

# מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 12 - תנועה הרמונית

תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה ..... 1
2. תרגילים מסכמים ..... 6
3. תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות) ..... 9
4. תרגילים לבקשת סטודנטים ..... 12

## תנועה הרמונית פשוטה:

רקע:

משוואת התנועה:

$$-k(x - x_0) = m\ddot{x}$$

$k$  ו- $m$  - קבועים חיוביים כלשהם.

$x_0$  - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

$x$  - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או כל משתנה אחר.

$\ddot{x}$  - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני  $k$ .

פתרון המשוואה:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$$

$x_0$  - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה:  $\Sigma \vec{F} = 0$ .

$A$  - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משווי המשקל.

$\omega$  - תדירות זוויתית:  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .

$\varphi$  - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

$x_0$  - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$

$A, \varphi$  מוצאים מתנאי התחלה  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ .

נוסחה למהירות המקסימאלית:

$$v_{max} = \omega A$$

מטוטלת פיזיקאלית:



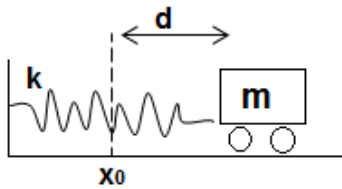
$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$$

אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}mA^2$$

שאלות:

**(1) מסה מתנגשת במסה**



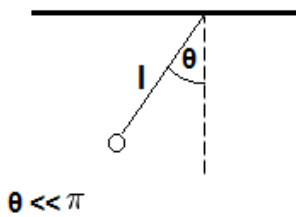
מסה  $m$  מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ  $k$ . מותחים את המסה מרחק  $d$  מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה. מצאו את  $x(t)$  של המסה.

**(2) מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה**



מסה  $m_1$  מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע  $k$ . מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר  $M$ .

- א. מצאו את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבעו את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).
- ב. מצאו את תדירות התנודה של המערכת.
- ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתוחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

**(3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם מומנטים)**

נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.

אורך החוט של המטוטלת הוא  $l$ .

מצאו את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.

הניחו כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה  $\theta$  (דרך מומנטים).

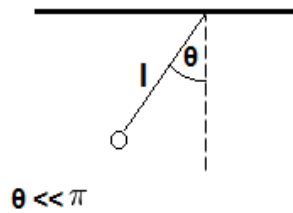
**(4) דיסקה עם חור**

נתונה דיסקה בעלת מסה  $M$  ורדיוס  $R$ . קודחים בדיסקה

חור עגול ברדיוס  $\frac{R}{4}$  שמרכזו  $\frac{R}{2}$  ממרכז הדיסקה. מחברים את

הדיסקה במרכזה אל קיר כך שהיא יכולה להתנדד סביב

מרכזה. מצאו את תדירות התנודות הקטנות.

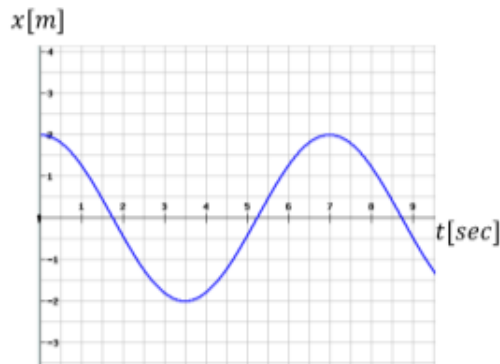
**(5) מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)**

נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה ו

אורך החוט של המטוטלת הוא  $l$ .

מצאו את תדירות התנודות הקטנות כפונקציה של הזמן.

הניחו כי המטוטלת מתחילה את תנ בזווית ידועה  $\theta$  (דרך אנרגיה).

**(6) גרף מיקום זמן**

הגרף הבא מתאר את מיקומו כתלות בזמן של גוף הנע בתנועה הרמונית פשוטה.

א. מהי אמפליטודת התנועה?

ב. מהו זמן המחזור?

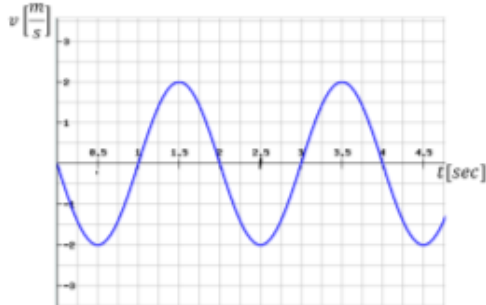
ג. מהי התדירות הזוויתית?

