# פיזיקה מכניקה מספר קורס 4115010

## פרק 19 - תנועה הרמונית -

### תוכן העניינים


1. תנועה הרמונית פשוטה ..... 1
2. בור פוטנציאל ..... 6
3. תנועה הרמונית מרוסנת ..... 8
4. תנועה הרמונית מאולצת ..... 12
5. תרגילים מסכמים ..... 15
6. תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות) ..... 18
7. תרגילים למתקדמים ..... 21
8. תרגילים לבקשת סטודנטים ..... 24

# תנועה הרמונית פשוטה:

## רקע:

**משוואת התנועה:**

$$-k(x-x_0)=m\ddot{x}$$

$k$ ו- $m$ קבועים חיוביים כלשהם.

$x_0$ - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

$x$ - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או כל משתנה אחר.

$\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני $k$.

**פתרון המשוואה:**

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+x_0$$

$x_0$ - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה: $\Sigma\vec{F}=0$.

$A$ - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משוויי המשקל.

$\omega$ - תדירות זוויתית: $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$.

$\varphi$ - פאזה.

**מציאת הקבועים בפתרון:**

$x_0$ - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

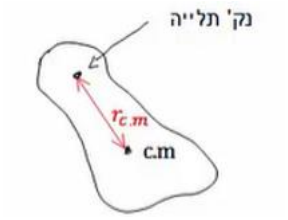
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$

$A, \varphi$ מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$ , $\dot{x}(0)$.

**נוסחה למהירות המקסימאלית:**

$$v_{max} = \omega A$$

**מטוטלת פיזיקאלית:**



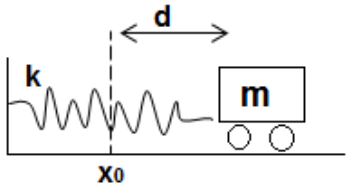

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$$

**אנרגיה:**

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}mA^2$$

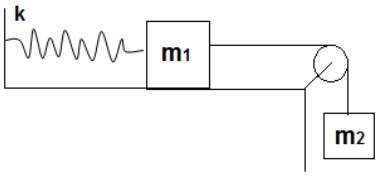
## שאלות:

**1) מסה מתנגשת במסה**




מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k.
מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה.
מצאו את $x(t)$ של המסה.

**2) מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה**



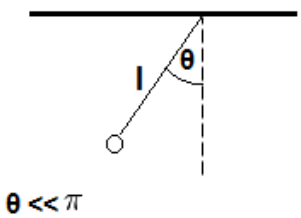

מסה $m_1$ מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k. מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M.

א. מצאו את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבעו את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).

ב. מצאו את תדירות התנודה של המערכת.

ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

**3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם מומנטים)**

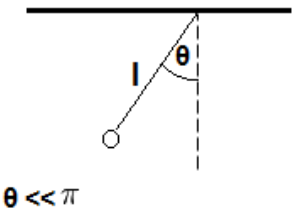



נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.
אורך החוט של המטוטלת הוא l.
מצאו את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.
הניחו כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה $\theta$ (דרך מומנטים).

**4) דיסקה עם חור**

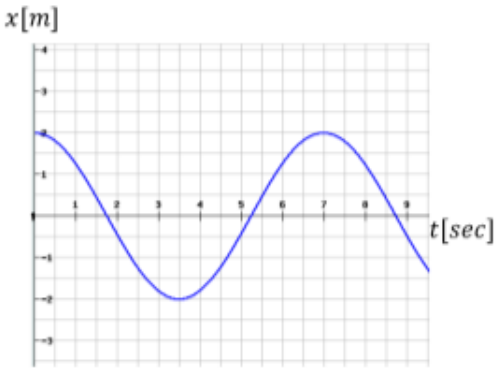
נתונה דיסקה בעלת מסה $M$ ורדיוס $R$. קודחים בדיסקה חור עגול ברדיוס $\frac{R}{4}$ שמרכזו $\frac{R}{2}$ ממרכז הדיסקה. מחברים את הדיסקה במרכזה אל קיר כך שהיא יכולה להתנדד סביב מרכזה. מצאו את תדירות התנודות הקטנות .

**5) מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)**




נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה
אורך החוט של המטוטלת הוא l.
מצאו את תדירות התנודות הקטנו
כפונקציה של הזמן.
הניחו כי המטוטלת מתחילה את תנ
בזווית ידועה $\theta$ (דרך אנרגיה).

**6) גרף מיקום זמן**




הגרף הבא מתאר את מיקומו כתלות בזמן של גוף הנע בתנועה הרמונית פשוטה.

א. מהי אמפליטודת התנועה?

ב. מהו זמן המחזור?

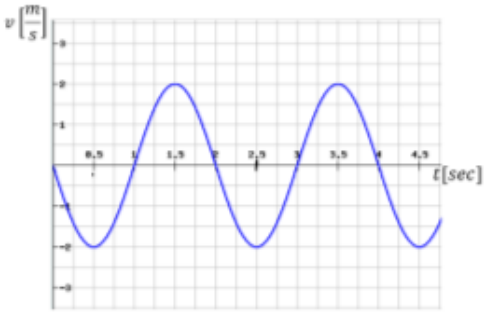
ג. מהי התדירות הזוויתית?

ד. מהי הפאזה?

ה. רשום נוסחה למהירות כתלות בזמן.

**7) גרף מהירות זמן**

מהירותו של גוף המתנדנד בתנועה הרמונית נתונה לפי הגרף הבא:




א. מתי מגיע הגוף לנקודת שיווי המשקל בפעם הראשונה?

