# מתמטיקה 2

## פרק 9 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

### תוכן העניינים

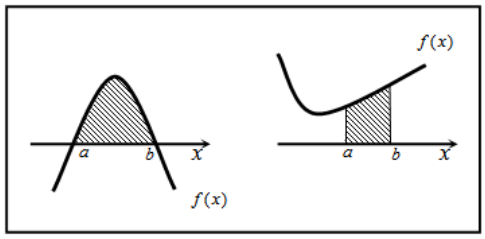
1. חישוב שטחים ..... 1
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y ..... 10
3. אורך קשת ..... 11

# חישוב שטחים

## חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

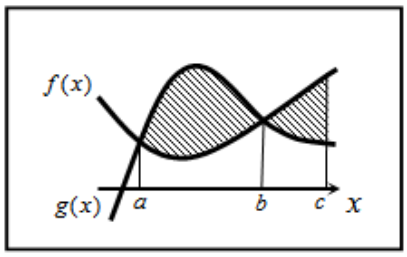
1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



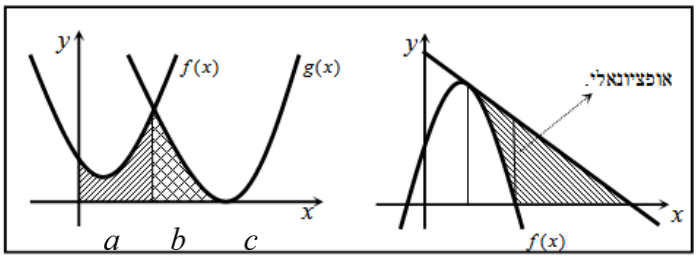

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני:

$$S_1=\int_a^b\big(g(x)-f(x)\big)\,dx$$
$$S_2=\int_b^c\big(f(x)-g(x)\big)\,dx$$
$$S=S_1+S_2$$




3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :

$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

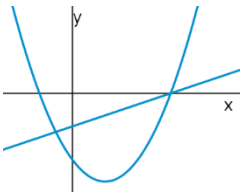




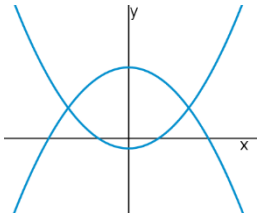
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## שאלות

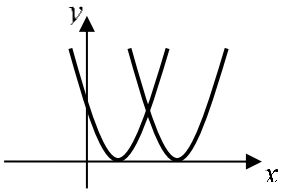
**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.




**2)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-1\ ,\ g(x)=7-x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.




**3)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1\ ,\ g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.

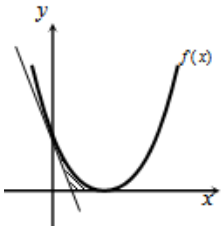



**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ מעבירים משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

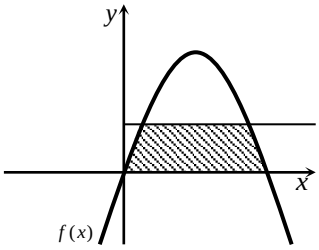



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- $x$ של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.

א. מצאו את ערך הפרמטר $k$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

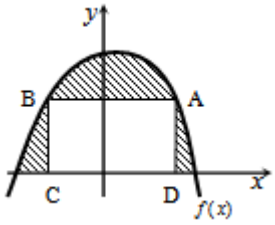
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ (השטח המסומן).





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

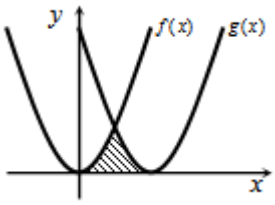
**6)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,
היא $f'(x)=3-2x$ . ישר AB, שמשוואתו $y=6$ ,
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא 4.




א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ .

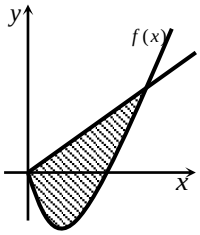
**7)** באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ,
את גרף הפונקציה $g(x)$ , בנקודה שבה $x=2$ .
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$ .




