

# פיזיקה ב להנדסת מחשבים 141037

פרק 2 - תנועה הרמונית -

תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה..... 1
2. תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות)..... 6

## תנועה הרמונית פשוטה:

רקע:

משוואת התנועה:

$$-k(x - x_0) = m\ddot{x}$$

$k$  ו- $m$  - קבועים חיוביים כלשהם.

$x_0$  - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

$x$  - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או כל משתנה אחר.

$\ddot{x}$  - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני  $k$ .

פתרון המשוואה:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$$

$x_0$  - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה:  $\Sigma \vec{F} = 0$ .

$A$  - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משווי המשקל.

$\omega$  - תדירות זוויתית:  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .

$\varphi$  - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

$x_0$  - אפשר למצוא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצוא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$

$\varphi, A$  מוצאים מתנאי התחלה  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ .

נוסחה למהירות המקסימאלית:

$$v_{max} = \omega A$$

מטוטלת פיזיקאלית:

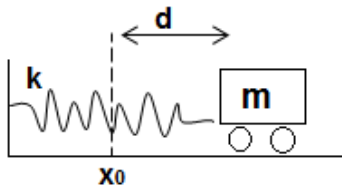


$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$$

אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

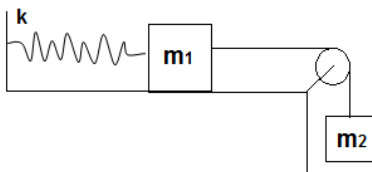
שאלות:



(1) מסה מתנגשת במסה

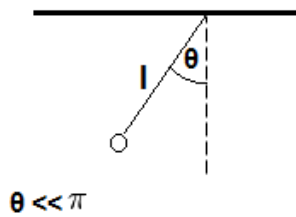
מסה  $m$  מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ  $k$ . מותחים את המסה מרחק  $d$  מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה. מצאו את  $x(t)$  של המסה.

(2) מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



מסה  $m_1$  מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע  $k$ . מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר  $M$ .

- א. מצאו את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבעו את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).
- ב. מצאו את תדירות התנודה של המערכת.
- ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתחיות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

**(3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם מומנטים)**

נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.

אורך החוט של המטוטלת הוא  $l$ .

מצאו את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.

הניחו כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה  $\theta$  (דרך מומנטים).

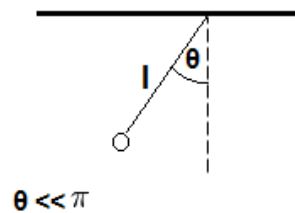
**(4) דיסקה עם חור**

נתונה דיסקה בעלת מסה  $M$  ורדיוס  $R$ . קודחים בדיסקה

חור עגול ברדיוס  $\frac{R}{4}$  שמרכזו  $\frac{R}{2}$  ממרכז הדיסקה. מחברים את

הדיסקה במרכזה אל קיר כך שהיא יכולה להתנדד סביב

מרכזה. מצאו את תדירות התנודות הקטנות.

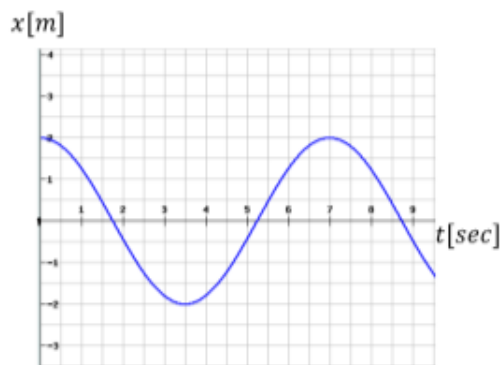
**(5) מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)**

נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה ו

אורך החוט של המטוטלת הוא  $l$ .

מצאו את תדירות התנודות הקטנות כפונקציה של הזמן.

הניחו כי המטוטלת מתחילה את תנ בזווית ידועה  $\theta$  (דרך אנרגיה).

**(6) גרף מיקום זמן**

הגרף הבא מתאר את מיקומו כתלות בזמן של גוף הנע בתנועה הרמונית פשוטה.

א. מהי אמפליטודת התנועה?

ב. מהו זמן המחזור?

ג. מהי התדירות הזוויתית?

ד. מהי הפאזה?

ה. רשום נוסחה למהירות כתלות בזמן.