ב. האם תאוצת הגוף ב- $t=1\text{sec}$ מקסימאלית?

ג. האם ב- $t=1.5\text{sec}$ האנרגיה קינטית מרבית?

ד. מהו הכוח ב- $t=2.5\text{sec}$?

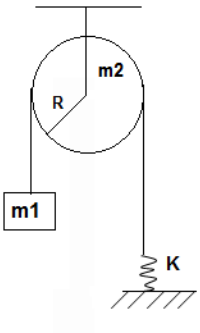
ה. כמה מחזורי תנועה עשה הגוף ב-4 השניות הראשונות של התנועה?

**8) גליל מחובר לקפיץ מתגלגל ללא החלקה**




גליל בעל מסה $m$ ורדיוס $R$ נמצא על משטח אופקי לא חלק ומחובר באמצעות קפיץ אל הקיר.
קבוע הקפיץ הוא $k$ והוא מחובר למרכז הגליל.
הנח שתנועת הגליל אופקית בלבד ושהוא מתגלגל ללא החלקה על המשטח.
מצאו את תדירות התנודות הקטנות.
פתרו פעם אחת באמצעות אנרגיה ופעם נוספת באמצעות כוחות ומומנטים.

**9) גלגלת מסה וקפיץ**



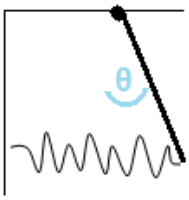

במערכת הבאה, המסה $m_1$ קשורה בחוט דרך גלגלת אל קפיץ המחובר לקרקע. הגלגלת אינה אידאלית.
נתון: $R$ רדיוס הגלגלת, $m_2$ מסת הגלגלת, $k$ קבוע הקפיץ.
הניחו כי החוט לא מחליק על הגלגלת.

א. מצאו את נקודת שיווי המשקל.

ב. מצאו את תדירות התנודה.

ג. מושכים את המסה אורך $d$ מנקודת שיווי המשקל.
מהו $d_{max}$ המרחק המקסימלי שניתן למשוך את המסה מבלי שהמתיחות בחוט תתאפס במהלך התנועה?

**10) מוט תלוי מחובר עם קפיץ לקיר**




מוט בעל אורך L ומסה M (התפלגות אחידה)
תלוי מהתקרה וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה.
קצהו השני של המוט מחובר בקפיץ, בעל קבוע k לקיר.
הקפיץ רפוי כאשר המוט נמצא מאונך לתקרה.

א. הראו כי תנועת המוט בזוויות קטנות היא תנועה הרמונית ומצאו את תדירות התנועה.

ב. מצאו את הזווית של המוט כפונקציה של הזמן אם המוט משוחרר ממנוחה בזווית נתונה $\theta_0$.

## תשובות סופיות:

**1)** $x(t)=-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t+\frac{\pi}{2}\right)+x_0$

**2)** א. $x=\frac{m_2 g}{k}$ ב. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ ג. $A_{max}=\frac{g}{\omega^2}$

**3)** $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}\ ,\ \theta(t)=\theta_0\cos(\omega t)$

**4)** $\sqrt{\frac{16g}{247R}}$

**5)** $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}\ ,\ \theta(t)=\theta_0\cos(\omega t)$

**6)** א. $A=2m$ ב. $T=7sec$ ג. $\omega\approx 0.898\frac{rad}{sec}$ ד. $\varphi=0$

ה. $v(t)=-1.80\cdot\sin(0.898\cdot t+0)$

**7)** א. $t=0.5sec$ ב. כן. ג. כן. ד. 0

ה. 2

**8)** $\omega_0=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$

**9)** א. $x_0=\frac{m_1 g}{k}$ ב. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+\frac{1}{2}m_2}}$ ג. $d_{max}=\frac{m_1 g}{k}$

**10)** א. $\omega=\sqrt{\frac{3(mg+2kL)}{2mL}}$ ב. $\theta(t)=\theta_0\cos(\omega t)$

# בור פוטנציאל:

## רקע:

כאשר גוף נמצא בנקודת מינימום של הפוטנציאל והאנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

כאשר $x_0$ היא נקודת המינימום ו- $U''$ נגזרת שניה בנקודה

## שאלות:

**1) פוטנציאל לנארד-ג'ונס**

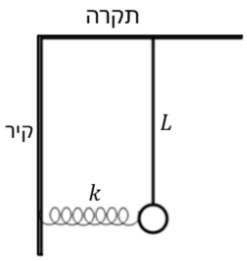
פונקציית הפוטנציאל של לנארד ג'ונס מתארת את האינטראקציה בין אטומים או מולקולות בתוך סריג והיא נתונה לפי הנוסחה: $U(r)=\varepsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$

כאשר $\varepsilon$ ו- $r_0$ קבועים ו- $r$ הוא המרחק בין המולקולות.

מצא את התדירות של תנודות קטנות סביב שיווי משקל של המערכת.

ניתן להניח שמדובר בחלקיק אחד במסה $m$ המרגיש את הפוטנציאל מחלקיק שני במסה $M$ הנשאר נייח $(m << M)$.

**2) מטוטלת מתמטית וקפיץ עם אנרגיות**




מטוטלת עם מסה $m$ תלויה מהתקרה באמצעות חוט באורך $L$.

קושרים למסה קפיץ בעל קבוע $k$ המחובר אופקית לקיר.

