# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 8 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

תוכן העניינים


1. חישוב שטחים ..... 1

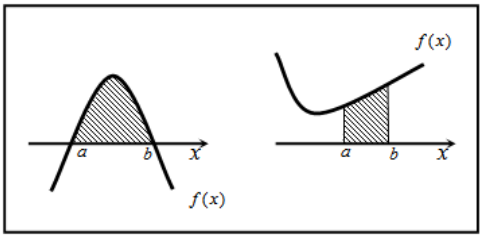
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y ..... 21

3. אורך קשת ..... 22

# חישוב שטחים

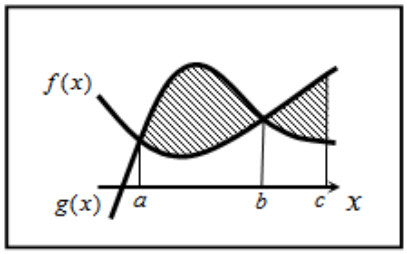
## חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :




$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני:

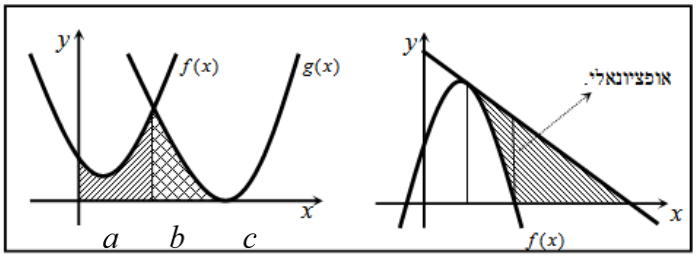



$$S_1=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$S_2=\int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$S=S_1+S_2$$

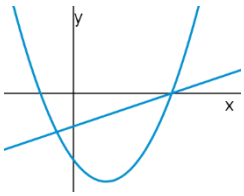
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :



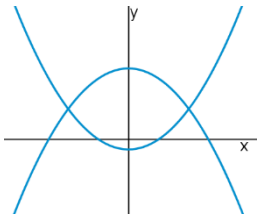

$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



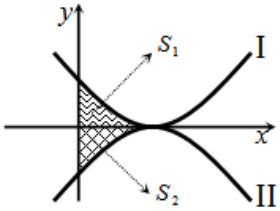

**2)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-1$ , $g(x)=7-x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



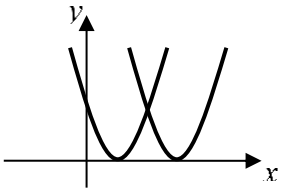

**3)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.

א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- $S_1$ ו- $S_2$, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.




**4)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1$ , $g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.

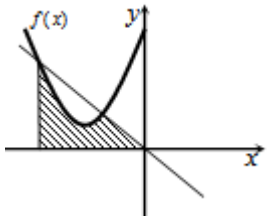



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$ , כמתואר באיור.

א. מצאו את משוואת הישר.

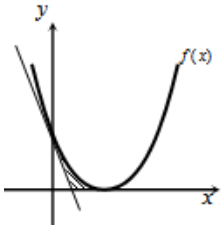
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והישר $x=-4$.





כתב ופתר – גיא סלומון ©

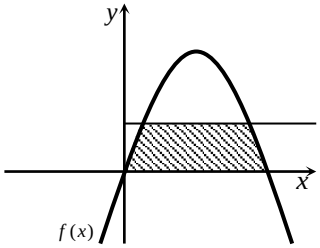



**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ .
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

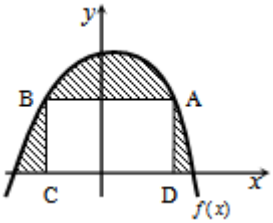



**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$ .
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- $x$ של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$ .

א. מצאו את ערך הפרמטר $k$ .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

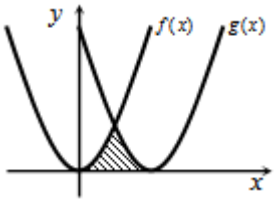
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ (השטח המסומן).




**8)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,
היא $f'(x)=3-2x$ . ישר AB, שמשוואתו $y=6$
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא $x=4$ .

