אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 8 - שיטת התמונות-מטעני דמות

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 1

הרצאות ותרגילים:

רקע:

שיטת מטעני דמות היא שיטה למצא פוטנציאל בבעיות בהם יש מוליכים עם התפלגות מטען שאינה אחידה.

השיטה:

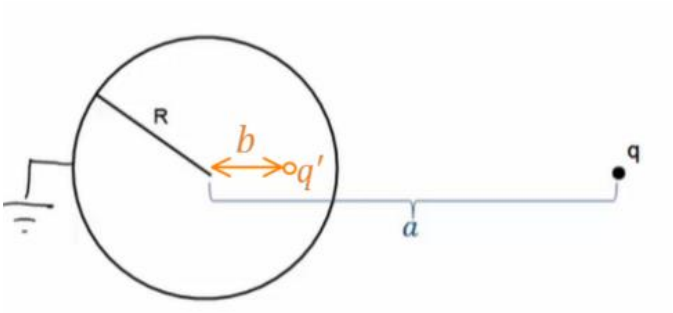
נבנה בעיה מקבילה ללא המוליך .

בבעיה המקבילה נשאיר את אותה התפלגות המטען שיש בתחום בו אנחנו מחפשים את הפוטנציאל.

בתחום הנוסף (שבו אנחנו לא מחפשים את הפוטנציאל) נוסיף מטענים כך שתנאי השפה בבעיה המקבילה יהיו זהים לתנאי השפה בבעיה המקורית.

לפי משפט הקיום והיחידות הפוטנציאל בבעיה המקבילה (בתחום שאנחנו מחפשים) זהה לפוטנציאל בבעיה המקורית.

המקרה של קליפה כדורית ומטען נקודתי:

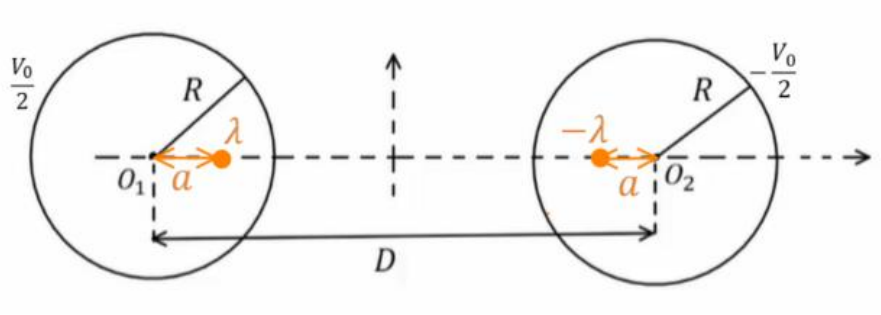


$$q' = -\frac{R}{a}q \qquad b = \frac{R^2}{a}$$

אם הקליפה נמצאת בפוטנציאל V_0 אז נוסיף מטען q'' במרכז הקליפה כך ש:

$$q'' = \frac{V_0 R}{k}$$

המקרה של שני גלילים אינסופיים:

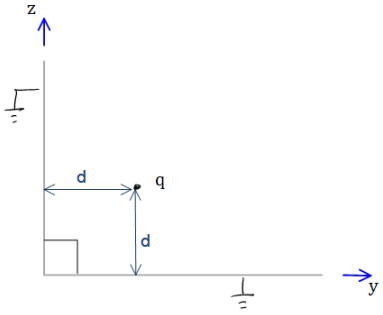


$$\lambda = \frac{\pi\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\frac{D}{2R} + \sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2 - 1}\right)}$$

$$a = \frac{D}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - R}$$

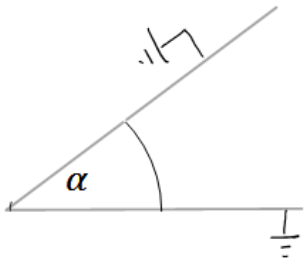
שאלות:

1) לוחות בזווית 90 מעלות



נתונים שני מישורים מוארכים המחוברים בזווית ישרה. במרחק d משני המישורים ממוקם חלקיק בעל מטען q כמתואר בשרטוט.
מצאו את מטעני הדמות שמהם ניתן להסיק את פונקציית הפוטנציאל במרחב.

2) לוחות בזווית אלפה



נתונים שני מישורים מוארכים המחוברים בזווית α. במרחק d משני המישורים ממוקם חלקיק בעל מטען q כמתואר בשרטוט.
מצאו את מטעני הדמות שמהם ניתן להסיק את פונקציית הפוטנציאל במרחב.