הקפיץ במצב רפוי כאשר החוט מאונך לתקרה.

מזיזים את המסה זווית קטנה $\theta_0$ ימינה ומשחררים ממנוחה.

א. מצאו את הזווית של המסה כתלות בזמן.

ב. מהי המתיחות בחוט כאשר המוט נמצא במצב אנכי תוך כדי תנועה.

**3) עיפרון עם מוטות בשיווי משקל**

הגוף שבאיור מורכב מעיפרון בעל מסה זניחה ואורך $L$.

לקצה של העיפרון מחוברים שני כדורים בעלי מסה $m$

באמצעות מקלות דקים חסרי מסה באורך $l$ ובזווית $\alpha$.

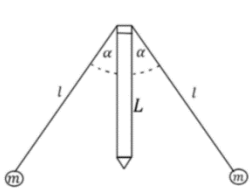
מניחים את הגוף על מעמד ומטים אותו בזווית $\theta$ במישור הדף.

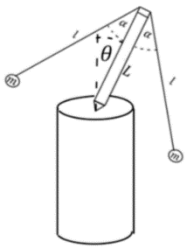
א. רשמו את האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף כתלות בזווית $\theta$.

ב. באיזו זווית $\theta$ יהיה הגוף בשיווי משקל?

ג. מה התנאי לכך ששיווי המשקל יהיה יציב?

ד. מהו זמן המחזור של התנודות סביב נקודת שיווי המשקל?




## תשובות סופיות:

**1)** $\omega_0=\sqrt{\frac{72\varepsilon}{mv_0}}$

**2)** א. $\theta(t)=\theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{mg+kL}{mL}}\cdot t\right)$ ב. $T=mg+(mg+kL)\theta_0^2$

**3)** א. $U=2mg(L-l\cos\alpha)\cos\theta$ ב. $\theta=0$ ג. $L<l\cos\alpha$

ד. $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{l\cos\alpha-L}{L^2+l^2-2Ll\cos\alpha}}}$

# תנועה הרמונית מרוסנת:

## רקע:

### משוואת התנועה:

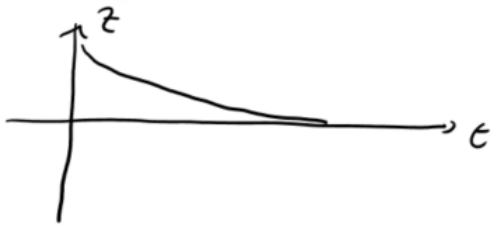
$$\ddot{z}+\Gamma\dot{z}+\omega_0^2 z=0$$

$$\Gamma=\frac{\lambda}{m}\ ,\ \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

### פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

(I). ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2}>\omega_0$

$$z(t)=e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}+Be^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}\right)$$




אין תנודות.

(II). ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2}=\omega_0$

$$z(t)=(A+B\cdot t)\cdot e^{-\omega_0\cdot t}$$

דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

III). ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

$$z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

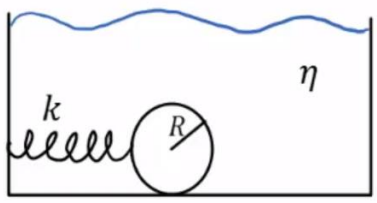
$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$




יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

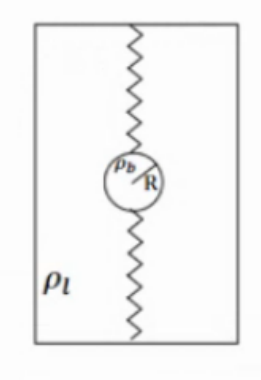
## שאלות:

**1) כדור במיכל מים**




כדור בעל מסה $m$ ורדיוס $R$ נמצא בתוך מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל.
קבוע הקפיץ הוא $k$. בתנועת הגוף במים, מפעילים המים על הכדור כוח התנגדות המתכונתי והפוך למהירותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו הוא: $\vec{F}=-6\pi R\eta\vec{v}$. כאשר $\eta$ היא צמיגות המים ו- $R$ הוא רדיוס הכדור.
התייחס ל- $m$, $k$, $\eta$, $R$ כנתונים ומצא את תדירות התנודות של הכדור בהנחה ש- $R<\frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$. הזנח את החיכוך בין הכדור לתחתית המיכל.

**2) שני קפיצים בנוזל**




כדור נמצא בתוך תיבה מלאה במים ומחובר עם קפיץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפיץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התחתון של התיבה.
נתון: $R$ - רדיוס הכדור, $\rho_b$ - צפיפות המסה של הכדור,
$\rho_l$ - צפיפות המסה של המים, $K$ - קבוע שני הקפיצים ו- $\eta$ - צמיגות המים.
(תזכורת: כאשר כדור נמצא בתוך נוזל פועלים עליו כוח ציפה: $F=\rho_l Vg$ וכוח סטוקס: $F=-6\pi\eta Rv$).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.
ב. מה התנאי שיהיו תנודות הרמוניות?
מצא את התדירות בהנחה שתנודות אלו מתקיימות.
ג. מצא את התנאי בו יחזור הכדור הכי מהר לנקודת שיווי המשקל.

**3) איבוד אנרגיה במחזור**

בתנועה הרמונית מרוסנת קיים ריסון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור.
בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

**4) משקולת במיכל מים תלויה מהתקרה**

משקולת שמסתה: $M = 1\text{kg}$ נמצאת במיכל מים ומחוברת לתקרה באמצעות קפיץ בעל קבוע: $k = 20\frac{\text{N}}{\text{m}}$. כוח ההתנגדות שמפעילים המים הוא מהצורה של: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 4\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$ ו- $\vec{v}$ היא מהירות המסה.
הניחו שהמשקולת אינה יוצאת מהמים ואינה פוגעת ברצפה.

