# לוגיקה ותורת הקבוצות

## פרק 2 - תורת הקבוצות

### תוכן העניינים


1. מבוא לתורת הקבוצות ..... 1
2. פעולות על קבוצות ..... 2
3. דיאגרמת ון ..... 4
4. קריאת קבוצות ..... 6
5. שאלות הוכחה ..... 8
6. דרך השלילה ..... 10
7. קבוצת חזקה ..... 11
8. מכפלה קרטזית ..... 13

# מבוא לתורת הקבוצות

## שאלות

**1)** לגבי כל אחד והממדים הבאים רשמו ב-□ את הסימן המתאים, $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$.
שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא $\not\subseteq$, נמקו.

| | | |
|---|---|---|
| א. $1\square\{1,\{1\}\}$ | ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$ | ג. $\{8,\varnothing\}\square\{1,2,8\}$ |
| ד. $\varnothing\square\{1,2\}$ | ה. $\varnothing\square\{\varnothing,1,2\}$ | |
| ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$ | ז. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\}\}$ | |
| ח. $\{2\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$ | ט. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$ | |
| י. $\{\{2\},\varnothing\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$ | יא. $\varnothing\square\{1,\{\varnothing\}\}$ | |
| יב. $\{\varnothing\}\square\{1,\{\varnothing\}\}$ | יג. $\{1,2\}\square\{1,\{2\}\}$ | |
| יד. $1\square\mathbb{N}$ | טו. $\{1\}\square\mathbb{N}$ | |
| טז. $1\square\{\mathbb{N}\}$ | יז. $\{1\}\square\{\mathbb{N}\}$ | |

## תשובות סופיות

**1)** א. $\in$ ב. $\in,\subseteq,\subset$ ג. $\notin,\not\subseteq$ ד. $\notin,\subseteq,\subset$ ה. $\in,\subseteq,\subset$
ו. $\notin,\not\subseteq$ ז. $\notin,\subseteq,\subset$ ח. $\in,\subseteq,\subset$ ט. $\in,\subseteq,\subset$ י. $\notin,\not\subseteq$
יא. $\notin,\subseteq,\subset$ יב. $\in,\not\subseteq$ יג. $\notin,\not\subseteq$ יד. $\in,\notin$ טו. $\notin,\subseteq,\subset$
טז. $\notin$ יז. $\notin,\not\subseteq$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

# פעולות על קבוצות

## שאלות

**1)** עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$ , חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$

ב. $(A\cap B)\cup C$

ג. $A\cap(B\cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C\setminus A$

**2)** עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$ :

א. האם $B\subseteq C$ ?

ב. האם $\{1\}\subseteq B$ ?

ג. האם $\{1\}\subseteq A$ ?

ד. האם $\{1\}\in P(A)$ ?

ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$ ?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$ ?

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$ ?

**3)** עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\}, B=\{4,\varnothing\}$ , חשבו:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A-B$

ד. $B-A$

ה. $A\oplus B$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $\{1,2,6\}$ ב. $\{1,3,4,6\}$ ג. $\{1,3\}$ ד. $2 \notin P(A)$

**2)** א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

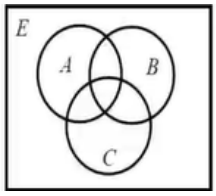
**3)** א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$ ב. $\{\varnothing\}$ ג. $\{1,\{3,*\}\}$ ד. $\{4\}$
ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

# דיאגרמת ון

## שאלות

**1)** באיור שלהלן דיאגרמת ון.




קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

א. $(A-B)-C$

ב. $A-(B-C)$

ג. $A\cap B^c$

ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$

ו. $A\cap(B\cap C)$

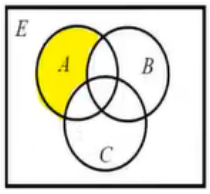
ז. $(A\cup B)\cup C$

ח. $A\cup(B\cup C)$

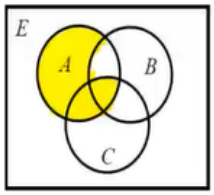

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

## תשובות סופיות

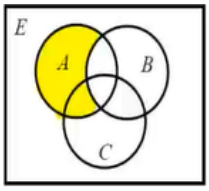
**1)** א.



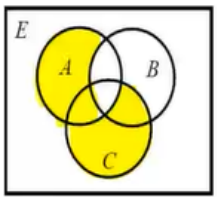

ב.



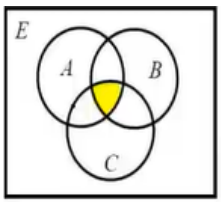

ג.



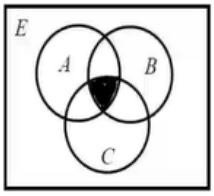

ד.



