

# פיסיקה 1 מס קורס 10124

פרק 11 - תנועה הרמונית -

תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה ..... 1
2. תרגילים מסכמים ..... 4
3. תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות) ..... 6

## תנועה הרמונית פשוטה:

רקע:

משוואת התנועה:

$$-k(x - x_0) = m\ddot{x}$$

$k$  ו- $m$  - קבועים חיוביים כלשהם.

$x_0$  - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

$x$  - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או כל משתנה אחר.

$\ddot{x}$  - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני  $k$ .

פתרון המשוואה:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$$

$x_0$  - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה:  $\Sigma \vec{F} = 0$ .

$A$  - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משווי המשקל.

$\omega$  - תדירות זוויתית:  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .

$\varphi$  - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

$x_0$  - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$

$\varphi, A$  מוצאים מתנאי התחלה  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ .

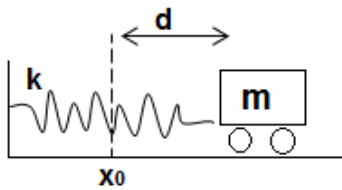
נוסחה למהירות המקסימאלית:

$$v_{\max} = \omega A$$

אנרגיה:

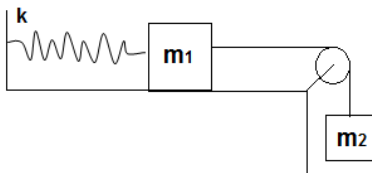
$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m A^2$$

שאלות:



(1) דוגמה - מסה מתנגשת במסה

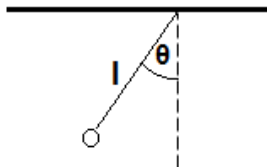
מסה  $m$  מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ  $k$ . מותחים את המסה מרחק  $d$  מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה. מצא את  $x(t)$  של המסה.



(2) דוגמה - מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה

מסה  $m_1$  מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע  $k$ . מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר  $M$ .

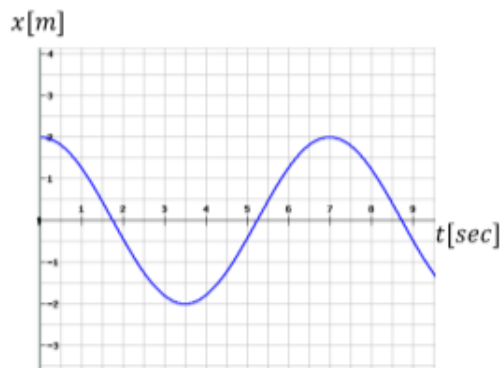
- מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).
- מצא את תדירות התנודה של המערכת.
- מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?



$$\theta \ll \pi$$

(3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)

נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה. אורך החוט של המטוטלת הוא  $l$ . מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן. הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה  $\theta$  (דרך אנרגיה).

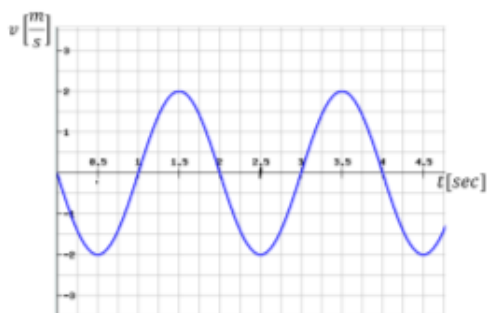
**(4) גרף מיקום זמן**

הגרף הבא מתאר את מיקומו כתלות בזמן של גוף הנע בתנועה הרמונית פשוטה.

- מהי אמפליטודת התנועה?
- מהו זמן המחזור?
- מהי התדירות הזוויתית?
- מהי הפאזה?
- רשום נוסחה למהירות כתלות בזמן.

**(5) גרף מהירות זמן**

מהירותו של גוף המתנדנד בתנועה הרמונית נתונה לפי הגרף הבא:



א. מתי מגיע הגוף לנקודת שיווי המשקל בפעם הראשונה?

ב. האם תאוצת הגוף ב-  $t = 1 \text{ sec}$  מקסימאלית?

ג. האם ב-  $t = 1.5 \text{ sec}$  האנרגיה קינטית מרבית?

ד. מהו הכוח ב-  $t = 2.5 \text{ sec}$ ?

ה. כמה מחזורי תנועה עשה הגוף ב-4 השניות הראשונות של התנועה?

