אופטיקה וגלים

פרק 1 - תנועה הרמונית -

תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה 1
2. בור פוטנציאל 4
3. תנועה הרמונית מרוסנת 6
4. תנועה הרמונית מאולצת 10

תנועה הרמונית פשוטה:

רקע:

משוואת התנועה:

$$-k(x-x_0)=m\ddot{x}$$

k ו$-m$- קבועים חיוביים כלשהם.

x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או כל משתנה אחר.

$\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני k.

פתרון המשוואה:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+x_0$$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה: $\Sigma\vec{F}=0$.

A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משוויי המשקל.

ω - תדירות זוויתית: $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$.

φ - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$

A, φ מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$, $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית:

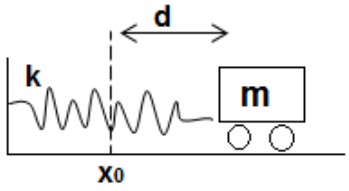
$$v_{max} = \omega A$$

אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}mA^2$$

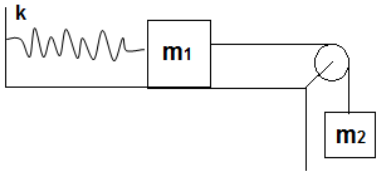
שאלות:

1) דוגמה - מסה מתנגשת במסה



מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k.
מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה.
מצא את $x(t)$ של המסה.

2) דוגמה - מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



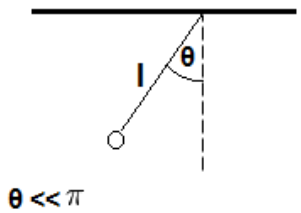
מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k. מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M.

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).

ב. מצא את תדירות התנודה של המערכת.

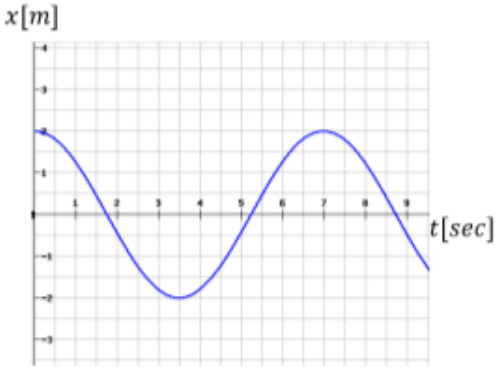
ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)



נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.
אורך החוט של המטוטלת הוא l.
מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.
הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).

4) גרף מיקום זמן



הגרף הבא מתאר את מיקומו כתלות בזמן של גוף הנע בתנועה הרמונית פשוטה.

א. מהי אמפליטודת התנועה?

ב. מהו זמן המחזור?

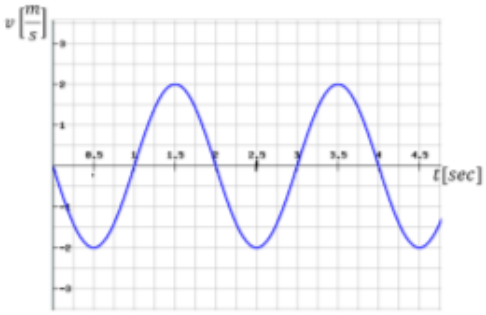
ג. מהי התדירות הזוויתית?

ד. מהי הפאזה?

ה. רשום נוסחה למהירות כתלות בזמן.

5) גרף מהירות זמן

מהירותו של גוף המתנדנד בתנועה הרמונית נתונה לפי הגרף הבא:



א. מתי מגיע הגוף לנקודת שיווי המשקל בפעם הראשונה?

ב. האם תאוצת הגוף ב- $t=1\text{sec}$ מקסימאלית?

ג. האם ב- $t=1.5\text{sec}$ האנרגיה קינטית מרבית?

ד. מהו הכוח ב- $t=2.5\text{sec}$?

ה. כמה מחזורי תנועה עשה הגוף ב-4 השניות הראשונות של התנועה?