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ (השטח המסומן).



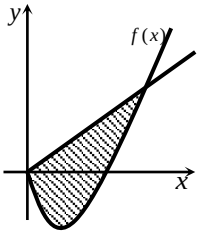

**9)** באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$ , בנקודה שבה $x=2$ .
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$ .

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$ (השטח המסומן).


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.



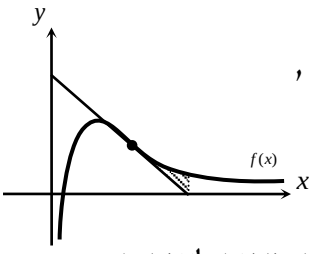

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- $y$ הוא $y=16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

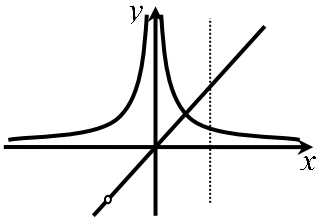
**11)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

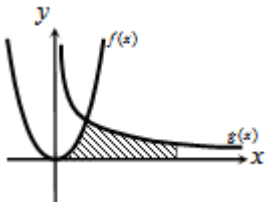
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$.

**12)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.




חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- $x$.

**13)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

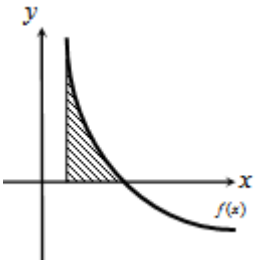



$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ ($a$ קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=4$.

**14)** גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע)




חותך את ציר ה- $x$ בנקודה $(6,0)$.

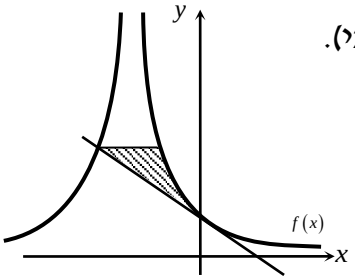
א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והישר $x=2$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$, הוא $-\frac{1}{9}$.




א. מצאו את ערך הפרמטר $A$.

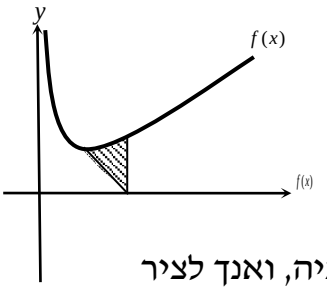
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

**16)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

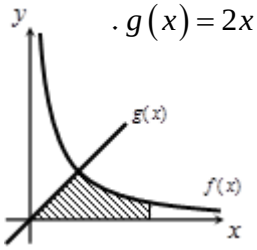



א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- $x$.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- $x$, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

**17)** באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=2x$.



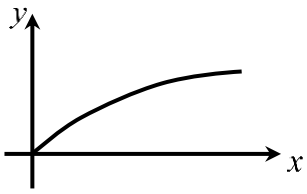

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=9$.

**18)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- $y$.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.




לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

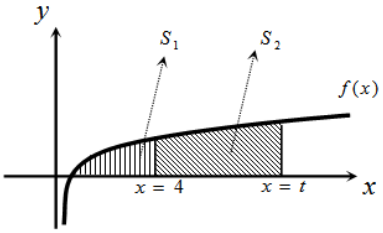
נעביר שני אנכים לציר ה- $x$, $x=4$ ו- $x=t$ (כאשר $t>4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ ב- $S_1$,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והאנכים ב- $S_2$.

ידוע כי $8S_1=S_2$.

מצאו את $t$.




**21)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

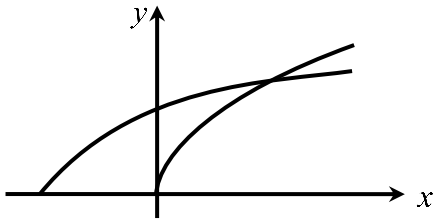
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ ואנך לציר ה- $x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**22)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- $x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.