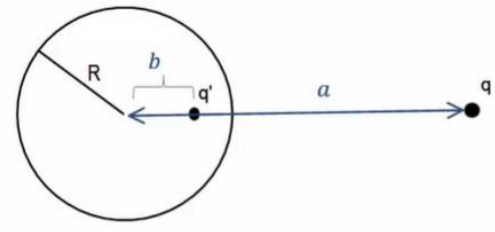
3) מציאת התפלגות המטען על שפת המוליך

נתון מישור אינסופי מוארק.
במרחק z מעל המישור נמצא חלקיק בעל מטען q.
מצאו את התפלגות המטען σ על שפת המישור.

4) כוח ואנרגיה במטעני דמות

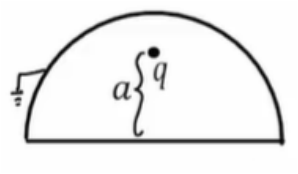
נתון מישור אינסופי מוארק ובמרחק z מעליו נמצא חלקיק בעל מטען q.
מהו הכוח שמרגיש החלקיק?

5) מציאת התפלגות מטען עם ספירה



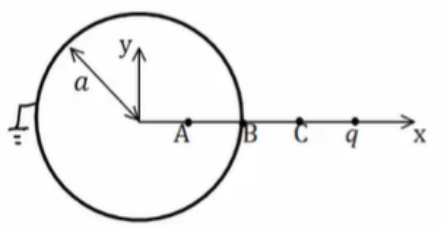
נתונה ספירה מוליכה ומוארקת ברדיוס R. מול הספירה ישנו מטען נקודתי q במרחק a ממרכז הספירה.
מצאו את התפלגות המטען על השפה של הספירה.

6) מטען בתוך חצי ספירה



מטען נקודתי q נמצא בתוך חצי ספירה כדורית, מוארקת ברדיוס R.
המטען נמצא בגובה a מעל מרכז הספירה.
מצאו את מטעני הדמות בעזרתם נוכל לחשב את הפוטנציאל בכל המרחב.

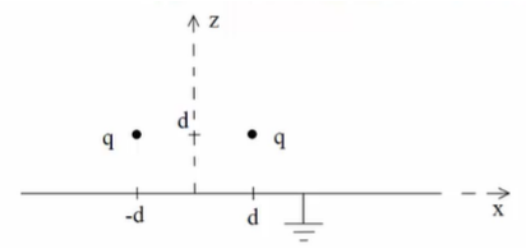
7) ספירה, מטען ושלוש נקודות



קליפה כדורית ברדיוס a מוארקת.
מטען q נמצא במרחק 2a ממרכז הקליפה ועל ציר ה- x כך ש: $x_C=\frac{3a}{2}$, $x_B=a$, $x_A=\frac{a}{2}$.

א. מצאו את הפוטנציאל בנקודות: A , B , C.
ב. מהי התפלגות המטען המשטחית בנקודה B?
ג. מה הכוח הפועל על המטען q?
ד. מהי האנרגיה הדרושה לבניית המערכת?

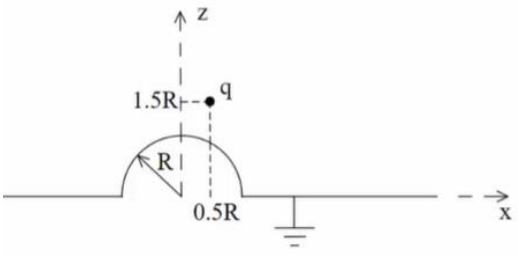
8) שני מטענים מעל מישור



נתונים שני מטענים q במיקומים $(d,0,d)$
ו- $(-d,0,d)$ מעל משטח אינסופי מוארק כבאיור.

א. אילו מטעני שיקוף דרושים כדי לבטא פוטנציאל ושדה ב- $z>0$?
ב. איזה כוח ירגיש המטען הימני (גודל וכיוון)?
יש לנרמל $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}=1$ ולהגיע לתשובה מספרית.
ג. מהי התפלגות המטען על המוליך?
ומהו המטען הכולל על המוליך?
ד. מהי האנרגיה הדרושה לבניית המערכת?

9) מטען מעל חצי ספירה ולא במרכז



נתון חצי כדור מוליך מושלם בעל רדיוס R המונח על חצי מרחב מישור מוליך מושלם, כבאיור.
מעל המוליך יש מטען q בקואורדינטה $(0.5R,0,1.5R)$.