תשובות סופיות:

1) $x(t)=-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t+\frac{\pi}{2}\right)+x_0$

2) א. $x=\frac{m_2 g}{k}$ ב. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ ג. $A_{max}=\frac{g}{\omega^2}$

3) $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$, $\theta(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

4) א. $A=2\text{m}$ ב. $T=7\text{sec}$ ג. $\omega\approx 0.898\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ד. $\varphi=0$

ה. $v(t)=-1.80\cdot\sin(0.898\cdot t+0)$

5) א. $t=0.5\text{sec}$ ב. כן. ג. כן. ד. 0

ה. 2

בור פוטנציאל:

רקע:

כאשר גוף נמצא בנקודת מינימום של הפוטנציאל והאנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

כאשר x_0 היא נקודת המינימום ו- U'' נגזרת שניה בנקודה

שאלות:

1) פוטנציאל לנארד-ג'ונס

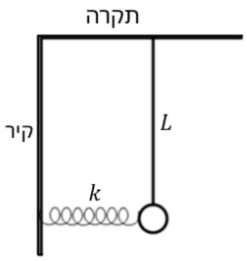
פונקציית הפוטנציאל של לנארד ג'ונס מתארת את האינטראקציה בין אטומים או מולקולות בתוך סריג והיא נתונה לפי הנוסחה: $U(r)=\varepsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$

כאשר ε ו- r_0 קבועים ו- r הוא המרחק בין המולקולות.

מצא את התדירות של תנודות קטנות סביב שיווי משקל של המערכת.

ניתן להניח שמדובר בחלקיק אחד במסה m המרגיש את הפוטנציאל מחלקיק שני במסה M הנשאר נייח $(m << M)$.

2) מטוטלת מתמטית וקפיץ עם אנרגיות



מטוטלת עם מסה m תלויה מהתקרה באמצעות חוט באורך L.

קושרים למסה קפיץ בעל קבוע k המחובר אופקית לקיר.

הקפיץ במצב רפוי כאשר החוט מאונך לתקרה.

מזיזים את המסה זווית קטנה θ_0 ימינה ומשחררים ממנוחה.

א. מצאו את הזווית של המסה כתלות בזמן.

ב. מהי המתיחות בחוט כאשר המוט נמצא במצב אנכי תוך כדי תנועה.

3) עיפרון עם מוטות בשיווי משקל

הגוף שבאיור מורכב מעיפרון בעל מסה זניחה ואורך L.

לקצה של העיפרון מחוברים שני כדורים בעלי מסה m

באמצעות מקלות דקים חסרי מסה באורך l ובזווית α.

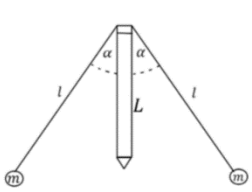
מניחים את הגוף על מעמד ומטים אותו בזווית θ במישור הדף.

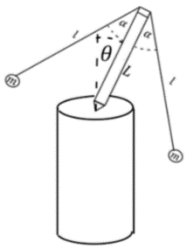
א. רשמו את האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף כתלות בזווית θ.

ב. באיזו זווית θ יהיה הגוף בשיווי משקל?

ג. מה התנאי לכך ששיווי המשקל יהיה יציב?

ד. מהו זמן המחזור של התנודות סביב נקודת שיווי המשקל?





תשובות סופיות:

1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{72\varepsilon}{mv_0}}$

2) א. $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mg+kL}{mL}} \cdot t\right)$ ב. $T = mg + (mg+kL)\theta_0^2$

3) א. $U = 2mg(L - l\cos\alpha)\cos\theta$ ב. $\theta = 0$ ג. $L < l\cos\alpha$

ד. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{l\cos\alpha - L}{L^2 + l^2 - 2Ll\cos\alpha}}}$

תנועה הרמונית מרוסנת:

רקע:

משוואת התנועה:

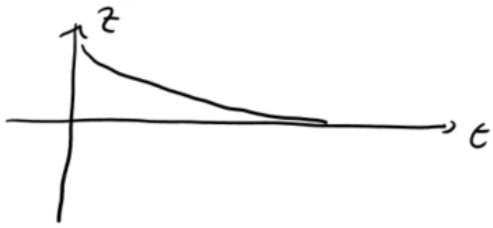
$$\ddot{z}+\Gamma\dot{z}+\omega_0^2 z=0$$

$$\Gamma=\frac{\lambda}{m}\ ,\ \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

(I). ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2}>\omega_0$

$$z(t)=e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}+Be^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}\right)$$



אין תנודות.