ד. מהי הפאזה?

ה. רשום נוסחה למהירות כתלות בזמן.

### 7) גרף מהירות זמן

מהירותו של גוף המתנדנד בתנועה הרמונית נתונה לפי הגרף הבא:



א. מתי מגיע הגוף לנקודת שיווי המשקל

בפעם הראשונה?

ב. האם תאוצת הגוף ב-  $t = 1\text{sec}$

מקסימאלית?

ג. האם ב-  $t = 1.5\text{sec}$  האנרגיה

קינטית מרבית?

ד. מהו הכוח ב-  $t = 2.5\text{sec}$ ?

ה. כמה מחזורי תנועה עשה הגוף

ב-4 השניות הראשונות של התנועה?

### 8) גליל מחובר לקפיץ מתגלגל ללא החלקה

גליל בעל מסה  $m$  ורדיוס  $R$  נמצא על משטח אופקי

לא חלק ומחובר באמצעות קפיץ אל הקיר.

קבוע הקפיץ הוא  $k$  והוא מחובר למרכז הגליל.

הנח שתנועת הגליל אופקית בלבד ושהוא מתגלגל

ללא החלקה על המשטח.

מצאו את תדירות התנודות הקטנות.

פתרו פעם אחת באמצעות אנרגיה ופעם נוספת

באמצעות כוחות ומומנטים.



### 9) גלגלת מסה וקפיץ

במערכת הבאה, המסה  $m_1$  קשורה בחוט דרך גלגלת

אל קפיץ המחובר לקרקע. הגלגלת אינה אידאלית.

נתון:  $R$  רדיוס הגלגלת,  $m_2$  מסת הגלגלת,  $k$  קבוע הקפיץ.

הניחו כי החוט לא מחליק על הגלגלת.

א. מצאו את נקודת שיווי המשקל.

ב. מצאו את תדירות התנודה.

ג. מושכים את המסה אורך  $d$  מנקודת שיווי המשקל.

מהו  $d_{\max}$  המרחק המקסימלי שניתן למשוך את המסה

מבלי שהמתיחות בחוט תתאפס במהלך התנועה?





### 10 מוט תלוי מחובר עם קפיץ לקיר

מוט בעל אורך  $L$  ומסה  $M$  (התפלגות אחידה) תלוי מהתקרה וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה. קצהו השני של המוט מחובר בקפיץ, בעל קבוע  $k$  לקיר. הקפיץ רפוי כאשר המוט נמצא מאונך לתקרה.

א. הראו כי תנועת המוט בזוויות קטנות היא תנועה הרמונית ומצאו את תדירות התנועה.

ב. מצאו את הזווית של המוט כפונקציה של הזמן אם המוט משוחרר ממנוחה בזווית נתונה  $\theta_0$ .

### תשובות סופיות:

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ב.} \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{16g}{247R}} \quad (4)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{ד.} \quad \omega \approx 0.898 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad T = 7 \text{ sec} \quad \text{ב.} \quad A = 2 \text{ m} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$v(t) = -1.80 \cdot \sin(0.898 \cdot t + 0) \quad \text{ה.}$$

$$0 \quad \text{ד.} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{ב. כן.} \quad t = 0.5 \text{ sec} \quad \text{א.} \quad (7)$$

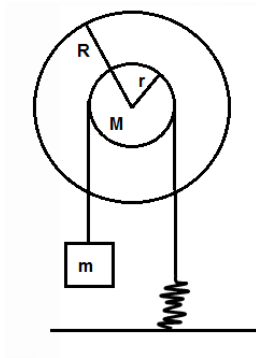
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad (8)$$

$$d_{\max} = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + \frac{1}{2}m_2}} \quad \text{ב.} \quad x_0 = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{ב.} \quad \omega = \sqrt{\frac{3(mg + 2kL)}{2mL}} \quad \text{א.} \quad (10)$$

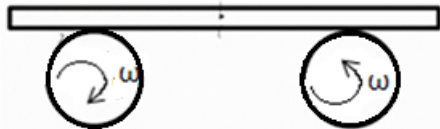
## תרגילים מסכמים:

### שאלות:



#### 1) דיסקה כפולה מסה וקפיץ

נתונה דיסקה ממוסמרת במרכזה לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).  
 הדיסקה בנויה משתי דיסקות מודבקות בעלות רדיוס  $r$  לדיסקה הקטנה ו- $R$  לדיסקה הגדולה.  
 סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט.  
 עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.  
 א. מצאו את תדירות התנודות.  
 ב. מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?



