מבוא לקוונטים למהנדסים 83326

פרק 9 - תורת ההפרעות הבלתי תלויה בזמן

תוכן העניינים

תורת ההפרעות הבלתי תלויה בזמן ובלתי מנוונת:

רקע:

עבור המילטוניאן מהצורה: $H=H_0+H'$, כאשר $H'<<H_0$.

$E_n^{(0)}$ ו- $\psi_n^{(0)}$ הם סדר אפס בחישוב האנרגיות ופונקציות הגל והן האנרגיות ופונקציות הגל של H_0, ההמילטוניאן ללא ההפרעה.

תיקון סדר ראשון לאנרגיה:

$$E_n^{(1)}=\left\langle\psi_n^{(0)}\middle|H'\middle|\psi_n^{(0)}\right\rangle$$

תיקון סדר ראשון לפונקציית הגל (ללא ניוון באנרגיה):

$$\psi_n^{(1)}=\sum_{m\neq n}\frac{\left\langle\psi_m^{(0)}\middle|H'\middle|\psi_n^{(0)}\right\rangle}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\psi_m^{(0)}$$

תיקון סדר שני לאנרגיה:

$$E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\frac{\left|\left\langle\psi_m^{(0)}\middle|H'\middle|\psi_n^{(0)}\right\rangle\right|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$$

שאלות:

1) דוגמה – תוספת מדרגה לבור פוטנציאל

הפונקציות העצמיות של בור אינסופי מ-0 עד l הן:

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

מצאו את התיקון הראשון לאנרגיות בבור עבור הפרעה מהצורה הבאה:

א. תוספת קבועה V_0.

ב. תוספת קבועה רק לחצי מהבור: $V(x)=\begin{cases}V_0 & , \quad 0\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & , \quad \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$.

2) הפרעה שלא באלכסון ראשי

ההמילוטוניאן $\hat{H}$ של מערכת קוונטית בעלת שלושה מצבים נתון על ידי המטריצה הבאה:

$$\hat{H}=\begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0 \end{pmatrix}$$

כאשר E_0 מייצג קבוע חיובי ידוע בעל יחידות של אנרגיה.

נסמן ב- ϕ_3, ϕ_2, ϕ_1 את הווקטורים העצמיים של ההמילטוניאן (המצבים העצמיים של ההמילטוניאן), עם ערכים עצמיים: E_3, E_2, E_1, בהתאמה.

א. עבור המקרה שבו המערכת הקוונטית נמצאת במצב שמתואר על ידי פונקציית הגל הבאה: $\psi=\frac{3i}{4}\phi_1+\frac{2}{4}\phi_2+\frac{\sqrt{3}i}{4}\phi_3$.
חשבו את ההסתברות שבמדידה של אנרגיית המערכת, נקבל שאנרגיית המערכת שווה ל- E_1.

ב. מצאו את הערכים העצמיים: E_3, E_2, E_1, ואת הווקטורים העצמיים (המצבים העצמיים): ϕ_3, ϕ_2, ϕ_1, של ההמילטוניאן.

מוסיפים הפרעה קבועה וחלשה $\hat{V}$ (שפועלת במידה שווה על כל אחד ממצבי האנרגיה של ההמילטוניאן הלא מופרע) שמתוארת על ידי המטריצה:

$$\hat{V}=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר ε מייצג קבוע בעל יחידות של אנרגיה שיכול להיות מספר ממשי חיובי או שלילי.

ג. רשמו את התנאי שהקבוע ε חייב לקיים בכדי שנוכל להשתמש בתורת ההפרעות למציאת התיקונים למצבי האנרגיה של המערכת הקוונטית.

ד. מצאו את התיקון מסדר ראשון לאנרגיית של הרמה המעוררת הראשונה.

ה. מצאו את התיקון מסדר ראשון לפונקציית הגל של הרמה המעוררת הראשונה. כלומר, מצאו את התיקון מסדר ראשון לווקטור העצמי שמתאים לאנרגיית רמת היסוד.

3) אוסילטור הרמוני עם הפרעה

הניחו אוסילטור הרמוני המתואר על ידי הפוטנציאל הבא:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\left(\omega_0+\delta\omega\right)^2x^2$$

כאשר, $\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)<<1$.

א. מצאו את האנרגיות החדשות באופן מדויק (טריוויאלי במקרה זה) ורשמו את האנרגיות כטור חזקות של $\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$.

ב. מצאו את התיקון מסדר ראשון וסדר שני באנרגיה לפי תורת ההפרעות. השוו את התוצאה לסעיף א'.

רמז: אין צורך להשתמש באינטגרלים בבעיה זו.

תשובות סופיות:

1) א. $E_n^{(1)}=V_0$ ב. $E_n^{(1)}=\frac{V_0}{2}$

2) א. $P\left(E_1\right)=\frac{q}{16}$ ב. $\left(1,0,0\right)\to E_0\ ,\ \left(0,1,0\right)\to 0\ ,\ \left(0,0,1\right)\to -E_0\ ,$

ג. $\left|\varepsilon\right|<<E_0$ ד. $E_2^{(1)}=0$ ה. $\psi_2^{(1)}=\frac{\varepsilon}{E_0}\left(-\phi_1+\phi_3\right)$

3) א. $E_n^{'}=\hbar\left(\omega_0+\delta\omega\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$

ב. $E_n^{(1)}=\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)+\frac{\hbar\omega_0}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2$

ג. $E_n^{(2)}=-\frac{1}{2}\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2+\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^4\right]$

אם סוכמים את סך התיקון לסדר שני $\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2$ אז הוא מתאפס.