(II). ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2}=\omega_0$

$$z(t)=(A+B\cdot t)\cdot e^{-\omega_0\cdot t}$$

דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

(III). ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

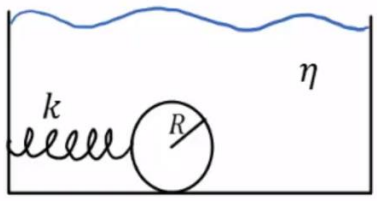
$$z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

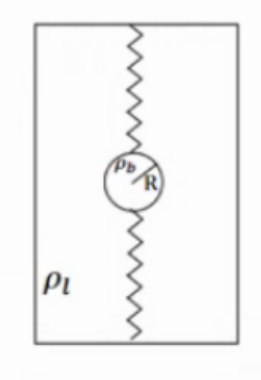
שאלות:

1) כדור במיכל מים



כדור בעל מסה m ורדיוס R נמצא בתוך מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל.
קבוע הקפיץ הוא k. בתנועת הגוף במים, מפעילים המים על הכדור כוח התנגדות המתכונתי והפוך למהירותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו הוא: $\vec{F}=-6\pi R\eta\vec{v}$. כאשר η היא צמיגות המים ו- R הוא רדיוס הכדור.
התייחס ל- m, k, η, R כנתונים ומצא את תדירות התנודות של הכדור בהנחה ש- $R<\frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$. הזנח את החיכוך בין הכדור לתחתית המיכל.

2) שני קפיצים בנוזל



כדור נמצא בתוך תיבה מלאה במים ומחובר עם קפיץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפיץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התחתון של התיבה.
נתון: R - רדיוס הכדור, ρ_b - צפיפות המסה של הכדור,
ρ_l - צפיפות המסה של המים, K - קבוע שני הקפיצים ו- η - צמיגות המים.
(תזכורת: כאשר כדור נמצא בתוך נוזל פועלים עליו כוח ציפה: $F=\rho_l Vg$ וכוח סטוקס: $F=-6\pi\eta Rv$).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.
ב. מה התנאי שיהיו תנודות הרמוניות?
מצא את התדירות בהנחה שתנודות אלו מתקיימות.
ג. מצא את התנאי בו יחזור הכדור הכי מהר לנקודת שיווי המשקל.

3) איבוד אנרגיה במחזור

בתנועה הרמונית מרוסנת קיים ריסון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור.
בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

4) משקולת במיכל מים תלויה מהתקרה

משקולת שמסתה: $M = 1\text{kg}$ נמצאת במיכל מים ומחוברת לתקרה באמצעות קפיץ בעל קבוע: $k = 20\frac{\text{N}}{\text{m}}$. כוח ההתנגדות שמפעילים המים הוא מהצורה של: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 4\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$ ו- $\vec{v}$ היא מהירות המסה.
הניחו שהמשקולת אינה יוצאת מהמים ואינה פוגעת ברצפה.

א. תוך כמה זמן תרד האמפליטודה לחמישית מגודלה ההתחלתי?
(הניחו שהפאזה היא אפס)

ב. לאחר כמה מחזורים זה יקרה?

5) מסה באמבט מים ודבש

מסה: $m = 1\text{kg}$ נמצאת באמבט מלא מים, המסה מחוברת באמצעות שני קפיצים זהים בעלי קבוע: $k = 25\frac{\text{N}}{\text{m}}$ לשתי דפנות האמבט ונעה ללא חיכוך עם ריצפת האמבט. מזיזים את המסה 0.5m מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. התנגדות המים מפעילה כוח גרר: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 10\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$.

א. מהו העתק המסה כתלות בזמן?