א. מצאו את גודל ומיקום מטעני השיקוף הדרושים בשביל לבטא את הפוטנציאל במרחב שמעל המבנה.

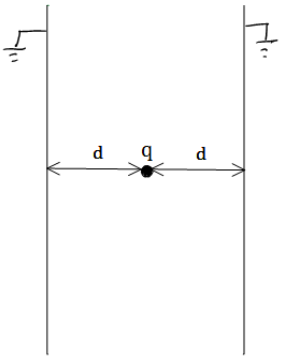
ב. מצאו את הפוטנציאל בנקודות $(0,0,1.5R)$, $(0,0,0.5R)$.

ג. מהי צפיפות המטען המשטחית על שפת המוליך בנקודה $\left(\frac{\sqrt{3}R}{2},0,\frac{R}{2}\right)$?

ד. מה הכוח הפועל על המטען?

ה. מהי האנרגיה הדרושה לבניית המערכת?

10) מטען בין שני לוחות אינסופיים



נתונים שני לוחות אינסופיים מוארקים במרחק 2d זה מזה.
בדיוק באמצע ביניהם ממוקם חלקיק בעל מטען q כמתואר בשרטוט.

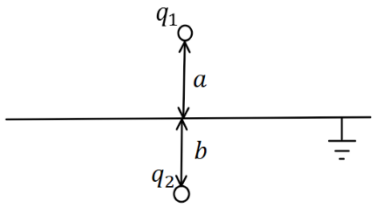
א. מצאו את פונקציית הפוטנציאל במרחב.

ב. מצאו את העבודה הדרושה לבניית המערכת.

11) מטענים משני צידי מישור מוארק

מטען q_1 נמצא במרחק a מעל מישור אינסופי מוארק.

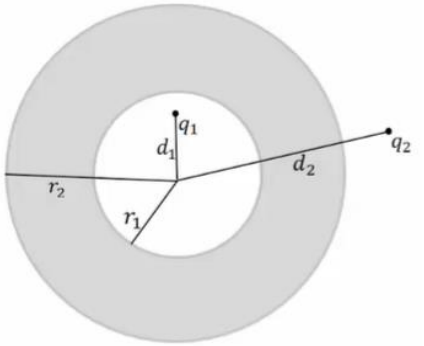
מטען q_2 נמצא במרחק b מתחת למישור.



א. מצאו את השדה והפוטנציאל בכל המרחב.

ב. מהי התפלגות המטען על המישור?
ומהו המטען הכולל על המישור?

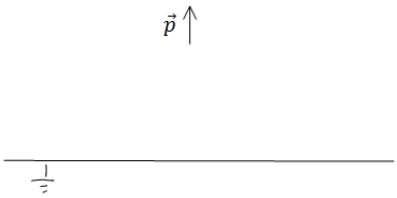
12) קליפה עבה עם מטען בפנים ובחוץ



נתונה קליפה כדורית עבה ומוליכה בעלת רדיוס פנימי r_1 ורדיוס חיצוני r_2.
מטען q_1 נמצא במרחק d_1 ממרכז הקליפה כך ש- $d_1 < r_1$.
מטען q_2 נמצא במרחק d_2 ממרכז הקליפה כך ש- $d_2 > r_2$.
המטענים לא נמצאים על אותו רדיוס.

א. מצאו את הפוטנציאל בו נמצאת הקליפה.
ב. מצאו את הכוח הפועל על המטען q_2.
ג. מהי האנרגיה הדרושה לבניית המערכת?

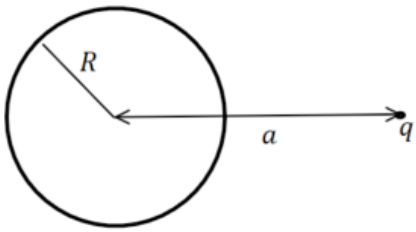
13) דיפול מעל מישור



דיפול מונח במרחק z_0 מלוח אינסופי מוארק.
מומנט הדיפול הוא: $\vec{p} = (0, 0, p)$.

א. מצאו את השדה בכל המרחב.
ב. מצאו את צפיפות המטען על המישור.
ג. מצאו את סך המטען על המישור.

14) ספירה ניטרלית



מטען נקודתי q מונח במרחק a מספירה מוליכה ברדיוס R.
הספירה אינה מוארקת ואינה מחוברת לפוטנציאל כלשהו.
ניתן להניח כי הספירה נייטרלית.
מהו הפוטנציאל על הספירה?
ומהם מטעני הדמות המתאימים לפתרון הבעיה?
רמז: השתמשו בחוק שימור המטען.