א. מצאו את הפונקציה $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$ (המסומן).

**8)** באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$ .
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$ ,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- $y$ הוא 16.

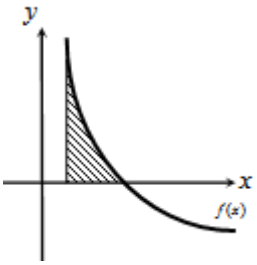



א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

**9)** גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ( $a$ קבוע)
חותך את ציר ה- $x$ בנקודה $(6,0)$ .

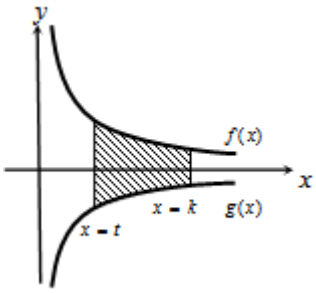



א. מצאו את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והישר $x=2$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

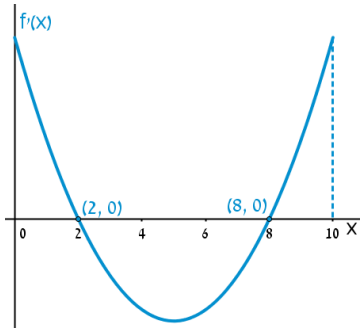



העבירו שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.
ידוע כי $AB=2CD$.

א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$.
מצאו את $t$.

**11)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

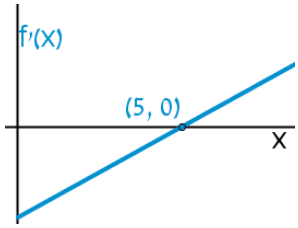



בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$ וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת והצירים** בריבוע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.

**12)** להלן גרף הפונקציה $f'(x)$.




הגרף המתואר חותך את ציר ה- $x$ בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

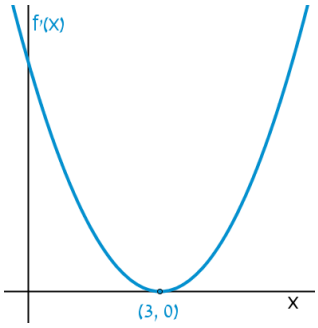
ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- $y$ שלה הוא $-2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $y$ כאשר $y=8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור.

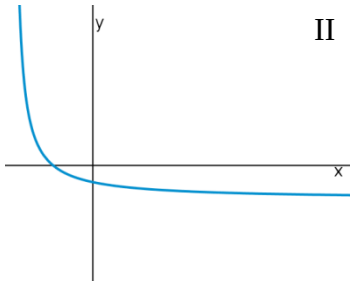


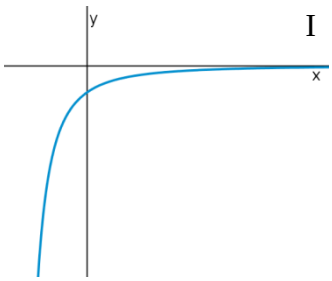

א. האם ל-$f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את
ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$
והצירים ברביע הראשון.

**14)** באיורים שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

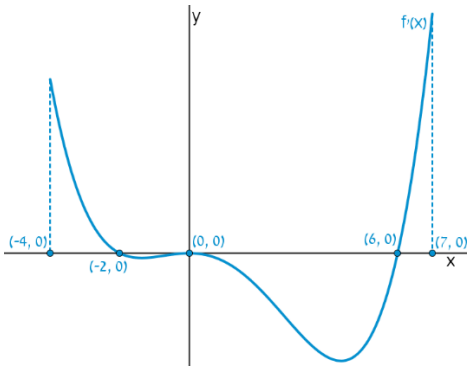



א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

**15)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:




א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-4\le x\le 7$,
לפי הנתונים $f(0)=-2$, $f(-2)=7.6$ ו-$f(6)=-606.8$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה-$x$ ברביע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה-$x$ ברביע הרביעי.