א. תוך כמה זמן תרד האמפליטודה לחמישית מגודלה ההתחלתי?
(הניחו שהפאזה היא אפס)

ב. לאחר כמה מחזורים זה יקרה?

**5) מסה באמבט מים ודבש**

מסה: $m = 1\text{kg}$ נמצאת באמבט מלא מים, המסה מחוברת באמצעות שני קפיצים זהים בעלי קבוע: $k = 25\frac{\text{N}}{\text{m}}$ לשתי דפנות האמבט ונעה ללא חיכוך עם ריצפת האמבט. מזיזים את המסה 0.5m מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. התנגדות המים מפעילה כוח גרר: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 10\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$.

א. מהו העתק המסה כתלות בזמן?

ב. מחליפים את המים בדבש מה שמגדיל את $\lambda$ פי $\sqrt{2}$. מזיזים שוב את המסה 0.5m ומשחררים, מהו העתק המסה כתלות בזמן?

## תשובות סופיות:

**1)** $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\text{k}}{\text{m}} - \left(\frac{3\pi\text{R}\eta}{\text{m}}\right)^2}$

**2)** א. $y_{eq} = \frac{\text{F}_b}{2\text{K}}$ ב. $\omega^* = \sqrt{\frac{2\text{K}}{\text{m}} - \left(\frac{6\pi\eta\text{R}}{2\text{m}}\right)^2}$ ג. $\frac{2\text{K}}{\text{m}} = \frac{6\pi\eta\text{R}^2}{2\text{m}}$

**3)** 5%

**4)** א. 1.6sec ב. בערך מחזור אחד.

**5)** א. $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-5t}\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$ ב. $x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}t\right)e^{-5\cdot\sqrt{2}t}$

# תנועה הרמונית מאולצת:

## רקע:

**כוח מאלץ:**

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

**משוואת התנועה:**

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

**פתרון משוואת התנועה:**

$$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים במצב עמיד נזניח את הפתרון ההומוגני.

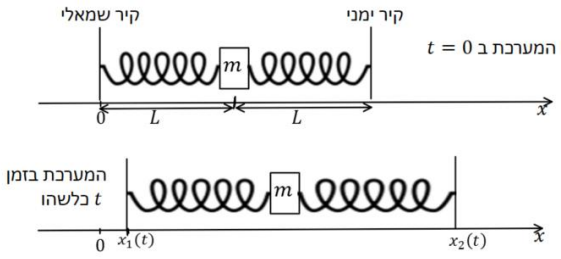
$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma\, \Omega}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

**תדירות תהודה -** התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי.

## שאלות:

**1) מסה בין קירות זזים**




מסה m מחוברת לשני קפיצים זהים בעלי קבוע k ואורך רפוי L משני צידיה. הקפיצים מחוברים לקירות הנמצאים במרחק L מהמסה משמאלה ומימינה והמערכת כולה מונחת על שולחן חלק (כוח הכובד לתוך הדף).

על המסה פועל כוח גרר: $F=-bv$. ב-$t=0$ הקירות מתחילים לזוז.

ראשית הצירים ממוקמת במרכז התנועה של הקיר השמאלי והכיוון החיובי ימינה.

מיקום הקירות כתלות בזמן הוא: $x_2(t)=2L+2d\sin(\omega t)$ , $x_1(t)=d\sin(\omega t)$.

נתונים: $m$ , $b$ , $k$ , $L$ , $d$ ו- $d<<L$.

א. מהי תדירות התנועה ומהי האמפליטודה?

ב. מה התנאי לתהודה בהנחה כי הריסון חלש מאוד?

**2) מציאת תדירות ברבע אמפליטודה**

מסה m מחוברת לקפיץ אופקי בעל קבוע k , המסה נעה על מישור חלק ללא חיכוך.

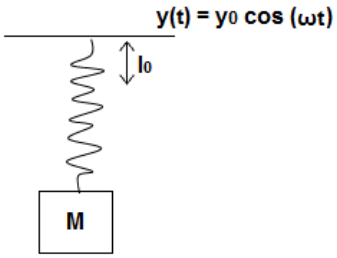
על המסה פועל כוח גרר: $f=-bv$ וכוח מאלץ: $F(t)=d\cdot\cos(\omega t)$.

מצא את תדירות הכוח בה אמפליטודת התנועה במצב העמיד תהיה רבע מהאמפליטודה המקסימלית.

הנח כי: $m$ , $k$ , $b$ , $d$ נתונים וכי: $b<<\sqrt{mk}$.

**3) מסה תלויה על קרש נע**

מסה M מחוברת באמצעות קפיץ אנכי לקרש אופקי הנע בציר ה- $y$ לפי: $y(t)=y_0\cos(\omega t)$.




קבוע הקפיץ k ואורכו הרפוי $l_0$ נתונים.