ב. מחליפים את המים בדבש מה שמגדיל את λ פי $\sqrt{2}$. מזיזים שוב את המסה 0.5m ומשחררים, מהו העתק המסה כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

1) $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\text{k}}{\text{m}} - \left(\frac{3\pi\text{R}\eta}{\text{m}}\right)^2}$

2) א. $y_{eq} = \frac{\text{F}_b}{2\text{K}}$ ב. $\omega^* = \sqrt{\frac{2\text{K}}{\text{m}} - \left(\frac{6\pi\eta\text{R}}{2\text{m}}\right)^2}$ ג. $\frac{2\text{K}}{\text{m}} = \frac{6\pi\eta\text{R}^2}{2\text{m}}$

3) 5%

4) א. 1.6sec ב. בערך מחזור אחד.

5) א. $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-5t}\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$ ב. $x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}t\right)e^{-5\cdot\sqrt{2}t}$

תנועה הרמונית מאולצת:

רקע:

כוח מאלץ:

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

משוואת התנועה:

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

פתרון משוואת התנועה:

$$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים במצב עמיד נזניח את הפתרון ההומוגני.

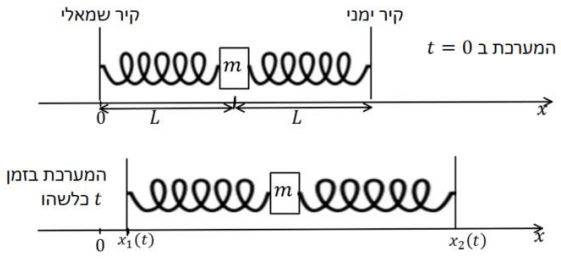
$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma\, \Omega}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

תדירות תהודה - התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי.

שאלות:

1) מסה בין קירות זזים



מסה m מחוברת לשני קפיצים זהים בעלי קבוע k ואורך רפוי L משני צידיה. הקפיצים מחוברים לקירות הנמצאים במרחק L מהמסה משמאלה ומימינה והמערכת כולה מונחת על שולחן חלק (כוח הכובד לתוך הדף).

על המסה פועל כוח גרר: $F=-bv$. ב-$t=0$ הקירות מתחילים לזוז.

ראשית הצירים ממוקמת במרכז התנועה של הקיר השמאלי והכיוון החיובי ימינה.

מיקום הקירות כתלות בזמן הוא: $x_2(t)=2L+2d\sin(\omega t)$, $x_1(t)=d\sin(\omega t)$.

נתונים: m , b , k , L , d ו- $d<<L$.

א. מהי תדירות התנועה ומהי האמפליטודה?

ב. מה התנאי לתהודה בהנחה כי הריסון חלש מאוד?

2) מציאת תדירות ברבע אמפליטודה

מסה m מחוברת לקפיץ אופקי בעל קבוע k , המסה נעה על מישור חלק ללא חיכוך.

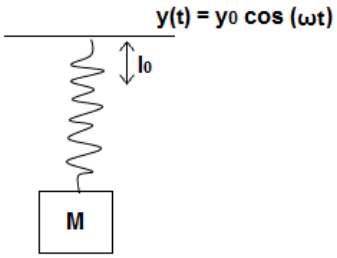
על המסה פועל כוח גרר: $f=-bv$ וכוח מאלץ: $F(t)=d\cdot\cos(\omega t)$.

מצא את תדירות הכוח בה אמפליטודת התנועה במצב העמיד תהיה רבע מהאמפליטודה המקסימלית.

הנח כי: m , k , b , d נתונים וכי: $b<<\sqrt{mk}$.

3) מסה תלויה על קרש נע

מסה M מחוברת באמצעות קפיץ אנכי לקרש אופקי הנע בציר ה- y לפי: $y(t)=y_0\cos(\omega t)$.



קבוע הקפיץ k ואורכו הרפוי l_0 נתונים.

מצא את מיקום המסה כפונקציה של הזמן.

תשובות סופיות:

1) א. $A(\omega)=\dfrac{\frac{3kd}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b}{m}\right)^2\omega^2}}$ ב. $\omega\sim\sqrt{\frac{2k}{m}}$

2) $\omega_{1,2}=\sqrt{\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2}}$

3) $y(t)=\dfrac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m}-\omega^2}\cos\omega t+y'_0$