#### 2) מוט על שני גלגלים

מוט בעל מסה  $M$  מונח על שני גלגלים המקובעים במרכזם.  
 הגלגלים מסתובבים במהירות זוויתית  $\omega$  כך שהגלגל הימני מסתובב נגד כיוון השעון והשמאלי עם כיוון השעון.  
 בין המוט והגלגלים קיים חיכוך ומקדם החיכוך הקינטי נתון.  
 מניחים את המוט כך שמרכזו נמצא במרחק  $A$  מהמרכז בין הגלגלים.  
 מצא את תדירות התנודה של המוט.



#### 3) מסה על משטח על קפיץ אנכי

על קפיץ שקבועו  $k$  מונח משטח שמסתו  $m_1$ , המשטח צמוד לקצהו של הקפיץ.  
 על המשטח מונח גוף שמסתו  $m_2$ .  
 מכווצים את הקפיץ בשיעור  $\Delta y$  ומשחררים.  
 א. מה צריך להיות  $\Delta y_{\min}$  כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

ב. הניחו:  $\Delta y = 2\Delta y_{\min}$ ,  $k = 10 \frac{Nr}{m}$ ,  $m_1 = 0.04 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.06 \text{ kg}$

ומצאו את רגע הניתוק.

ג. באמצעות הנתונים המספריים מסעיף ב', מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?



(4) משטח על דיסקה מחובר לקפיץ נתונה מערכת כבשרטוט (אין החלקה במערכת). מהי התדירות?



(5) תנודה בתעלה בכדור"א בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשרטוט. מסת כדור הארץ M. מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשיה לנוע בתעלה?

(6) שתי מסות מחוברות בקפיץ\*\*

שתי מסות  $m_1$  ו-  $m_2$  מחוברות בקפיץ בעל קבוע  $k$  ואורך רפוי  $l$ . המסות נמצאות במנוחה על מישור אופקי חלק. נותנים דחיפה ימינה למסה  $m_1$  המקנה לה מהירות התחלתית  $v_0$ .  
 א. מהי תדירות התנודות של התנועה (כתלות בנתוני הבעיה)?  
 רמז: על מנת לפתור את המשוואות יש להחליף משתנים  
 ל-

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; x_{rel} = x_1 - x_2$$

ב. מצאו את מיקום המסה  $m_2$  כתלות בזמן.

## תשובות סופיות:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} Kx^2 - mgx + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \text{ב.} \quad \sqrt{\frac{2kR}{\frac{1}{2}MR + \frac{r^2}{R}}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_k g}{d}} \quad (2)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{ב.} \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = -2\Delta y_{\min} \omega \sin(\omega t), \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{ג.}$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{K}{m + 2M}\right)x \quad (4)$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{M}{R^3}\right)(x - 0) \quad (5)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$, A = \frac{\sqrt{v_0^2 + l^2 \omega^2}}{\omega}, \quad x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m} (l + v_0 t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{ב.}$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega l}$$

## תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות):

### שאלות:

#### 1) שני חצאי דיסקה



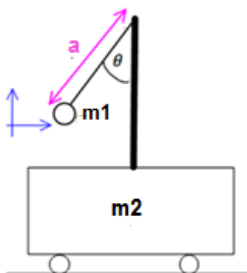
נתונים שני חצאי דיסקה התלויים על מסמר כמתואר בשרטוט. מסת הדיסקה ורדיוסה נתונים. מצא את התדירות של כל אחד מחצאי הדיסקה.

#### 2) חצי חישוק ושתי מסות



מצא את תדירות חצי החישוק שבתמונה. רדיוס R ומסתו M, בקצוותיו חוברו שתי מסות m. החישוק תלוי ממסמר בקודקודו.

#### 3) מטוטלת על עגלה נעה



עגלה בעלת מסה  $m_2$  חופשיה לנוע על משטח אופקי ללא חיכוך. אל העגלה מחובר מוט אנכי עליו תלויה מטוטלת מתמטית עם מסה  $m_1$  ואורך חוט a. משחררים את המסה (של המטוטלת) בזווית נתונה כאשר כל המערכת נמצאת במנוחה.

