

מתמטיקה לפיזיקאים 1

פרק 23 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

1. חישוב נפח גוף-סיבוב..... 1
2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב..... 4
3. חישוב נפח גוף כללי..... 5

חישוב נפח גוף-סיבוב

שאלות

(1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x - 1$ מסתובב סביב ציר ה- x .
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x - 1$ מסתובב סביב ציר ה- y .
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 1 - x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.
מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות 3-8:



- (3) ציר ה- x .
(4) הישר $y = -1$.
(5) הישר $y = 2$.
(6) ציר ה- y .
(7) הישר $x = -1$.
(8) הישר $x = 2$.

(9) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(10) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

(11) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



(12) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = \sin(x^2)$

והישרים $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $y = 0$

מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



(13) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = e^{x^2}$

והישרים $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



(14) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x \ln x$

המשיק לגרף בנקודה (e, e) וציר ה- x ,

מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו נפח הגוף המתקבל?

(15) השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 8$, $x = 0$

מסתובב סביב הישר $x = 4$.

מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \text{ א. } \quad \frac{64}{15}\pi \text{ ב. } \quad \text{(1)}$$

$$\frac{8}{3}\pi \text{ א. } \quad \frac{8}{3}\pi \text{ ב. } \quad \text{(2)}$$

$$\frac{9\pi}{14} \quad \text{(3)}$$

$$\frac{15\pi}{7} \quad \text{(4)}$$

$$\frac{33\pi}{14} \quad \text{(5)}$$

$$\frac{3\pi}{5} \quad \text{(6)}$$

$$2.1\pi \quad \text{(7)}$$

$$\frac{12\pi}{5} \quad \text{(8)}$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \quad \text{(9)}$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \quad \text{(10)}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{(11)}$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \quad \text{(12)}$$

$$\pi(e-1) \quad \text{(13)}$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \quad \text{(14)}$$

$$128\pi \quad \text{(15)}$$

חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

שאלות

- (1) הפונקציה $y = \sqrt{4-x^2}$, עבור $-1 \leq x \leq 1$, מסתובבת סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?
- (2) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.
- (3) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.
- (4) הפונקציה $x = \sqrt{9-y^2}$, עבור $-2 \leq y \leq 2$, מסתובבת סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

תשובות סופיות

- (1) 8π
- (2) $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$
- (3) $S = 4\pi R^2$
- (4) 24π

חישוב נפח גוף כללי

שאלות

(1) מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו a .



(2) חשבו את נפחה של פירמידה, שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).

תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$