**(7) גרף מהירות זמן**

מהירותו של גוף המתנדנד בתנועה הרמונית נתונה לפי הגרף הבא:



א. מתי מגיע הגוף לנקודת שיווי המשקל בפעם הראשונה?

ב. האם תאוצת הגוף ב-  $t = 1\text{sec}$  מקסימאלית?

ג. האם ב-  $t = 1.5\text{sec}$  האנרגיה קינטית מרבית?

ד. מהו הכוח ב-  $t = 2.5\text{sec}$ ?

ה. כמה מחזורי תנועה עשה הגוף ב-4 השניות הראשונות של התנועה?

**(8) גליל מחובר לקפיץ מתגלגל ללא החלקה**

גליל בעל מסה  $m$  ורדיוס  $R$  נמצא על משטח אופקי

לא חלק ומחובר באמצעות קפיץ אל הקיר.

קבוע הקפיץ הוא  $k$  והוא מחובר למרכז הגליל.

הנח שתנועת הגליל אופקית בלבד ושהוא מתגלגל ללא החלקה על המשטח.

מצאו את תדירות התנודות הקטנות.

פתרו פעם אחת באמצעות אנרגיה ופעם נוספת באמצעות כוחות ומומנטים.



**(9) גלגלת מסה וקפיץ**

במערכת הבאה, המסה  $m_1$  קשורה בחוט דרך גלגלת אל קפיץ המחובר לקרקע. הגלגלת אינה אידאלית.

נתון:  $R$  רדיוס הגלגלת,  $m_2$  מסת הגלגלת,  $k$  קבוע הקפיץ.

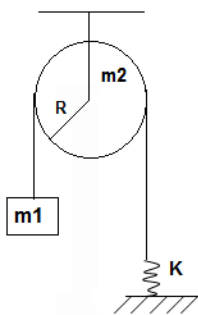
הניחו כי החוט לא מחליק על הגלגלת.

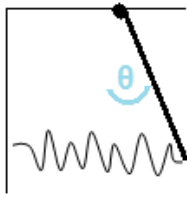
א. מצאו את נקודת שיווי המשקל.

ב. מצאו את תדירות התנודה.

ג. מושכים את המסה אורך  $d$  מנקודת שיווי המשקל.

מהו  $d_{\max}$  המרחק המקסימלי שניתן למשוך את המסה מבלי שהמתיחות בחוט תתאפס במהלך התנועה?





**10 מוט תלוי מחובר עם קפיץ לקיר**

מוט בעל אורך  $L$  ומסה  $M$  (התפלגות אחידה) תלוי מהתקרה וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה. קצהו השני של המוט מחובר בקפיץ, בעל קבוע  $k$  לקיר. הקפיץ רפוי כאשר המוט נמצא מאונך לתקרה.

א. הראו כי תנועת המוט בזוויות קטנות היא תנועה הרמונית ומצאו את תדירות התנועה.

ב. מצאו את הזווית של המוט כפונקציה של הזמן אם המוט משוחרר ממנוחה בזווית נתונה  $\theta_0$ .

**תשובות סופיות:**

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \quad \text{ב.} \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{16g}{247R}} \quad (4)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{ד.} \quad \omega \approx 0.898 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad T = 7 \text{ sec} \quad \text{ב.} \quad A = 2 \text{ m} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$v(t) = -1.80 \cdot \sin(0.898 \cdot t + 0) \quad \text{ה.}$$

$$0 \quad \text{ד.} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{ב. כן.} \quad t = 0.5 \text{ sec} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad (8)$$

$$d_{\max} = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + \frac{1}{2}m_2}} \quad \text{ב.} \quad x_0 = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{ב.} \quad \omega = \sqrt{\frac{3(mg+2kL)}{2mL}} \quad \text{א.} \quad (10)$$

## תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות):

### שאלות:

#### (1) שני חצאי דיסקה



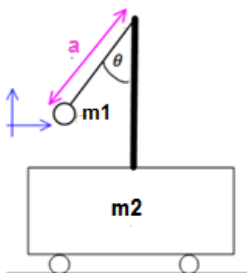
נתונים שני חצאי דיסקה התלויים על מסמר כמתואר בשרטוט. מסת הדיסקה ורדיוסה נתונים. מצא את התדירות של כל אחד מחצאי הדיסקה.

#### (2) חצי חישוק ושתי מסות



מצא את תדירות חצי החישוק שבתמונה. רדיוס  $R$  ומסתו  $M$ , בקצוותיו חוברו שתי מסות  $m$ . החישוק תלוי ממסמר בקודקודו.