תשובות סופיות:

1) $\varphi=\frac{kq}{r_1}-\frac{kq}{r_2}$

2) ראו סרטון.

3) $\sigma=-kq\varepsilon_0\frac{2d}{\left(r^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

4) $F=-\frac{q^2}{\left(2d\right)^2}$

5) $E\left(r,\theta\right)=\frac{kq\left(r-a\cos\theta\right)}{\left(r^2+a^2-2ra\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{-kq\left(r\left(\frac{a}{R}\right)^2-a\cos\theta\right)}{\left(R^2+\left(\frac{ra}{R}\right)^2-2ra\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$

6) ראו סרטון.

7) א. $\varphi_A=\varphi_B=0$, $\varphi_C=\frac{3kq}{2a}$ ב. $\sigma_B=\varepsilon_0\left(-\frac{3kq}{a^2}\right)$ ג. $\vec{F}=\frac{2kq^2}{qa^2}\left(-\hat{x}\right)$

ד. $U=\frac{-kq^2}{6a}$

8) א. $\left(-d,0,d\right)$, $\left(d,0,-d\right)$ ב. $-0.338\hat{z}+0.162\hat{x}$

ג. $\sigma=-\frac{1}{2\pi}qd\left(\frac{1}{\left(\left(x-d\right)^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left(\left(x+d\right)^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$, $Q_T=-2q$

ד. $U=\frac{-kq^2}{\sqrt{2}\cdot 2d}$

9) א. $q_3=\sqrt{\frac{2}{5}}q$, $\vec{r}_3=\left(\frac{R}{5},0,-\frac{3}{5}R\right)$, $q_4=-q$, $\vec{r}_4=\left(0.5R,0,-1.5R\right)$

ב. $\left(0,0,1.5R\right)$: $\varphi\approx 0.71\frac{kq}{R}$, $\left(0,0,0.5R\right)$: 0

ג. $\frac{kq}{R^2}1.04\varepsilon_0$ ד. $\vec{F}=\frac{kq^2}{R^2}\left(-0.2,0,-0.64\right)$ ה. $U=\frac{kq^2}{2R}\left(-0.7\right)$

10) א. $V_T=\frac{k\left(-1\right)^n q}{\left(\left(x-2dn\right)^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ ב. $\frac{kq^2}{2d}\left(-\ln\left(2\right)\right)$

11) א. $E_{up}=\frac{kq_1}{|r_+|^2}\hat{r}_+ +\frac{-kq_1}{|r_-|^2}\hat{r}_-$

ב. $\sigma_T=\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{q_1 a}{\left(r^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{q_2 b}{\left(r^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$

12) א. $\varphi_2\left(r_2\right)=\frac{kq_1}{r_2}+\frac{kq_2}{d_2}$

ב. $\vec{F}=\frac{-k\frac{r_2}{d_2}q_2^2\hat{r}}{\left(d_2-\frac{r_2^2}{d_2}\right)^2}+\frac{k\left(q_1+\frac{r_2q_2}{d_2}\right)q_2\hat{r}}{d_2^2}$

ג. $U=\frac{1}{2}\left[\frac{-k\frac{r_2}{d_2}q_2^2}{\left(d_2-\frac{r_2^2}{d_2}\right)}+\frac{k\left(q_1+\frac{r_2q_2}{d_2}\right)q_2}{d_2}-\frac{kq_1^2\cdot\frac{r_1}{d_1}}{\left(\frac{r_1^2}{d_1}-d_1\right)}+\frac{kq_1^2}{r_2}+\frac{kq_1q_2}{d_2}\right]$

13) א. $\vec{E}_T=\frac{k\left(3p\left(z-z_0\right)r,0,-pr^2+2p\left(z-z_0\right)^2\right)}{\left(r^2+\left(z-z_0\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}+\frac{k\left(3p\left(z+z_0\right)r,0,-pr^2+2p\left(z+z_0\right)^2\right)}{\left(r^2+\left(z+z_0\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$

ב. $\sigma\left(r\right)=\frac{\left(-2pr^2+4pz_0^2\right)}{4\pi\left(r^2+z_0^2\right)^{\frac{5}{2}}}$

ג. 0

14) פוטנציאל על הספירה: $\varphi=\frac{kq}{a}$

מטעני הדמות הם: $q'=-q\frac{R}{a}$ במיקום $b=\frac{R^2}{a}$, $q'=q\frac{R}{a}$ במרכז