מצא את מיקום המסה כפונקציה של הזמן.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $A(\omega)=\dfrac{\frac{3kd}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b}{m}\right)^2\omega^2}}$ ב. $\omega\sim\sqrt{\frac{2k}{m}}$

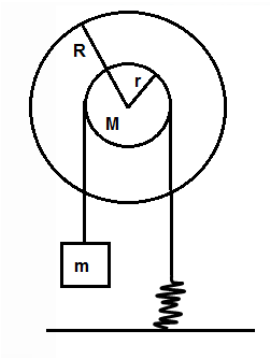
**2)** $\omega_{1,2}=\sqrt{\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2}}$

**3)** $y(t)=\dfrac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m}-\omega^2}\cos\omega t+y'_0$

# תרגילים מסכמים:

## שאלות:

**1) דיסקה כפולה מסה וקפיץ**

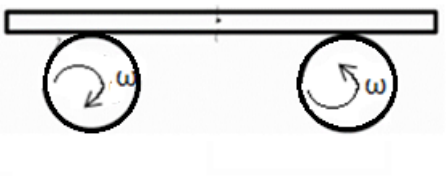



נתונה דיסקה ממוסמרת במרכזה לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).
הדיסקה בנויה משתי דיסקות מודבקות בעלות רדיוס r לדיסקה הקטנה ו- R לדיסקה הגדולה.
סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט.
עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.

א. מצאו את תדירות התנודות.

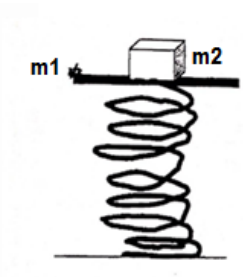
ב. מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?

**2) מוט על שני גלגלים**




מוט בעל מסה M מונח על שני גלגלים המקובעים במרכזם.
הגלגלים מסתובבים במהירות זוויתית $\omega$ כך שהגלגל הימני מסתובב נגד כיוון השעון והשמאלי עם כיוון השעון.
בין המוט והגלגלים קיים חיכוך ומקדם החיכוך הקינטי נתון.
מניחים את המוט כך שמרכזו נמצא במרחק A מהמרכז בין הגלגלים.
מצא את תדירות התנודה של המוט.

**3) מסה על משטח על קפיץ אנכי**



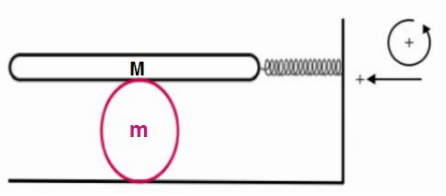

על קפיץ שקבועו k מונח משטח שמסתו $m_1$,
המשטח צמוד לקצהו של הקפיץ.
על המשטח מונח גוף שמסתו $m_2$.
מכווצים את הקפיץ בשיעור $\Delta y$ ומשחררים.

א. מה צריך להיות $\Delta y_{min}$ כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

ב. הניחו: $m_2 = 0.06kg$ , $m_1 = 0.04kg$ , $k = 10\frac{Nr}{m}$ , $\Delta y = 2\Delta y_{min}$
ומצאו את רגע הניתוק.

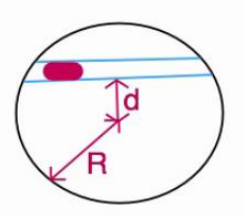
ג. באמצעות הנתונים המספריים מסעיף ב', מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?

**4) משטח על דיסקה מחובר לקפיץ**




נתונה מערכת כבשרטוט (אין החלקה במערכת).
מהי התדירות?

**5) תנודה בתעלה בכדו"א**




בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשרטוט.
מסת כדור הארץ $M$.
מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשיה לנוע בתעלה?

**6) שתי מסות מחוברות בקפיץ****

שתי מסות $m_1$ ו- $m_2$ מחוברות בקפיץ בעל קבוע $k$ ואורך רפוי $l$.
המסות נמצאות במנוחה על מישור אופקי חלק.
נותנים דחיפה ימינה למסה $m_1$ המקנה לה מהירות התחלתית $v_0$.

א. מהי תדירות התנודות של התנועה (כתלות בנתוני הבעיה)?
רמז: על מנת לפתור את המשוואות יש להחליף משתנים ל-

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2};\ x_{rel} = x_1 - x_2$$

ב. מצאו את מיקום המסה $m_2$ כתלות בזמן.

## תשובות סופיות:

1) א. $\sqrt{\frac{2kR}{\frac{1}{2}MR+\frac{r^2}{R}}}$ ב. $E_{total}=\frac{1}{2}Kx^2-mgx+\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

2) $\omega=\sqrt{\frac{\mu_k g}{d}}$

3) א. $\Delta y_{min}=\frac{(m_1+m_2)}{k}$ ב. $t_1=\frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

ג. $v(t)=\dot{\tilde{y}}(t)=-2\Delta y_{min}\omega\sin(\omega t)$ , $\Delta y_{min}=\frac{(m_1+m_2)}{k}$

4) $\ddot{x}=-\left(\frac{K}{m+2M}\right)x$

5) $\ddot{x}=-\left(\frac{M}{R^3}\right)(x-0)$

6) א. $\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$, $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

ב. $x_2(t)=\frac{m_1}{m_1+m}(l+v_0t)-\frac{m_1}{m_1+m_2}A\cos(\omega t+\varphi)$ , $A=\frac{\sqrt{v_0^2+l^2\omega^2}}{\omega}$ ,

$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega l}$

# תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות):

## שאלות:

**1) שני חצאי דיסקה**



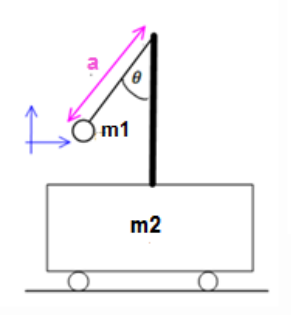
נתונים שני חצאי דיסקה התלויים על מסמר כמתואר בשרטוט.
מסת הדיסקה ורדיוסה נתונים.
מצא את התדירות של כל אחד מחצאי הדיסקה.

