

# מתמטיקה לביולוגים א

פרק 20 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

תוכן העניינים

1. חישוב שטחים.....1
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y.....10
3. אורך קשת.....11

## חישוב שטחים

## חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$  :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :



$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$  :



$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

## שאלות



- (1) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו-  $g(x) = x - 6$ .  
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.



- (2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7 - x^2$ .  
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.



- (3) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$ .



- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$ .  
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  מעבירים משיק.  
א. מצאו את משוואת המשיק.  
ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .  
ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = kx - x^2$ .  
הישר  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.  
ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות החיתוך הוא  $x = 9$ .  
א. מצאו את ערך הפרמטר  $k$ .  
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.  
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$  (השטח המסומן).

6 הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,



היא  $f'(x) = 3 - 2x$ . ישר AB, שמשוואתו  $y = 6$ ,

חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות A ו-B.

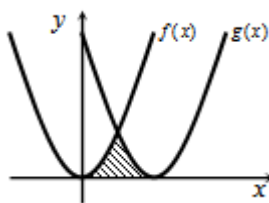
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,

כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- $x$  של הנקודה A הוא 4.

א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ .



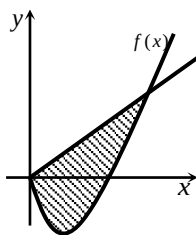
7 באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה  $f(x) = x^2$ ,

את גרף הפונקציה  $g(x)$ , בנקודה שבה  $x = 2$ .

הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא  $g'(x) = 2x - 8$ .

א. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$  (המסומן).



8 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $y = 2x$ .

נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 2x - 6$ ,

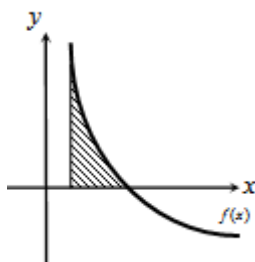
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

בנקודה שבה ערך ה- $y$  הוא 16.

א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



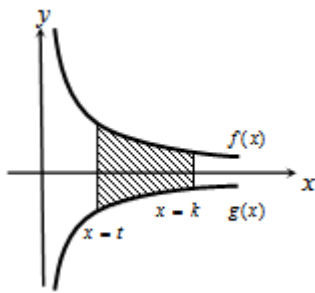
9 גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$  ( $a$  קבוע)

חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(6, 0)$ .

א. מצאו את  $a$  וכתוב את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והישר  $x = 2$ .



10 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad \text{ו-} \quad g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$$

העבירו שני ישרים  $x=k$  ו- $x=t$ , אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי  $AB = 2CD$ .

א. הראו כי  $k = 4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים  $x=k$  ו- $x=t$ ,

הוא  $S = 12$ .

מצאו את  $t$ .



11 הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$ .

בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

$$\text{אם } f(5) = 0, f(0) = -4, f(2) = 6$$

וכן  $f(10) > 0$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה  $x = 2$ .



12 להלן גרף הפונקציה  $f'(x)$ .

הגרף המתואר חותך את ציר ה- $x$

בנקודה אחת בלבד והיא  $(5, 0)$ .

א. מצאו את התחומים שבהם  $f'(x)$  חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$

שלה הוא  $-2$ .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 8$ .

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.



13 הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$  מתוארת באיור.

א. האם ל- $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

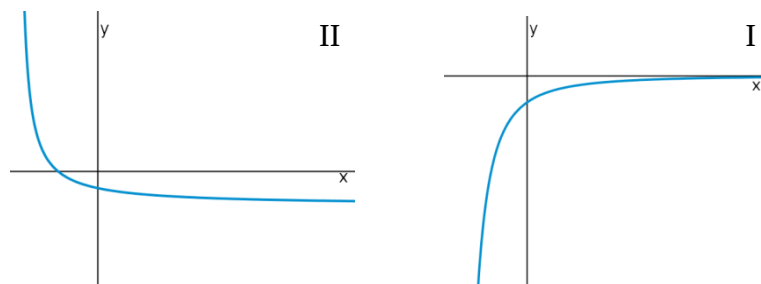
אם ידוע כי  $f(3) = 4$  וכי היא חותכת את

ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -5$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.