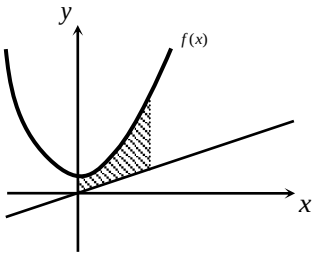

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

| אינטגרלים של פונקציות מורכבות | אינטגרלים יסודיים |
|---|---|
| $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$ | $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$ |
| $\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$ | $\int e^{x}dx=e^{x}+c$ |

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.




ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

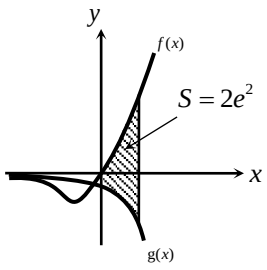
א. מצאו את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y=0.1x$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה-$y$ והאנך $x=2$.

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$, $f(x)=xe^x$.




העבירו ישר $x=a$ $(a>0)$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-$y$ והישר.
ידוע כי שטח זה שווה ל-$2e^2$.
מצאו את $a$.

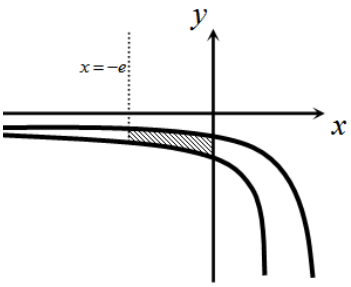

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות לוגריתמיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ |

**18)** באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$ ו- $g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.

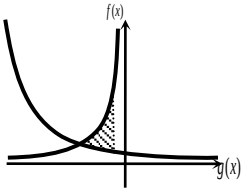



ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את שתי הפונקציות.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$ והישר $x=-e$.

**19)** נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.




גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- $y$ בנקודה $y=0.4$.

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי שני הגרפים והישר $x=-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

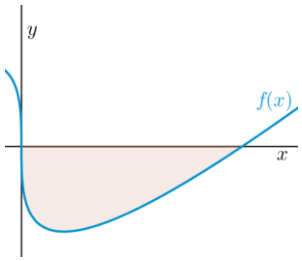
## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

### אינטגרלים מיידים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ | $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n}\neq -1$.

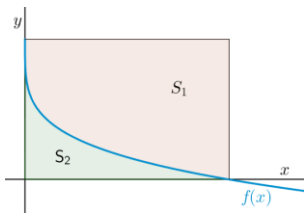
**20)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

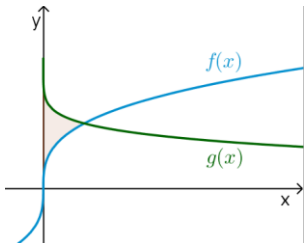
**21)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.




העבירו אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב-$S_1$ ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-$S_2$.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

**22)** באיור שלהלן נתונים הגרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו-$f(x)=\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-$y$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $57\frac{1}{6}$ יח"ש. **2)** $21\frac{1}{3}$ יח"ש. **3)** $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**4)** א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**5)** א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

**6)** א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

**7)** א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**8)** א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

**9)** א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

**10)** א. הוכחה ב. $t=1$.

**11)** ב. 10 יח"ש.

**12)** א. חיובית: $x>5$ , שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$ , יורדת: $x<5$

ג. $\min(5,-2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.

**13)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.

ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.

**14)** א. $f'(x)$: I , $f(x)$: II ב. 1 יח"ש.

**15)** א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**16)** א. $a=-2$ , $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

**17)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**18)** א. $a=2$ , $g(x)=\frac{1}{x-2}$ , $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

**19)** א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

**20)** א. $(0,0)$, $(8,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

**21)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**22)** א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

## שאלות

**1)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

**2)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

## תשובות סופיות

**1)** $20\frac{5}{6}$

**2)** $20\frac{5}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורך קשת

## שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

## תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©