**2) חצי חישוק ושתי מסות**



מצא את תדירות חצי החישוק שבתמונה.
רדיוס R ומסתו M, בקצוותיו חוברו שתי מסות $m$.
החישוק תלוי ממסמר בקודקודו.

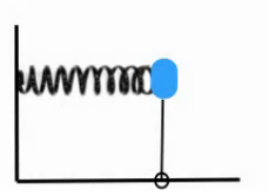
**3) מטוטלת על עגלה נעה**




עגלה בעלת מסה $m_2$ חופשיה לנוע על משטח אופקי ללא חיכוך.
אל העגלה מחובר מוט אנכי עליו תלויה מטוטלת מתמטית עם מסה $m_1$ ואורך חוט $a$.
משחררים את המסה (של המטוטלת) בזווית נתונה כאשר כל המערכת נמצאת במנוחה.

א. רשמו את מהירות המטוטלת במערכת העגלה כפונקציה של $\theta$ ו-$\dot{\theta}$.
ב. רשמו את מהירות העגלה והמטוטלת כפונקציה של $\theta$ ו-$\dot{\theta}$.
ג. רשמו את משוואת שימור האנרגיה המכאנית של המערכת.
ד. רשמו את משוואת שימור האנרגיה בתנודות קטנות.
ה. מצאו את תדירות התנודה של המסה M.

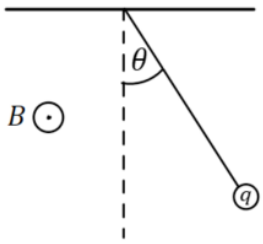
**4) קפיץ מוט ומסה**



נתונה מסה $m$ המחוברת לקפיץ בעל קבוע $k$.
המסה גם מחוברת למוט חסר מסה בעל אורך $l$.
המוט מחובר לרצפה בציר המאפשר לו להסתובב.
המערכת בשרטוט נמצאת במצב שיווי משקל.

א. מהי תדירות התנודות הקטנות של המערכת?
ב. מהי המסה המקסימלית שתאפשר תדירות זו?

**5) מטוטלת בשדה מגנטי**




מטוטלת מתמטית שאורכה $L$, מסתה $m$ ומטענה $q$
נתונה בשדה מגנטי אופקי $B$ היוצא מהדף.
השדה המגנטי יוצר כוח מגנטי על המטוטלת כאשר
היא בתנועה לפי הנוסחה: $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$.

א. מצא את הכוחות הפועלים על המטוטלת במהלך התנועה כתלות בזווית $\theta$ ובמהירות $v$.

ב. מסיטים את המטוטלת זווית קטנה $\theta_0$ ומשחררים במנוחה.
מצא את משוואת התנועה של המטוטלת ומשם את מיקום המטוטלת כתלות בזמן עבור זוויות קטנות.

ג. מהי המתיחות בחוט כתלות בזמן.

ד. מהי המתיחות המקסימאלית בחוט ובאיזו זווית ומהירות מצב זה מתרחש?

## תשובות סופיות:

**1)** דיסקה 1 : $-\left(\frac{A}{B}\right)\cdot\left(\theta-(0)\right)=\ddot{\theta}$ , דיסקה 2 : ראה סרטון.

**2)** $-\frac{(2m+M)\cdot gb}{I}\theta=\ddot{\theta}$

**3)** א. $v_x=\dot{\theta}a\cos\theta$ , $v_y=\dot{\theta}a\sin\theta$

ב. $v_{1_x}=\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1}a\dot{\theta}\cos\theta$ , $v_{1_y}=\dot{\theta}a\sin\theta$

ג. $E=\frac{1}{2}m_1\left(\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\right)^{-2}a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+\dot{\theta}^2a^2\sin^2\theta-m_1ga\cos\theta$

ד. $E=\frac{1}{2}m_1\left(\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1}a^2\dot{\theta}^2+\frac{ga}{2}\theta^2\right)-m_1ga\frac{1}{2}$

ה. $\omega=\sqrt{\frac{\frac{ga^2}{2}}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1}a^2}}$

**4)** א. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{g}{l}}>0$

ב. $m<\frac{lk}{gv}$

**5)** א. $\left|\vec{F}\right|=qvB$ , כיוון החוצה מהמעגל.

ב. $\theta(t)=\theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$

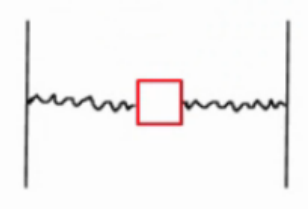
ג. $T(t)=-qB\sqrt{gL}\theta_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)+mg$ עבור $\theta_0<<\frac{2qB}{m}\sqrt{\frac{L}{g}}$

ד. $T_{max}=mg+qB\sqrt{gL}\theta_0$

# תרגילים למתקדמים:

## שאלות:

**1) מסה בין שני קפיצים עם אורך זניח**

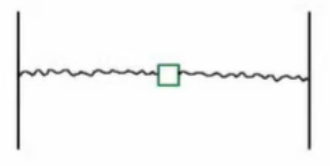


בין שני קירות במרחק $2L$ נמצאת מסה $m$ המחוברת לקירות בקפיצים בעלי מקדם $k$ ואורך רפוי זניח.

