מבוא למשוואות דיפרנציאליות ופונקציות מרוכבות

פרק 6 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

1. בעיות גדילה ודעיכה 1
2. בעיות בגיאומטריה אנליטית 3
3. עקומות אורתוגונליות 5
4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום 6
5. בעיות שונות 7

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.
ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.

א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?

ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?

ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?

*הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).

2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית.
בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים,
ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.

א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.

ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת),
היו בעיר 550 אלף תושבים.

3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%.
כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש״ח.

א. כמה כסף הפקיד האדם?

ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש״ח?

4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית.
בספירה הראשונית היו 1,000 חיות.
בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר.
מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,
היו בשמורה 2,000 חיות בר.

5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.
ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד,
פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.

א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים,
מכמות התחלתית של 100 גרם?

ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,
מכמות התחלתית של 100 גרם?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע.
בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.

א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?

ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

1) א. 7.28 מיליארד. ב. 3.54 מיליארד. ג. בשנת 2,106.

2) א. 2% ב. 15.92 שנים.

3) א. 4093.65 ₪. ב. 13.41 שנים.

4) 40.77 חודשים.

5) א. 88.69 גרם. ב. 19,188 שנים.

6) א. 3.04 שבועות. ב. 14.6 שבועות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות גיאומטריות

שאלות

1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x,y) על העקום, שווה ל- $-\frac{x}{y}$.
מצאו את משוואת העקום.

2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

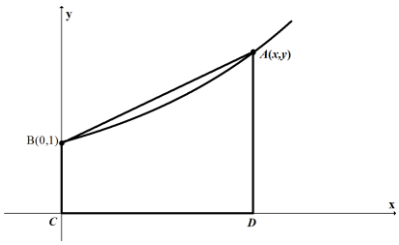
3) מצאו את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

4) תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:
נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2,4)$.
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x,y)$ שעליו,
ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים,
שווה לשיעור ה- y של הנקודה A.

5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3,4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x,y) שבין נקודה זו וציר ה- x, נחצה על ידי ציר ה- y.
מצאו את משוואת עקום זה.

7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.
בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציור.
מהי משוואת העקום?



8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1,3)$,
ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x,y) שווה ל- $-\left(1+\frac{y}{x}\right)$.
מצאו את משוואת העקום.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,
ושבכל נקודה (x,y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2-x^2}$.

10) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה-y, המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x,y)$ והקטע OM, מהראשית O ל-M, הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN
(כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה-y).
ציירו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

1) $x^2+y^2=k$

2) $x^2+y^2=k$

3) $y^2=ax$

4) $y=2xe^{x-2}$

5) $y=4\pm\sqrt{25-(x-3)^2}$

6) $2x^2+y^2=k$

7) $y=2e^{x^2/4}-1$

8) $2xy+x^2=7$

9) $x^3-3y^2x=11$

10) $2=y+\sqrt{y^2+x^2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות **1-4**:

1) $2\ln x+\ln y=c$

2) $xy=c$

3) א. $x^2+2y^2=c$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2+2y^2=9$,
בנקודה $(1,2)$ שעליה.

4) $x^2+y^2=cx$

5) מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של $45°$
עם משפחת המעגלים $x^2+y^2=c$.

תשובות סופיות

1) $2\ln x+\ln y=c$

2) $y^2-x^2=k$

3) $y=2x^2$, $y=ax^2$

4) $y=m(x-c)^2 \quad y>0$

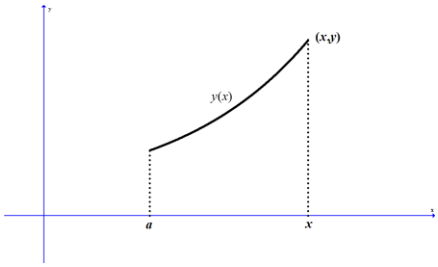
5) $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

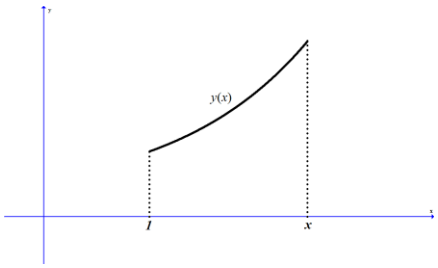
בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

שאלות

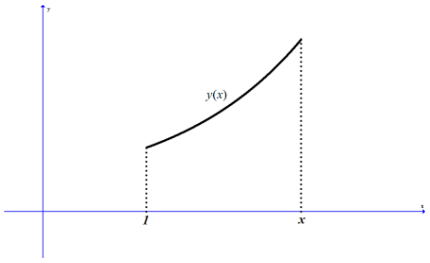
1) שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-x, $x=a$, ו-x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת
בין הנקודות $(a,y(a))$ ו-$(x,y(x))$.
מצאו את משוואת העקום.



2) שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-x, $x=1$, ו-x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך ששטחו של S שווה ל-$2y(x)$?



3) שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-x, $x=1$, ו-x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך שהשטח של S שווה ל-$y(x)-2$?



תשובות סופיות

1) $y=k\cosh\left(\pm\frac{1}{k}x+C\right)$

2) לא.

3) כן.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות שונות

שאלות

1) בזמן $t=0$, יש במיכל 4 ק״ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים.
נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק״ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.

א. חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.

ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?

2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ״ש.
ברגע $t=0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה.
משקל החותר והסירה הוא 500 ק״ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר v נמדדת במטר/שניה.

א. מצאו את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.

ב. מצאו כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.

ג. מצאו את המהירות הסופית.

3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה.
חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.

א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?

ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?

4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס״מ וגובהו 4 ס״מ. הגליל מלא במים.
ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
נסמן ב-$h(t)$ את גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.

א. רשמו מד״ר עבור גובה פני המים, $h(t)$.
מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?

ב. ידוע כי $k=-2\pi$.
פתרו את המד״ר.
תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס״מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס״מ.

א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t.

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?

6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו R, מתחיל לצאת אוויר.
קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t.
הוכיחו כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.

הערה: בשאלות **5** ו-**6** נדרש ידע בהפרדת משתנים.

תשובות סופיות

1) א. 26.75 ק״ג. ב. 0.942 דקות.

2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.

3) א. $43\frac{1}{3}^\circ$ ב. 1.13 שעות.

4) א. $h(0)=4\ ;\ \pi h'(t)=k\sqrt{h(t)}$ ב. $h=(2-t)^2\ ;\ t=\sqrt{2}+2$

5) א. $R(t)=\frac{12}{2t+3}$ ב. 4.5 שעות.

6) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©