**23)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

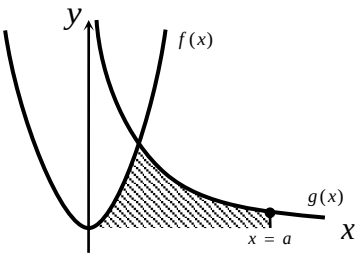
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- $x$ והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.

מצאו את $a$.



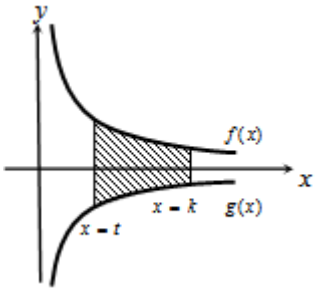


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי $AB=2CD$.

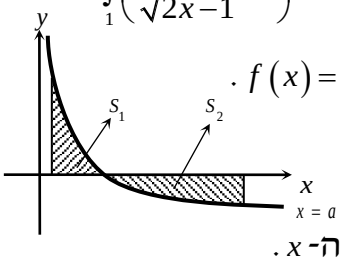



א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$.
מצאו את $t$.

**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$ יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

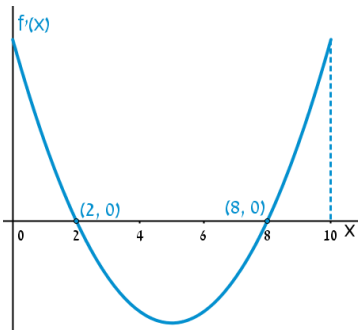



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.
נעביר שני אנכים לציר ה- $x$, $x=1$ ו-$x=13$,
כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו- $S_2$.
מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והאנך $x=1$, כלומר את $S_1$.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח $S_2$.
נמקו.



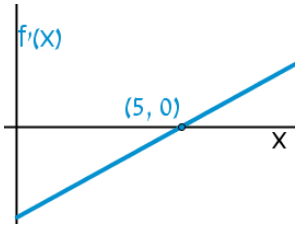

**26)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.
בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$,
וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים
ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** להלן גרף הפונקציה $f'(x)$ , אשר חותך את ציר ה- $x$ בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.




א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

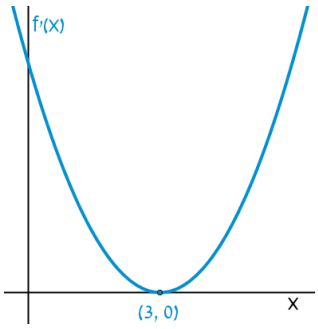
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ .

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$ שלה הוא $y=-2$ .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $y$ כאשר $y=8$ .

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

**28)** באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$ .

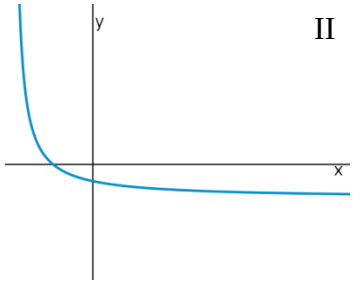


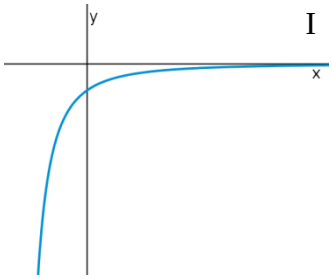

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי $f(3)=4$ , וכי היא חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-5$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