א. רשמו את מהירות המטוטלת במערכת העגלה כפונקציה של  $\theta$  ו- $\dot{\theta}$ .

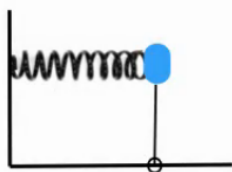
ב. רשמו את מהירות העגלה והמטוטלת כפונקציה של  $\theta$  ו- $\dot{\theta}$ .

ג. רשמו את משוואת שימור האנרגיה המכאנית של המערכת.

ד. רשמו את משוואת שימור האנרגיה בתנודות קטנות.

ה. מצאו את תדירות התנודה של המסה M.

#### 4) קפיץ מוט ומסה



נתונה מסה m המחוברת לקפיץ בעל קבוע k.

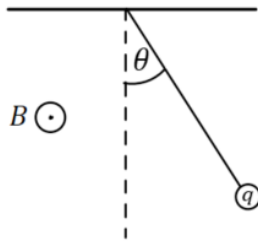
המסה גם מחוברת למוט חסר מסה בעל אורך l.

המוט מחובר לרצפה בציר המאפשר לו להסתובב.

המערכת בשרטוט נמצאת במצב שיווי משקל.

א. מהי תדירות התנודות הקטנות של המערכת?

ב. מהי המסה המקסימלית שתאפשר תדירות זו?

**(5) מטוטלת בשדה מגנטי**

מטוטלת מתמטית שאורכה  $L$ , מסתה  $m$  ומטענה  $q$

נתונה בשדה מגנטי אופקי  $B$  היוצא מהדף.

השדה המגנטי יוצר כוח מגנטי על המטוטלת כאשר

היא בתנועה לפי הנוסחה:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

א. מצא את הכוחות הפועלים על המטוטלת במהלך

התנועה כתלות בזווית  $\theta$  ובמהירות  $v$ .

ב. מסיטים את המטוטלת זווית קטנה  $\theta_0$  ומשחררים במנוחה.

מצא את משוואת התנועה של המטוטלת ומשם את מיקום המטוטלת

כתלות בזמן עבור זווית קטנות.

ג. מהי המתיחות בחוט כתלות בזמן.

ד. מהי המתיחות המקסימאלית בחוט ובאיזו זווית ומהירות מצב זה מתרחש?

## תשובות סופיות:

$$(1) \text{ דיסקה 1: } -\left(\frac{A}{B}\right) \cdot (\theta - (0)) = \ddot{\theta}, \text{ דיסקה 2: ראה סרטון.}$$

$$(2) \quad -\frac{(2m+M) \cdot gb}{I} \theta = \ddot{\theta}$$

$$(3) \quad v_x = \dot{\theta} a \cos \theta, \quad v_y = \dot{\theta} a \sin \theta \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad v_{1x} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a \dot{\theta} \cos \theta, \quad v_{1y} = \dot{\theta} a \sin \theta$$

$$\text{ג.} \quad E = \frac{1}{2} m_1 \left( \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \right)^{-2} a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 a^2 \sin^2 \theta - m_1 g a \cos \theta$$

$$\text{ד.} \quad E = \frac{1}{2} m_1 \left( \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{ga}{2} \theta^2 \right) - m_1 g a \frac{1}{2}$$

$$\text{ה.} \quad \omega = \sqrt{\frac{\frac{ga^2}{2}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2}}$$

$$(4) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{l}} > 0 \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad m < \frac{lk}{gv}$$

$$(5) \quad \text{א.} \quad |\vec{F}| = qvB, \text{ כיוון החוצה מהמעגל.}$$

$$\text{ב.} \quad \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

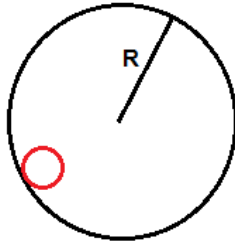
$$\text{ג.} \quad T(t) = -qB\sqrt{gL}\theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + mg \quad \text{עבור } \theta_0 \ll \frac{2qB}{m} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\text{ד.} \quad T_{\max} = mg + qB\sqrt{gL}\theta_0$$

