חשיבה מתמטית

פרק 8 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשמו ב- $\square$ את הסימן המתאים, $\not\subseteq,\subset,\subseteq,\notin,\in$.
שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא $\not\subseteq$, נמקו.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$

ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$

ג. $\{8,\varnothing\}\ \square\ \{1,2,8\}$

ד. $\varnothing\ \square\ \{1,2\}$

ה. $\varnothing\ \square\ \{\varnothing,1,2\}$

ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$

ז. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\}\}$

ח. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$

ט. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$

י. $\{\{2\},\varnothing\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$

יא. $\varnothing\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$

יב. $\{\varnothing\}\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$

יג. $\{1,2\}\ \square\ \{1,\{2\}\}$

יד. $1\ \square\ \mathbb{N}$

טו. $\{1\}\ \square\ \mathbb{N}$

טז. $1\ \square\ \{\mathbb{N}\}$

יז. $\{1\}\ \square\ \{\mathbb{N}\}$

תשובות סופיות

1) א. $\in$ ב. $\in,\subseteq,\subset$ ג. $\notin,\not\subseteq$ ד. $\notin,\subseteq,\subset$ ה. $\in,\subseteq,\subset$

ו. $\notin,\not\subseteq$ ז. $\notin,\subseteq,\subset$ ח. $\in,\subseteq,\subset$ ט. $\in,\subseteq,\subset$ י. $\notin,\not\subseteq$

יא. $\notin,\subseteq,\subset$ יב. $\in,\not\subseteq$ יג. $\notin,\not\subseteq$ יד. $\in,\notin$ טו. $\notin,\subseteq,\subset$

טז. $\notin$ יז. $\notin,\not\subseteq$

פעולות על קבוצות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$

ב. $(A\cap B)\cup C$

ג. $A\cap(B\cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C\setminus A$

2) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$:

א. האם $B\subseteq C$?

ב. האם $\{1\}\subseteq B$?

ג. האם $\{1\}\subseteq A$?

ד. האם $\{1\}\in P(A)$?

ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$?

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\}, B=\{4,\varnothing\}$, חשבו:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A-B$

ד. $B-A$

ה. $A\oplus B$

תשובות סופיות

1) א. $\{1,2,6\}$ ב. $\{1,3,4,6\}$ ג. $\{1,3\}$ ד. $2 \notin P(A)$

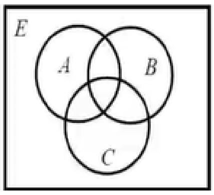
2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$ ב. $\{\varnothing\}$ ג. $\{1,\{3,*\}\}$ ד. $\{4\}$
ה. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.



קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות :

א. $(A-B)-C$ ב. $A-(B-C)$

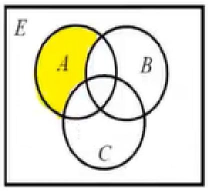
ג. $A\cap B^c$ ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$ ו. $A\cap(B\cap C)$

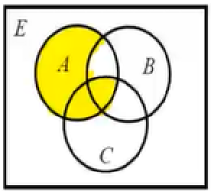
ז. $(A\cup B)\cup C$ ח. $A\cup(B\cup C)$

תשובות סופיות

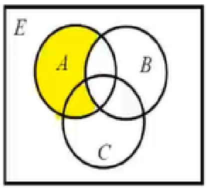
1) א.



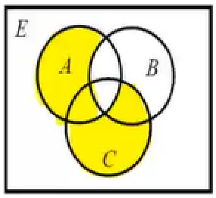
ב.



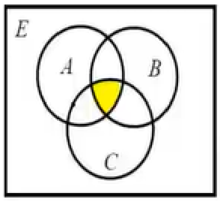
ג.



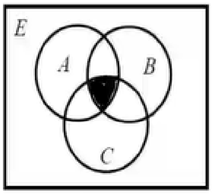
ד.



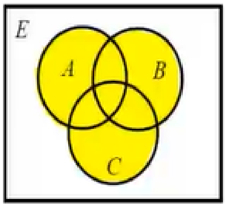
ה.



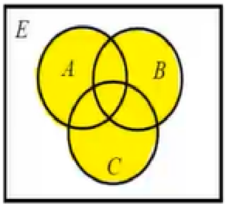
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות

שאלות

1) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,
$D=\{2^1,2^2,2^3,...\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\}$

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 2\rightarrow x^2>41\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 7\rightarrow x<20\}$

ד. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1 \mid \sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\geq 8\rightarrow x^2<67\}$

תשובות סופיות

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$

שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cup B$.

ב. אם $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$.

ג. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.

ד. אם $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$.

ה. אם $x\notin A$, אז $x\notin A-B$.

ו. אם $x\notin A-B$, אז $x\notin A$.

ז. אם $x\in B$, אז $x\notin A-B$.

ח. אם $x\notin A-B$, אז $x\in B$.

ט. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A$

י. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\in B$

יא. השלימו: $x\notin A-B \Leftrightarrow$ ______.

יב. $A\subseteq B\cap C \Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge A\subseteq C)$

יג. $A\subseteq B\cup C \Leftrightarrow (A\subseteq B \vee A\subseteq C)$

יד. אם $A=A\cup B$, אז $A\subseteq B$.

טו. אם $A=A\cup B$, אז $B\subseteq A$.

טז. אם $A=A\cap B$, אז $A\subseteq B$.

יז. אם $A=A\cap B$, אז $B\subseteq A$.

יח. אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cup B$.

יט. אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cup B$.

כ. אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cap B$.

כא. אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $A=A-B$, אז $B=\varnothing$.

ב. אם $A=A-B$, אז $A\cap B=\varnothing$.

ג. אם $A=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ד. אם $B=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ה. אם $A\cap B=A$, אז $A=A\cup B$.

ו. אם $A\cap B=B$, אז $A=A\cup B$.

ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.

ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$

י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$

יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:

1. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$
2. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

תשובות סופיות

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x\in B \; V \; x\notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.1. נכונה. 2. לא נכונה.

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α, אז β, נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$, אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה

שאלות

1) עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:
א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.
ב. $P(A)\cap B$, $P(A)\cap A$, $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,
א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.
ב. רשמו את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.
ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשמו את $P(\varnothing)$, את $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$
ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$
ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$
ה. $P(A)\cap A=\varnothing$
ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.
ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$, אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:
ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכיחו כי $B-A=B$.

תשובות סופיות

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.
ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.
ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.
ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית

שאלות

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A=B) \Leftrightarrow (A\times A=B\times B)$

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B)) \Leftrightarrow (A\times B=B\times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$, אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2) הוכיחו או הפריכו:
תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$.
אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$, כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכיחו או הפריכו:
קיימות שתי קבוצות A,B, כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$ (סימון $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכיחו או הפריכו:
לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגימו שלוש קבוצות A,B,C, כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראו סרטון.