

# הסתברות

פרק 33 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

### רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

- אם  $X$  ו- $Y$  משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{t \cdot x}) \cdot E(e^{t \cdot y}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

**תזכורת:**

| התפלגות                       | פונקציית צפיפות $f_x(t)$                                                                  | פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$                                                                 |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| אחיד<br>$U(a,b)$              | $f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$   | $f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$ |
| מעריכי<br>$\exp(\lambda)$     | $f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ | $f_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$            |
| נורמלית<br>$N(\mu, \sigma^2)$ | $f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$                 | $\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$                                                          |

| התפלגות                       | $E(X)$              | $VAR(X)$              | $M_X(t)$                             |
|-------------------------------|---------------------|-----------------------|--------------------------------------|
| אחיד<br>$U(a,b)$              | $\frac{a+b}{2}$     | $\frac{(b-a)^2}{12}$  | $\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$     |
| מעריכי<br>$\exp(\lambda)$     | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{\lambda}{\lambda - t}$        |
| נורמלית<br>$N(\mu, \sigma^2)$ | $\mu$               | $\sigma^2$            | $e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ |

| משתנה מקרי                 | משמעות                                                                                                                                 | $P_X(x)$                                           | $E(x)$        | $Var(x)$            | $M_X(t)$                |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|
| בינומי<br>$Bin(n, p)$      | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי $n$ פעמים:<br>$P$ ההסתברות להצלחה<br>$1 - P = q$<br>ההסתברות לכישלון $x$ :<br>מספר ההצלחות | $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$<br>$x = 0, 1, \dots, n$ | $n \cdot p$   | $n \cdot p \cdot q$ | $[pe^t + q]^n$          |
| גיאומטרי<br>$G(p)$         | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה.<br>$x$ : מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה                                   | $pq^{x-1}$<br>$x = 1, 2, \dots, \infty$            | $\frac{1}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$     | $\frac{pe^t}{1 - qe^t}$ |
| פואסוני<br>$Pois(\lambda)$ | $x$ : מספר ההופעות בלידת זמן.<br>מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$                                                                 | $e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$                | $\lambda$     | $\lambda$           | $e^{\lambda(e^t - 1)}$  |

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון:  $Y \sim P(\lambda = 2)$   $X \sim P(\lambda = 4)$ .

$X$  ו- $Y$  הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של:  $5X - 3$ ?

ב. נגדיר את:  $T = X + Y$ . מה ההתפלגות של  $T$ ?

## שאלות:

(1) נתון ש-  $X_i \sim p(\lambda)$  בלתי תלויים.

א. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של  $\sum_{i=1}^n X_i$ .

ב. הוכיחו ש-  $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n \cdot \lambda)$ .

(2) נתון:  $Y \sim P(\lambda=2)$ ,  $X \sim P(\lambda=10)$ .

$X$  ו- $Y$  הינם בלתי תלויים. נגדיר את:  $T = X + Y$ .

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של  $T$ .

ב. הוכיחו ש-  $T \sim P(\lambda=12)$ .

ג. הוכיחו ש-  $X/T = 8 \sim B\left(8, \frac{5}{6}\right)$ . כלומר, ההתפלגות של  $X$ ,

בהינתן ש- $T=8$  היא בינומית עם הפרמטרים:  $n=8$  ו- $p = \frac{5}{6}$ .

(3) יהי:  $X_i \sim \exp(1)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  והמשתנים הם בלתי תלויים.

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של  $T$ .

ב. חשבו את התוחלת והשונות של  $T$ .

ג. יהי:  $Z = \frac{T - E(T)}{\sigma(T)}$  כלומר התקנון של  $T$ .

מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של  $Z$ .

(4) נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \text{ לכל } t, \text{ כאשר: } X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

א. הוכיחו שאם  $Y = 2X$  אזי  $Y \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$ .

ב. הוכיחו שאם  $T = X_1 + X_2$  ו- $X_1$  ו- $X_2$  בלתי תלויים מאותה התפלגות

נורמלית אז מתקיים ש:  $T \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$ .

## תשובות סופיות:

(1) א. פונקציה יוצרת מומנטים:  $e^{(n\lambda)(e^t-1)}$ . ב. שאלת הוכחה.

(2) א. פונקציה יוצרת מומנטים:  $e^{12(e^t-1)}$ . ב. שאלת הוכחה.

ג. שאלת הוכחה.

(3) א. פונקציה יוצרת מומנטים:  $\left(\frac{1}{1-t}\right)^n$ . ב. תוחלת:  $n$ , שונות:  $n$ .

ג. פונקציה יוצרת מומנטים:  $e^{-\frac{1}{n^2}t} \cdot \left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{n^2}t\right)}\right)^n$

(4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.