואה ממעלה שלישית על  $h$  אין צורך לפתור אותה.

**(6) כדור מסתובב מחובר למסה תלויה**

מסה  $m$  נעה על שולחן חסר חיכוך ומחובר באמצעות חוט העובר דרך מרכז השולחן למסה  $M$  התלויה באוויר. אורך החוט הוא  $L$ . נתון כי ב-  $t=0$  המסה  $M$  נמצאת במנוחה והמסה  $m$  נמצאת במרחק  $R$  ממרכז הלוח, במהירות התחלתית  $v_0$ , בכיוון מאונך לרדיוס.

רשום את משוואת שימור האנרגיה והתנע הזוויתי ומצא משוואה דיפרנציאלית התלויה רק בגודל  $r$ , מרחק המסה  $m$  ממרכז השולחן.

**(7) מומנט הכוח לא תלוי בנקודת הייחוס**

הוכיחו כי אם הכוח השקול על קבוצת גופים מתאפס אז מומנט הכוח על קבוצת הגופים אינו תלוי בנקודת הייחוס.

**(8) תנע זוויתי לא תלוי בנקודת ייחוס**

הוכיחו כי אם התנע הקווי של קבוצת גופים מתאפס אז התנע הזוויתי שלהם לא תלוי בנקודת הייחוס.



**9) זבוב הולך על מוט\***

שתי מסות נקודתיות  $m_1$  ו- $m_2$  מחוברות באמצעות מוט חסר מסה באורך  $d$ . על המסה  $m_1$  נמצא זבוב בעל מסה  $m_3$ . כל המערכת נמצאת על שולחן אופקי ומסתובבת סביב מרכז המסה שלה במהירות זוויתית קבועה  $\omega_0$ . ברגע מסוים הזבוב מתחיל ללכת על המוט במהירות  $v$  ביחס למוט ונעצר כאשר הוא מגיע למרכז המסה של שלושת הגופים (שימו לב שהמוט לא מחובר לשולחן). מהי המהירות הזוויתית של המערכת כאשר הזבוב נעצר?

**תשובות סופיות:**

א.  $-\frac{1}{2}gt^2v_0m \cos \alpha \hat{z}$       ב.  $-mgv_0 \cos \alpha t \hat{z}$       ג. שאלת הוכחה.

א.  $u = \frac{m_1 r_1 v_0}{r_2 (m_1 + m_2)}$       ב.  $\omega'' = \frac{8v_0}{d}$

א.  $\omega' = \frac{2v_0}{d}$       ב.  $\sum \tau = -mgl \sin \alpha$

א.  $\dot{L} = lmv(-\hat{z})$       ב.  $(2gH + v_0^2)h_{\max}^2 + 2gh_{\max}^3 + v_0^2H^2$

א.  $a + br + \frac{c}{r^2} = \&$

א. שאלת הוכחה.

א. שאלת הוכחה.

א. שאלת הוכחה.

א.  $\omega' = \frac{(m_1 + m_3)(m_1 + m_2)}{m_1(m_1 + m_2 + m_3)} \omega_0$

## תנע זוויתי ביחס למרכז מסה:

### רקע

$$\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$$

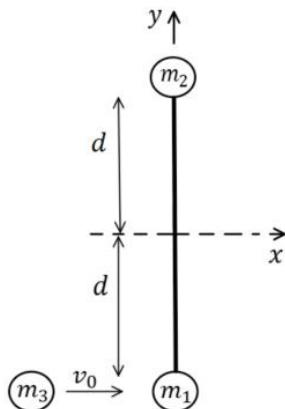
$\vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$  - התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת

$\vec{L}_{c.m.}$  - התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר מה התנע של כל גוף במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.

### שאלות:

#### 1) מסה מתנגשת במוט עם שתי מסות

שתי מסות נקודתיות  $m_1$  ו- $m_2$  מחוברות באמצעות מוט חסר מסה באורך  $2d$ . המערכת נמצאת במנוחה על שולחן אופקי חסר חיכוך (שתי המסות על השולחן, המוט אופקי). מסה שלישית  $m_3$  נעה במהירות  $v_0$  ומתנגשת התנגשות פלסטית במסה  $m_1$ . נסמן את רגע ההתנגשות ב- $t = 0$ .  
 $d = 3\text{ m}$ ,  $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ,  $m_1 = m_2 = m_3 = 0.2\text{ kg}$



- חשבו את מיקום מרכז המסה ברגע  $t_1 = 0.5\text{ sec}$ . ביחס לראשית הנמצאת במרכז המוט בהתחלה ואינה נעה עם המוט.
- חשבו את התנע הזוויתי של המערכת ביחס לראשית הצירים ברגע  $t_1$ .
- חשבו את התנע הזוויתי של המערכת ביחס למרכז המסה שלה ברגע  $t_1$ .
- מצאו את המהירות הזוויתית של המוט ביחס למרכז המסה לאחר ההתנגשות.
- מהי המהירות הקווית של  $m_1$  ומהי המהירות הקווית של  $m_2$  מיד לאחר ההתנגשות?

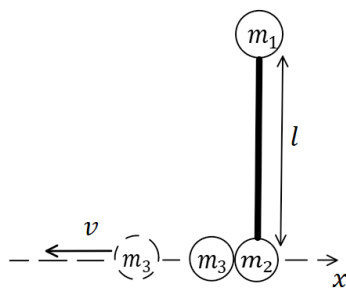


**2) שתי מסות מחוברות מסתובבות ומתנגשות בשלישית**

שתי מסות זהות  $m$  מחוברות במוט חסר מסה באורך  $d$  ומסתובבות סביב מרכז המסה שלהן במהירות זוויתית קבועה  $\omega$ . אחת המסות מתנגשת התנגשות פלסטית במסה זהה נוספת הנמצאת במנוחה. מצא את מהירות מרכז המסה של שלושת המסות המחוברות לאחר ההתנגשות ואת המהירות הזוויתית שלהן סביב מרכז המסה של שלושתן.

**3) מסה נפרדת ממוט עם שתי מסות**

שלוש מסות  $m_1, m_2, m_3$  נתונות ומחוברות לקצה של מוט באורך  $l$ .



המסות  $m_2, m_3$  מחוברות בקצה התחתון באיור והמסה  $m_1$  בקצה העליון. המוט נמצא על שולחן חסר חיכוך (באיור המבט מלמעלה) ובמנוחה. ברגע מסוים יש פיצוץ בין המסות  $m_2, m_3$  והמסה  $m_3$  מתנתקת מהמוט וממשיכה במהירות  $v$  נתונה (ביחס לשולחן) ובמאונך למוט. המסה  $m_2$  נשארת מחוברת למוט. נתון כי:  $m_1, m_2 = M, m_3 = 3M$ .

- א. מצא את מהירות מרכז המסה של המוט (עם המסות המחוברות).
- ב. מצא את המהירות הזוויתית של המוט סביב מרכז המסה שלו.

**תשובות סופיות:**

$$\begin{aligned} \text{א. } \vec{r}_{cm}(t_1) &= (1_m - 1_m) & \text{ב. } L &= 3.6 \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} & \text{ג. } L_{c.m.} &= 4.8 \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \\ \text{ד. } \omega &= 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} & \text{ה. } V_1 &= 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x}, V_2 &= -2 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x} & \text{ו. } u_{1,2,3,cm} &= 0, \omega' = \frac{3}{4} \omega \\ \text{ז. } v_{1,2,c.m.} &= \frac{3}{2} v & \text{ח. } \omega &= \frac{3v}{l} \end{aligned}$$