## תרגילים לבקשת סטודנטים:

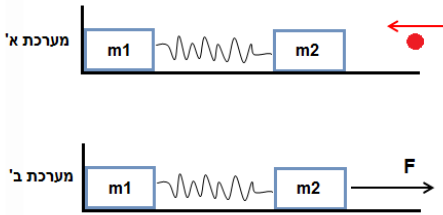
### שאלות:

#### 1) כדור מתגלגל בצינור



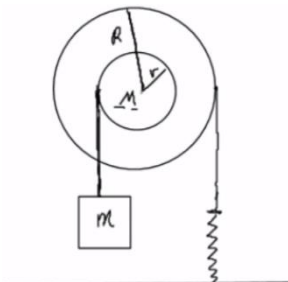
- דיסקה בעלת רדיוס  $r$  מתגלגלת בתוך צינור מקובע לרצפה בעל רדיוס  $R$ . מותר להשתמש בקירוב זוויות קטנות ומותר להזניח את הרדיוס הקטן ביחד לגדול.
- מה תהיה תדירות התנודות הקטנות של הדיסקה, בהנחה שאין חיכוך?
  - מה תהיה התשובה לסעיף א' אם יוסיפו חיכוך עם הרצפה והגלגול יהיה ללא החלקה?
  - מה תהיה התדירות עם בנוסף לחיכוך עם הרצפה יתווסף כוח חיכוך:  $F = -bv$ ?

#### 2) קפיץ נמתח להתארכות מקסימלית



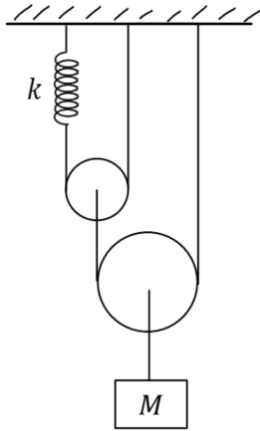
- קליע בעל מסה זניחה נע במהירות לא ידועה לעבר מסה  $m_2$  שמחוברת למסה  $m_1$  דרך קפיץ בעל מקדם אלסטי  $k$ .
- המסה  $m_1$  ניצבת בצמוד לקיר כמתואר בשרטוט.
- לאחר פגיעת הקליע הקפיץ מתכווץ במצב המקסימלי ומאבד  $d$  מאורכו.
  - מהי מהירות מרכז המסה מייד לאחר שהמערכת מתנתקת מהקיר?
  - על מערכת בעלת נתונים זהים ואורך קפיץ רפוי  $l$  מופעל כוח קבוע ואופקי  $F$  לכיוון המסומן בציור.
  - מה ההתארכות המקסימלית של הקפיץ?

#### 3) דיסקה כפולה מסה וקפיץ



- נתונה דיסקה ממוסמרת במרכז לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).
- הדיסקה בנויה משתי דיסקיות מודבקות בעלות רדיוס  $r$  לדיסקה הקטנה ו- $R$  לדיסקה הגדולה.
- סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט. עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.
- מצא את תדירות התנודות.
  - מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?

4) הרמונית עם גזירה של חוט (רק למי שמכיר את הנושא של תאוצות לא שוות) במערכת הבאה הגלגלות והקפיץ אידיאליים.



קבוע הקפיץ הוא:  $k = 50 \frac{N}{m}$  והמסה:  $M = 4kg$ .

- מצאו את התארכות הקפיץ במצב שיווי המשקל.
- מה ההעתק של המשקולת במצב שיווי המשקל (ביחס למצבה כשהקפיץ רפוי).
- מהי תדירות התנודות של המערכת?
- מותחים את המשקולת מטה 20cm מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. רשמו ביטוי למיקום של המשקולת כתלות בזמן.

**תשובות סופיות:**

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}} \quad \text{ב.} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{F}{2k + k \frac{m_2 - m_1}{m_1}} \quad \text{ב.} \quad v_{c.m.} = \sqrt{\frac{k}{m_2} d} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$E_{total} = \frac{1}{2} kx^2 - mgx + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mx^2 \quad \text{ב.} \quad \omega = \sqrt{\frac{kR}{\frac{1}{2}MR + \frac{r^2}{R}}} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$3.54 \frac{rad}{sec} \quad \text{ג.} \quad 0.05m \quad \text{ב.} \quad 0.2m \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$x(t) = 0.2 \cos(3.54t) \quad \text{ד.} \quad \text{משיווי משקל.}$$