14 באיורים שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ :



א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון כי  $f(10) = -3$  וכי  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ .

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

15 נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$ :



א. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ , בתחום  $-4 \leq x \leq 7$ ,

לפי הנתונים  $f(0) = -2$ ,  $f(-2) = 7.6$  ו- $f(6) = -606.8$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע הרביעי.

## פונקציות מעריכיות

## אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות

| אינטגרלים יסודיים                     | אינטגרלים של פונקציות מורכבות                           |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$               | $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$             |



16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ .

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה:  $\left(1, \frac{e^3+1}{4e^2}\right)$ .

א. מצאו את  $a$  וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

והישר  $y = 0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$

והאנך  $x = 2$ .



17 ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה  $y = e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של

הפונקציות  $f(x) = xe^x$ ,  $g(x) = -e^x$ .

העבירו ישר  $x = a$ ,  $(a > 0)$  החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$  והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .

מצאו את  $a$ .

## פונקציות לוגריתמיות

## אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות

| אינטגרל יסודי                      | אינטגרל של פונקציה מורכבת                            |
|------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$ | $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$ |



18) באיור שלהלן נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו-  $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ , בתחום  $x < 0$ .

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה  $x = 3$ .

- מצאו את  $a$  וכתבו את שתי הפונקציות.
- חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .



19) נתונות הפונקציות  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו-  $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה  $y = 0.4$ .

- מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .
- מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
- חשבו את השטח המוגבל על ידי שני הגרפים והישר  $x = -1$ .

## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מיידיים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל יסודי                                                                                   | אינטגרל של פונקציה מורכבת                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$ | $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה:  $\frac{m}{n} \neq -1$ .



- 20** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$ .
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



- 21** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ .
- העבירו אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
  - מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_2$  וב- $S_1$  ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$ .
  - מצאו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .



- 22** באיור שלהלן נתונים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  ו- $g(x) = 2 - \sqrt[6]{x}$ .
- מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.
  - חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $57\frac{1}{6}$  יח"ש. (2)  $21\frac{1}{3}$  יח"ש. (3)  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (4) א.  $y = -4x + 4$  ב.  $(1, 0)$  ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (5) א.  $k = 10$  ב.  $(1, 9)$  ג.  $81\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (6) א.  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$  ב.  $27\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (7) א.  $g(x) = (x - 4)^2$  ב.  $5\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (8) א.  $f(x) = x^2 - 6x$  ב.  $(0, 0)$  ג.  $85\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (9) א.  $a = 36$ ,  $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$  ב. 8 יח"ש.
- (10) א. הוכחה ב.  $t = 1$
- (11) א. 10 יח"ש.
- (12) א. חיובית:  $x > 5$ , שלילית:  $x < 5$ . ב. עולה:  $x > 5$ , יורדת:  $x < 5$ . ג.  $\min(5, -2)$  ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.
- (13) א. לא. הנקודה  $(3, 0)$  היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה. ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.
- (14) א.  $f(x): \mathbb{II}$ ,  $f'(x): \mathbb{I}$  ב. 1 יח"ש.
- (15) א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (16) א.  $a = -2$ ,  $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$  ב. 1.52
- (17) א.  $y' = xe^x$  ב.  $a = 2$
- (18) א.  $a = 2$ ,  $g(x) = \frac{1}{x-2}$ ,  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  ב.  $S = 1.76$  יח"ש.
- (19) א.  $g(x) = \frac{2}{2x+5}$  ב.  $(-2, 2)$  ג.  $S = \ln 5 \approx 1.674$  יח"ש.
- (20) א.  $(0, 0)$ ,  $(8, 0)$  ב.  $S = 16$  יח"ש.
- (21)  $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (22) א.  $(1, 1)$  ב.  $S = \frac{11}{28}$  יח"ש.

## חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

### שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $y^2 = -x$  והישר  $y = x + 6$ .

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $x = y^2 + 2$  והישר  $y = x - 8$ .

### תשובות סופיות

(1)  $20\frac{5}{6}$

(2)  $20\frac{5}{6}$

## אורך קשת

### שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad (8)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$