**29)** באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ :



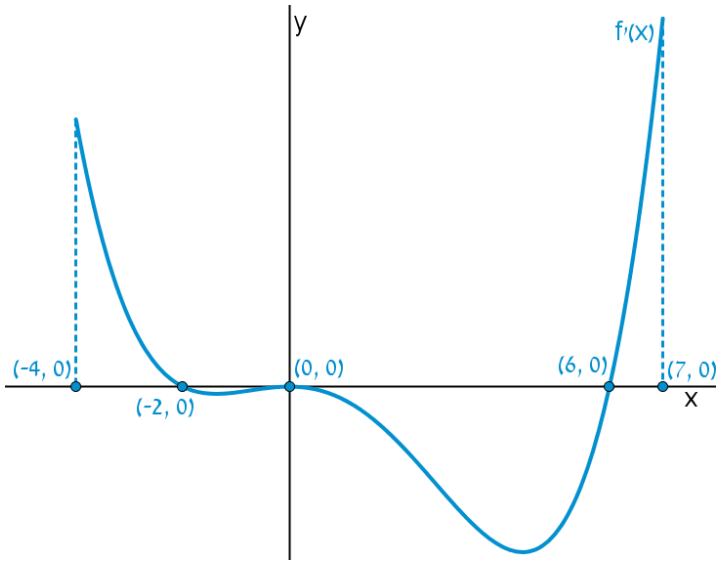




א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$ , וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-2$ .
מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ , הצירים והישר $x=10$ ?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**30)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ :




א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$,

לפי הנתונים $f(0)=-2$ , $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ ברביע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ ברביע הרביעי.

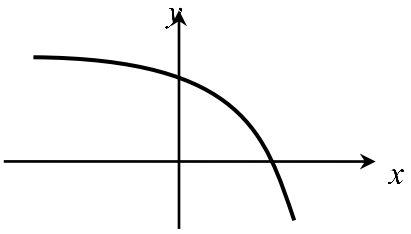

כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

| אינטגרלים יסודיים | אינטגרלים של פונקציות מורכבות |
|---|---|
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$ | $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$ |

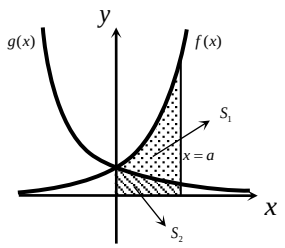
**31)** נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$.
ניתן להשאיר $e$ ו- $\ln$ בתשובה.




**32)** נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
וציר ה- $y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.

**33)** נתונות הפונקציות $g(x) = e^{-x}$ ו- $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$ חותך את הפונקציה $f(x)$,
ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- $x$, כך שנוצר מלבן.
הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

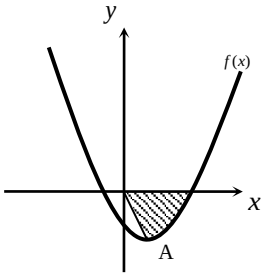
**34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
נעביר אנך לציר ה- $x$ את הישר $x = a$,
כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.
ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.
מצאו את $a$.





כתב ופתר – גיא סלומון ©

**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$ .




הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

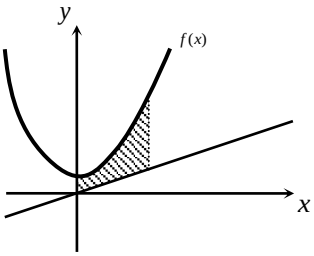
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.7$ .

**36)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$ .




ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$ .

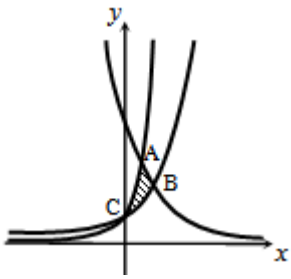
א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ , והישר $y=0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$ והאנך $x=2$ .

**37)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$

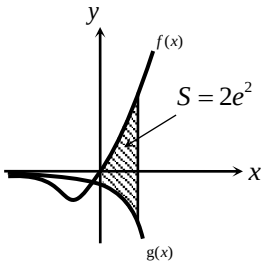



א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.

**38)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$ .

נעביר ישר $x=a$ , כאשר $a>0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .

מצאו את $a$ .

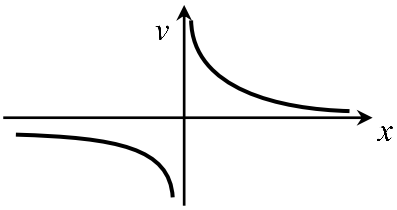

כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות לוגריתמיות

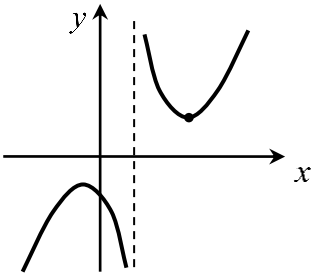
### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|---|---|
| $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ | $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ |

**39)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



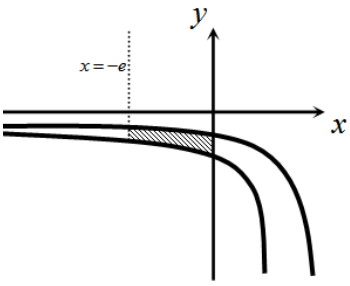

**40)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה-$x$ העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.




**41)** באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$ ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את שתי הפונקציות.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-$y$ והישר $x=-e$.