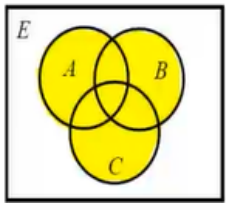

ה.



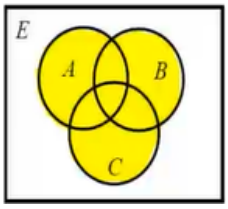

ו.




ז.




ח.





כתב ופתר – טל פלדמן ©

# קריאת קבוצות

## שאלות

**1)** עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,
$D=\{2^1,2^2,2^3,...\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

**2)** עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1|n\in\mathbb{N}\}$

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z}||x|\geq 2\rightarrow x^2>41\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z}||x|\geq 7\rightarrow x<20\}$

ד. $C=\{3n-1|n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z}|x\geq 8\rightarrow x^2<67\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

## תשובות סופיות

**1)** א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

**2)** א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

# שאלות הוכחה

## שאלות

**בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.**

**1)** תהיינה $A,B$ קבוצות.
אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cup B$.
ב. אם $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$.
ג. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.
ד. אם $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$.
ה. אם $x\notin A$, אז $x\notin A-B$.
ו. אם $x\notin A-B$, אז $x\notin A$.
ז. אם $x\in B$, אז $x\notin A-B$.
ח. אם $x\notin A-B$, אז $x\in B$.
ט. $x\notin A \Leftrightarrow x\notin A-B$
י. $x\in B \Leftrightarrow x\notin A-B$
יא. השלימו: $x\notin A-B \Leftrightarrow$ _____.
יב. $A\subseteq B\cap C \Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge A\subseteq C)$
יג. $A\subseteq B\cup C \Leftrightarrow (A\subseteq B \vee A\subseteq C)$
יד. אם $A=A\cup B$, אז $A\subseteq B$.
טו. אם $A=A\cup B$, אז $B\subseteq A$.
טז. אם $A=A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
יז. אם $A=A\cap B$, אז $B\subseteq A$.
יח. אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cup B$.
יט. אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cup B$.
כ. אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cap B$.
כא. אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cap B$.


כתב ופתר – טל פלדמן ©

**2)** תהיינה $A,B,C$ קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $A=A-B$, אז $B=\varnothing$.

ב. אם $A=A-B$, אז $A\cap B=\varnothing$.

ג. אם $A=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ד. אם $B=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ה. אם $A\cap B=A$, אז $A=A\cup B$.

ו. אם $A\cap B=B$, אז $A=A\cup B$.

ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.

ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$

י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$

יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:

1. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$
2. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

## תשובות סופיות

**1)** א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x\in B\ V\ x\notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

**2)** א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.1. נכונה. 2. לא נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

# דרך השלילה

## שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם $\alpha$, אז $\beta$, נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

**יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.**

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$, אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

## תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

# קבוצת חזקה

## שאלות

**1)** עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$ , $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$ , $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:
א. את $P(C)$ , $P(B)$ ואת $P(A)$.
ב. $P(A)\cap B$ , $P(A)\cap A$ , $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

**2)** עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$ , $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ,
א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.
ב. רשמו את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.
ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

**3)** רשמו את $P(\varnothing)$ , את $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

**4)** תהיינה $A,B$ שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$
ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$
ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$
ה. $P(A)\cap A=\varnothing$
ו. תנו דוגמה לקבוצה $A$ שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.
ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$ , אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:
ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ , אז $A\cap B=\varnothing$.
ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ , אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

**5)** תהיינה $A,B,C$ קבוצות כלשהן, ונתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכיחו כי $B-A=B$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

## תשובות סופיות

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$ , $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$ ,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$ .

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$ , $P(A)\cap A=\varnothing$ , $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$ , $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$ .

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ , $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$ .

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ , $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$ .

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ , $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ .

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$ , $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ , $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ .

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

# מכפלה קרטזית

## שאלות

**1)** תהיינה $A,B,C$ קבוצות. הוכיחו:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות $A,B,C,D$ מתקיים
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$, אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות $A,B,C,D$ מתקיים
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

**2)** הוכיחו או הפריכו:
תהיינה $A,B$ שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$.
אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$, כך ש-$S=C\times D$.

**3)** הוכיחו או הפריכו:
קיימות שתי קבוצות $A,B$, כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$ (סימן $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

**4)** הוכיחו או הפריכו:
לכל שלוש קבוצות $A,B,C$ מתקיים $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

**5)** הדגימו שלוש קבוצות $A,B,C$, כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

## תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראו סרטון.


כתב ופתר – טל פלדמן ©