

תורת ההסתברות

פרק 53 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים (פרק 7 ממ"ן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 1

תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

- אם X ו- Y משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{t \cdot X}) \cdot E(e^{t \cdot Y}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

תזכורת:

התפלגות	פונקציית צפיפות $f_x(t)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$
אחיד $U(a,b)$	$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$	$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$
נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n, p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: P ההסתברות להצלחה $1 - P = q$ ההסתברות לכישלון x : מספר ההצלחות	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$	$[pe^t + q]^n$
גיאומטרי $G(p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. x : מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	pq^{x-1} $x = 1, 2, \dots, \infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	x : מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t - 1)}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $Y \sim P(\lambda = 2)$ $X \sim P(\lambda = 4)$.

X ו- Y הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של: $5X - 3$?

ב. נגדיר את: $T = X + Y$. מה ההתפלגות של T ?

שאלות:

(1) נתון ש- $X_i \sim p(\lambda)$ בלתי תלויים.

א. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של $\sum_{i=1}^n X_i$.

ב. הוכיחו ש- $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n \cdot \lambda)$.

(2) נתון: $Y \sim P(\lambda=2)$, $X \sim P(\lambda=10)$.

X ו- Y הינם בלתי תלויים. נגדיר את: $T = X + Y$.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T .

ב. הוכיחו ש- $T \sim P(\lambda=12)$.

ג. הוכיחו ש- $X/T = 8 \sim B\left(8, \frac{5}{6}\right)$. כלומר, ההתפלגות של X ,

בהינתן ש- $T=8$ היא בינומית עם הפרמטרים: $n=8$ ו- $p = \frac{5}{6}$.

(3) יהי: $X_i \sim \exp(1)$, $i=1, 2, \dots, n$ והמשתנים הם בלתי תלויים.

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T .

ב. חשבו את התוחלת והשונות של T .

ג. יהי: $Z = \frac{T - E(T)}{\sigma(T)}$ כלומר התקנון של T .

מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של Z .

(4) נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \text{ לכל } t, \text{ כאשר: } X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

א. הוכיחו שאם $Y = 2X$ אזי $Y \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$.

ב. הוכיחו שאם $T = X_1 + X_2$ ו- X_1 ו- X_2 בלתי תלויים מאותה התפלגות

נורמלית אז מתקיים ש: $T \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$.

תשובות סופיות:

(1) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{(n\lambda)(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

(2) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{12(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

ג. שאלת הוכחה.

(3) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(\frac{1}{1-t}\right)^n$. ב. תוחלת: n , שונות: n .

ג. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{-\frac{1}{n^2}t} \cdot \left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{n^2}t\right)}\right)^n$

(4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.