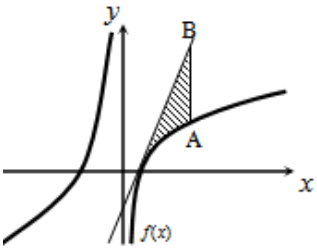




כתב ופתר – גיא סלומון ©

**42)** נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ היא $y=18x-9$.




א. מצאו את $a$ ו- $b$ וכתבו את הפונקציה.

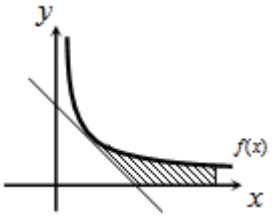
נעביר ישר המקביל לציר ה- $y$, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**43)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.

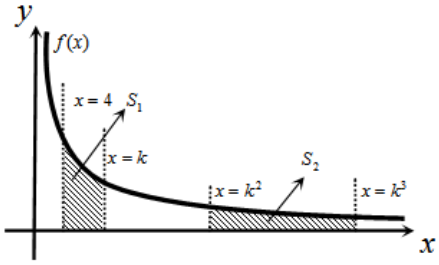



א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$ והישר $x=e^2$.

**44)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.

נעביר את הישרים $x=k$, $x=k^2$, $x=k^3$ ו- $x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.



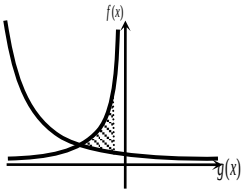

א. הביעו באמצעות $k$ את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.

ב. הראו כי ההפרש $S_2-S_1$ אינו תלוי ב- $k$, וחשבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$.
מצאו את $k$.

**45)** נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=0.4$.



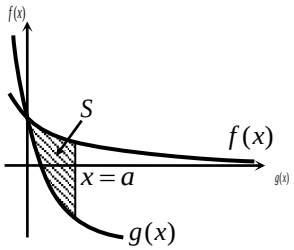

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**46)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$,
בתחום $x\ge 0$.

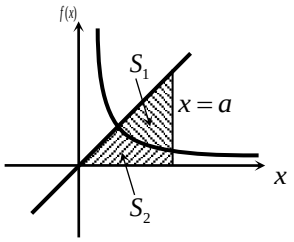



א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- $x$, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור).
מצאו את ערכו של $a$, עבורו מתקיים $S=4$.

**47)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.




נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של $a$, עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- $a$ שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\dfrac{S_1}{S_2}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

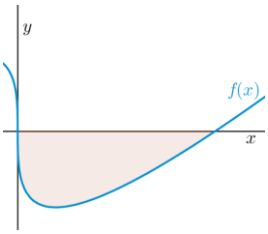
## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

### אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ | $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n}\neq -1$.

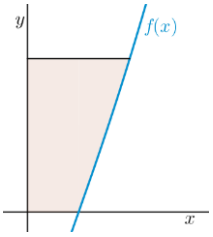
**48)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

**49)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

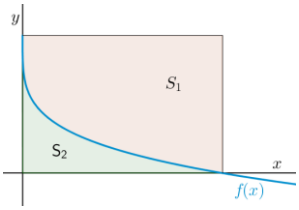



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ג. נעביר אנך לציר ה- $y$ מהנקודה $(4,6)$.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

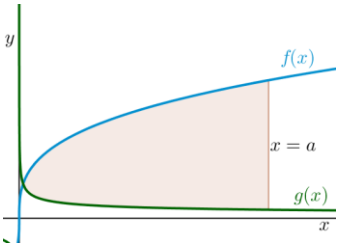
**50)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.




נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_1$,
ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

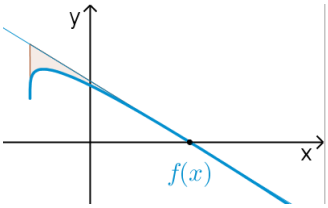
**51)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$ ($a$ פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש.
מצאו את $a$.

**52)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, $a$ פרמטר.
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=2$.




א. מצאו את הפרמטר $a$ וכתבו את הפונקציה.

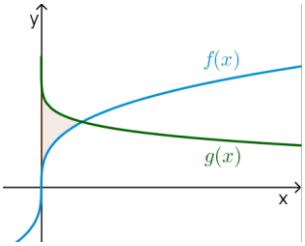
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

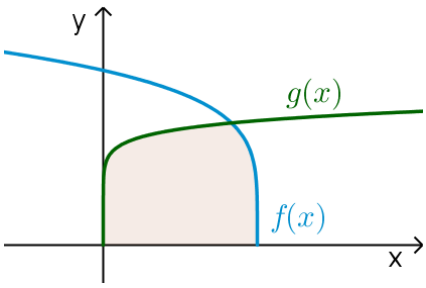
**53)** באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$.

**54)** הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.2$.

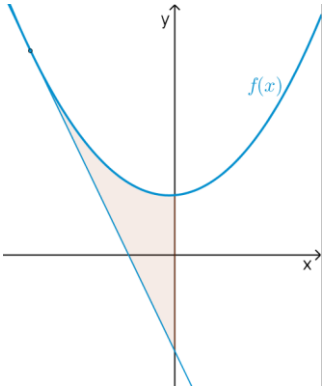



א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- $x$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

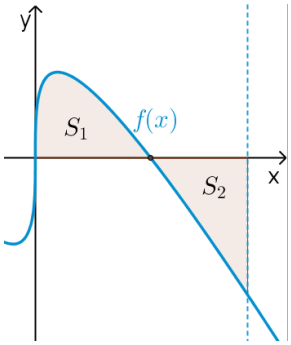
**55)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$ .




א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .

**56)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$ .




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ יסומן ב- $S_1$ .
נעביר ישר $x=k$ , אשר יוצר את השטח $S_2$ , כמתואר באיור.
מצאו את $k$ , אם ידוע כי $S_1=S_2$ .


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) א. $f(x)=\text{I}$ , $g(x)=\text{II}$ ב. שאלת הוכחה.

4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

6) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

7) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

10) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

12) 1 יח"ש.

13) א. $a=32$ , $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

14) א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

15) א. $\text{A}=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

16) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

17) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

18) 2.26 יח"ש.

19) 0.5 יח"ש.

20) $t=16$

21) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

22) $b=2$

23) $a=9$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

**25)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

**26)** ב. 10 יח"ש.

**27)** א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

**28)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

**29)** א. $f'(x):\mathrm{I}$, $f(x):\mathrm{II}$ ב. 1 יח"ש.

**30)** א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**31)** $S=0.192$ יח"ש.

**32)** $b=2$

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** $a=\ln 2$

**35)** א. $\mathrm{A}(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

**36)** א. $a=-2$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

**37)** ב. $\mathrm{C}(0,1)$, $\mathrm{B}\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$, $\mathrm{A}(1,4)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

**38)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**39)** $S=\ln 4$ יח"ש.

**40)** $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

**41)** א. $a=2$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

**42)** א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\dfrac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. 11.54 יח"ש. $S=6+\ln 256\approx$

**43)** א. $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

**44)** א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

**45)** א. $g(x)=\dfrac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

**46)** ב. $a=2$

**47)** א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\dfrac{S_1}{S_2}=5.955$

**48)** א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

**49)** א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**50)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**51)** א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

**52)** א. $a=1$ , $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

**53)** א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

**54)** א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

**55)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

**56)** א. כל $x$. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים ביחס לציר ה-$y$

## שאלות

**1)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

**2)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

## תשובות סופיות

**1)** $20\frac{5}{6}$

**2)** $20\frac{5}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורך קשת

## שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

## תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ (Decimal: 3.16784)


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©