#### (3) מטוטלת על עגלה נעה



עגלה בעלת מסה  $m_2$  חופשיה לנוע על משטח אופקי ללא חיכוך. אל העגלה מחובר מוט אנכי עליו תלויה מטוטלת מתמטית עם מסה  $m_1$  ואורך חוט  $a$ . משחררים את המסה (של המטוטלת) בזווית נתונה כאשר כל המערכת נמצאת במנוחה.

א. רשמו את מהירות המטוטלת במערכת העגלה כפונקציה של  $\theta$  ו- $\dot{\theta}$ .

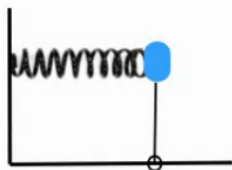
ב. רשמו את מהירות העגלה והמטוטלת כפונקציה של  $\theta$  ו- $\dot{\theta}$ .

ג. רשמו את משוואת שימור האנרגיה המכאנית של המערכת.

ד. רשמו את משוואת שימור האנרגיה בתנודות קטנות.

ה. מצאו את תדירות התנודה של המסה  $M$ .

#### (4) קפיץ מוט ומסה



נתונה מסה  $m$  המחוברת לקפיץ בעל קבוע  $k$ .

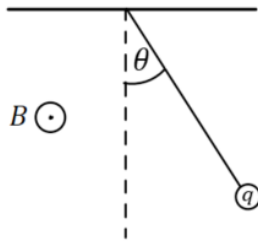
המסה גם מחוברת למוט חסר מסה בעל אורך  $l$ .

המוט מחובר לרצפה בציר המאפשר לו להסתובב.

המערכת בשרטוט נמצאת במצב שיווי משקל.

א. מהי תדירות התנודות הקטנות של המערכת?

ב. מהי המסה המקסימלית שתאפשר תדירות זו?

**(5) מטוטלת בשדה מגנטי**

מטוטלת מתמטית שאורכה  $L$ , מסתה  $m$  ומטענה  $q$

נתונה בשדה מגנטי אופקי  $B$  היוצא מהדף.

השדה המגנטי יוצר כוח מגנטי על המטוטלת כאשר

היא בתנועה לפי הנוסחה:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

א. מצא את הכוחות הפועלים על המטוטלת במהלך

התנועה כתלות בזווית  $\theta$  ובמהירות  $v$ .

ב. מסיטים את המטוטלת זווית קטנה  $\theta_0$  ומשחררים במנוחה.

מצא את משוואת התנועה של המטוטלת ומשם את מיקום המטוטלת

כתלות בזמן עבור זווית קטנות.

ג. מהי המתיחות בחוט כתלות בזמן.

ד. מהי המתיחות המקסימאלית בחוט ובאיזו זווית ומהירות מצב זה מתרחש?

## תשובות סופיות:

$$(1) \text{ דיסקה 1: } -\left(\frac{A}{B}\right) \cdot (\theta - (0)) = \ddot{\theta}, \text{ דיסקה 2: ראה סרטון.}$$

$$(2) \quad -\frac{(2m+M) \cdot gb}{I} \theta = \ddot{\theta}$$

$$(3) \quad v_x = \dot{\theta} a \cos \theta, \quad v_y = \dot{\theta} a \sin \theta \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad v_{1x} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a \dot{\theta} \cos \theta, \quad v_{1y} = \dot{\theta} a \sin \theta$$

$$\text{ג.} \quad E = \frac{1}{2} m_1 \left( \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \right)^{-2} a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 a^2 \sin^2 \theta - m_1 g a \cos \theta$$

$$\text{ד.} \quad E = \frac{1}{2} m_1 \left( \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{ga}{2} \theta^2 \right) - m_1 g a \frac{1}{2}$$

$$\text{ה.} \quad \omega = \sqrt{\frac{\frac{ga^2}{2}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2}}$$

$$(4) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{l}} > 0 \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad m < \frac{lk}{gv}$$

$$(5) \quad \text{א.} \quad |\vec{F}| = qvB, \text{ כיוון החוצה מהמעגל.}$$

$$\text{ב.} \quad \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

$$\text{ג.} \quad T(t) = -qB\sqrt{gL}\theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + mg \quad \text{עבור } \theta_0 \ll \frac{2qB}{m} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\text{ד.} \quad T_{\max} = mg + qB\sqrt{gL}\theta_0$$