א. מצא את תדירויות התנודות הקטנות בציר ה-$x$.

ב. מצא את תדירויות התנודות הקטנות בציר ה-$y$.

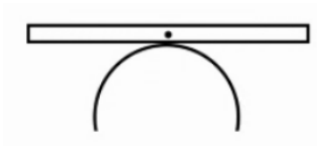
**2) מסה בין שני קפיצים** (אורך רפוי לא זניח)**



בין שני קירות במרחק $2L$ נמצאת מסה $m$ המחוברת לקירות בקפיצים בעלי מקדם $k$ ואורך רפוי $l_0$.

מצא את תדירות התנודות הקטנות בציר ה-$y$.

**3) מוט על חצי כדור****



מוט בעל אורך $l$ ומסה $m$ מונח על כדור בעל רדיוס $R$.

א. מצא את תדירות התנודות הקטנות של המוט.

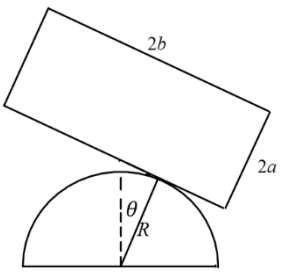
ב. מצא את גובה מרכז המסה של המוט כפונקציה של זווית ההטיה.

**4) עכביש בשיווי משקל יציב***



מוט בעל מסה $M$ ואורך $l$ מחובר ברבע מגובהו לציר. מתחתית המוט עכביש בעל מסה $m$ מטפס כלפי מעלה. מצא את תדירות המערכת כפונקציה של מיקום העכביש ומצא את משקל העכביש המקסימלי שישאיר את המערכת בשיווי משקל יציב.

**5) תיבה על כיפה חצי כדורית****




תיבה שמסתה $M$ מונחת על כיפה גלילית חצי עגולה ברדיוס $R$. גודל התיבה הוא $2a\times 2b$.

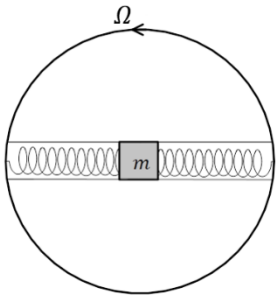
מניחים את התיבה על ראש הכיפה כך שמרכזה בדיוק מעל מרכז הכיפה. לאחר מכן מטים את התיבה מעט הצידה כך שהיא מתגלגלת ללא החלקה על הכיפה.

מצא את תדירות התנודות הקטנות של התיבה על ראש הכיפה.

מה התנאי שיהיו תנודות?

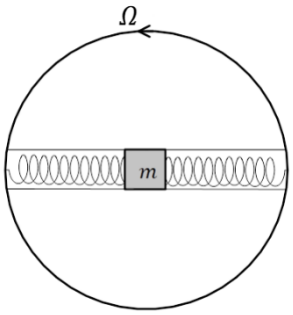
**6) מסה בתוך חישוק מסתובב**
**(כולל קוריאוליס וקורדינטות פולריות)**

גוף שמסתו m נמצא במרכז תעלה הנמצאת לאורך קוטרו של חישוק.
המערכת מונחת על השולחן כך שכוח הכובד לתוך הגוף.
הגוף מחובר לשני קפיצים זהים אחד מכל צד המצויים במצב הרפוי כאשר הגוף במרכז החישוק. קבוע הקפיצים הוא k.
מסובבים את החישוק במהירות זוויתית $\Omega$ ומרחיקים את המסה מעט מהמרכז.
רשום משוואת כוחות במערכת החישוק, מה התנאי לתנועה הרמונית ומהי תדירות התנועה אם התנאי מתקיים?
(מומלץ לפתור גם באמצעות ק. פולריות).




**7) מסה בתוך חישוק מסתובב עם חיכוך**
**(כולל קואורדינטות פולריות, קוריאוליס, ותנועה מרוסנת)**

גוף שמסתו m נמצא במרכז תעלה הנמצאת לאורך קוטרו של חישוק.
המערכת מונחת על השולחן כך שכוח הכובד לתוך הגוף.
הגוף מחובר לשני קפיצים זהים אחד מכל צד המצויים במצב הרפוי כאשר הגוף במרכז החישוק. קבוע הקפיצים הוא k.
מסובבים את החישוק במהירות זוויתית $\Omega$ ומשחררים את המסה ממנוחה במרחק d מהמרכז.
בין המסה והדופן של התעלה קיים חיכוך (אין חיכוך עם הבסיס).
מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי הם: $\mu_s$ , $\mu_k$ .




א. רשום משוואת כוחות במערכת החישוק, מהם התנאים לתנועה הרמונית?
האם צריך את מקדם החיכוך הסטטי?

ב. מצא את המיקום כתלות בזמן בהנחת התנאים של סעיף א',
מהו מקדם האיכות של המערכת?
(מומלץ לפתור גם באמצעות ק. פולריות).

## תשובות סופיות:

1) א. $\omega_x=\sqrt{\frac{2k}{m}}$ ב. $\omega_y=\sqrt{\frac{2k}{m}}$

2) $-\left(2k\frac{L\cdot l_0}{L}\right)y=\ddot{y}$

3) א. $\omega=\sqrt{\frac{12gR}{l^2}}$ ב. $y_{c.m}=R\left(1+\frac{\theta^2}{2}\right)$

4) $-\left(m'g\frac{C}{I}\right)\theta=\ddot{\theta}$

5) $\omega_0=\sqrt{\frac{g(R-a)}{\frac{1}{3}(a^2+b^2)+a^2}}$

6) $\left(-2k-\Omega^2 m\right)x=m\ddot{x}$ , $2k-\Omega^2 m>0$ , $\omega=\sqrt{\frac{2k-m\Omega^2}{m}}$

7) א. $-2kx+m\Omega^2 x-2\mu_k m\Omega\dot{x}=m\ddot{x}$ , $\Omega^2\left(1+\mu_k{}^2\right)<\frac{2k}{m}$ לא כי $N=0$ כשהגוף נעצר.