**תשובות סופיות:**

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{ג.}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ב.} \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{ד.} \quad \omega \approx 0.898 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad T = 7 \text{ sec} \quad \text{ב.} \quad A = 2 \text{ m} \quad \text{א.} \quad (4)$$

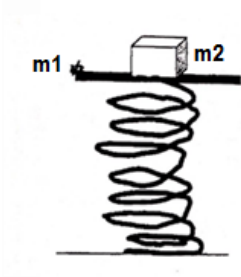
$$v(t) = -1.80 \cdot \sin(0.898 \cdot t + 0) \quad \text{ה.}$$

$$0 \quad \text{ד.} \quad \text{ב. כן.} \quad \text{א. } t = 0.5 \text{ sec} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{ה. } 2 \quad (5)$$

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

#### (1) מסה על משטח על קפיץ אנכי



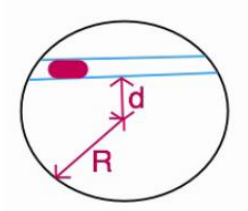
על קפיץ שקבועו  $k$  מונח משטח שמסתו  $m_1$ , המשטח צמוד לקצהו של הקפיץ. על המשטח מונח גוף שמסתו  $m_2$ . מכווצים את הקפיץ בשיעור  $\Delta y$  ומשחררים.

א. מה צריך להיות  $\Delta y_{\min}$  כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

ב. הניחו:  $\Delta y = 2\Delta y_{\min}$ ,  $k = 10 \frac{Nr}{m}$ ,  $m_1 = 0.04 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.06 \text{ kg}$  ומצאו את רגע הניתוק.

ג. באמצעות הנתונים המספריים מסעיף ב', מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?

#### (2) תנועה בתעלה בכדור"א



בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשרטוט. מסת כדור הארץ  $M$ .

מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשיה לנוע בתעלה?

#### (3) שתי מסות מחוברות בקפיץ\*\*

שתי מסות  $m_1$  ו- $m_2$  מחוברות בקפיץ בעל קבוע  $k$  ואורך רפוי  $l$ . המסות נמצאות במנוחה על מישור אופקי חלק.

נותנים דחיפה ימינה למסה  $m_1$  המקנה לה מהירות התחלתית  $v_0$ .  
א. מהי תדירות התנודות של התנועה (כתלות בנתוני הבעיה)?  
רמז: על מנת לפתור את המשוואות יש להחליף משתנים ל-

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad x_{rel} = x_1 - x_2$$

ב. מצאו את מיקום המסה  $m_2$  כתלות בזמן.

### תשובות סופיות:

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) \quad \text{ב.} \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{א. (1)}$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = -2\Delta y_{\min} \omega \sin(\omega t), \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{ג.}$$

$$\ddot{x} = -\left( \frac{M}{R^3} \right) (x - 0) \quad \text{(2)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{א. (3)}$$

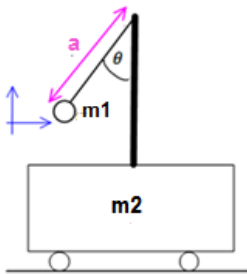
$$, A = \frac{\sqrt{v_0^2 + l^2 \omega^2}}{\omega}, \quad x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m} (l + v_0 t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{ב.}$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega l}$$

## תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות):

### שאלות:

#### (1) מטוטלת על עגלה נעה



עגלה בעלת מסה  $m_2$  חופשיה לנוע על משטח אופקי ללא חיכוך. אל העגלה מחובר מוט אנכי עליו תלויה מטוטלת מתמטית עם מסה  $m_1$  ואורך חוט  $a$ . משחררים את המסה (של המטוטלת) בזווית נתונה כאשר כל המערכת נמצאת במנוחה.

א. רשמו את מהירות המטוטלת במערכת העגלה כפונקציה של  $\theta$  ו- $\dot{\theta}$ .

ב. רשמו את מהירות העגלה והמטוטלת כפונקציה של  $\theta$  ו- $\dot{\theta}$ .

ג. רשמו את משוואת שימור האנרגיה המכאנית של המערכת.

ד. רשמו את משוואת שימור האנרגיה בתנודות קטנות.

ה. מצאו את תדירות התנודה של המסה  $M$ .

### תשובות סופיות:

$$v_x = \dot{\theta} a \cos \theta, v_y = \dot{\theta} a \sin \theta \quad \text{א. (2)}$$

$$v_{1x} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a \dot{\theta} \cos \theta, v_{1y} = \dot{\theta} a \sin \theta \quad \text{ב.}$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 \left( \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \right)^{-2} a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 a^2 \sin^2 \theta - m_1 g a \cos \theta \quad \text{ג.}$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 \left( \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{g a}{2} \theta^2 \right) - m_1 g a \frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{g a^2}{2}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2}} \quad \text{ה.}$$