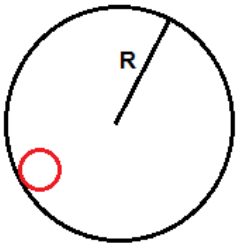
ב. $x(t)=e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(d\cos(\tilde{\omega}t)-\frac{d\sqrt{1-\omega_0{}^2}}{\tilde{\omega}}\sin(\tilde{\omega}t)\right)$ , $Q=\frac{\omega_0}{\Gamma}=\frac{\sqrt{\frac{2k}{m}}}{2\mu_k\Omega}$.

# תרגילים לבקשת סטודנטים:

## שאלות:

**1) כדור מתגלגל בצינור**

דיסקה בעלת רדיוס r מתגלגלת בתוך צינור מקובע לרצפה בעל רדיוס R.
מותר להשתמש בקירוב זוויות קטנות ומותר להזניח את הרדיוס הקטן ביחד לגדול.

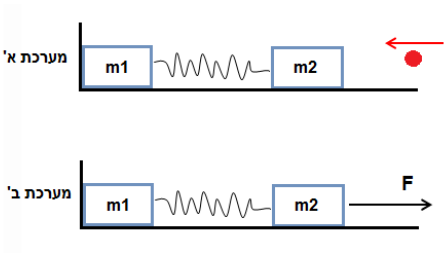



א. מה תהיה תדירות התנודות הקטנות של הדיסקה, בהנחה שאין חיכוך?

ב. מה תהיה התשובה לסעיף א' אם יוסיפו חיכוך עם הרצפה והגלגול יהיה ללא החלקה?

ג. מה תהיה התדירות עם בנוסף לחיכוך עם הרצפה יתווסף כוח חיכוך: $F=-bv$ ?

**2) קפיץ נמתח להתארכות מקסימלית**

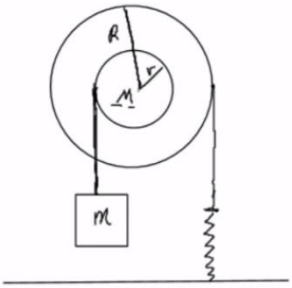



קליע בעל מסה זניחה נע במהירות לא ידועה לעבר מסה $m_2$ שמחוברת למסה $m_1$ דרך קפיץ בעל מקדם אלסטי k.
המסה $m_1$ ניצבת בצמוד לקיר כמתואר בשרטוט.

א. לאחר פגיעת הקליע הקפיץ מתכווץ במצב המקסימלי ומאבד d מאורכו.
מהי מהירות מרכז המסה מייד לאחר שהמערכת מתנתקת מהקיר?

ב. על מערכת בעלת נתונים זהים ואורך קפיץ רפוי l מופעל כוח קבוע ואופקי F לכיוון המסומן בציור.
מה ההתארכות המקסימלית של הקפיץ?

**3) דיסקה כפולה מסה וקפיץ**

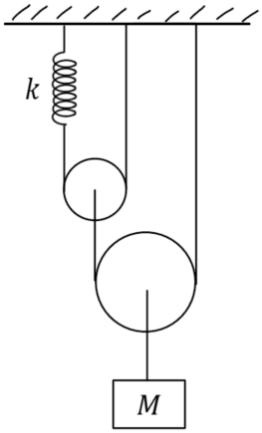



נתונה דיסקה ממוסמרת במרכזה לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).
הדיסקה בנויה משתי דיסקיות מודבקות בעלות רדיוס r לדיסקה הקטנה ו- R לדיסקה הגדולה.
סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט.
עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.

א. מצא את תדירות התנודות.

ב. מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?

**4) הרמונית עם גזירה של חוט** *(רק למי שמכיר את הנושא של תאוצות לא שוות)*
במערכת הבאה הגלגלות והקפיץ אידיאלים.




קבוע הקפיץ הוא: $k = 50\frac{\text{N}}{\text{m}}$ והמסה: $M = 4\text{kg}$.

א. מצאו את התארכות הקפיץ במצב שיווי המשקל.

ב. מה ההעתק של המשקולת במצב שיווי המשקל (ביחס למצבה כשהקפיץ רפוי).

ג. מהי תדירות התנודות של המערכת?

ד. מותחים את המשקולת מטה 20cm מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה.
רשמו ביטוי למיקום של המשקולת כתלות בזמן.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ ב. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$ ג. $\omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

**2)** א. $v_{c.m.} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_2}}d}{m_1 + m_2}$ ב. $\Delta = \frac{F}{2k + k\frac{m_2 - m_1}{m_1}}$

**3)** א. $\omega = \sqrt{\frac{kR}{\frac{1}{2}MR + \frac{r^2}{R}}}$ ב. $E_{total} = \frac{1}{2}kx^2 - mgx + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

**4)** א. $0.2\text{m}$ ב. $0.05\text{m}$ ג. $3.54\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

ד. $x(t) = 0.2\cos(3.54t)$ משיווי משקל.